递归贝叶斯估计框架下的非线性滤波算法综述

王建文 李 迅 张 辉 马宏绪

(国防科技大学机电工程与自动化学院 长沙 410073)

摘 要 对递归贝叶斯估计框架下的非线性滤波(Nonlinear Filter,NF)算法进行分类,根据NF算法设计思想的不同把它们分为基于函数拟合/变换的NF算法、基于矩拟合的NF算法和基于条件后验概率密度函数拟合的NF算法。同时,还论述了线性回归卡尔曼滤波算法、二阶分离差分卡尔曼滤波算法、Unscented Kalman Filter算法和高斯-厄米特滤波算法四者间的共性与区别,指出了基于NF算法间相互融合的新NF算法设计的不足,分析了上述三类NF算法设计思想的完备性,发现了一些NF算法设计思想中的不足,明确了NF算法将来的突破方向。

关键词 递归贝叶斯估计,非线性滤波算法,算法分类,完备性

中图法分类号 TP274 **文献标识码** A

Survey of Nonlinear Filters in the Framework of Recursive Bayesian Estimation

WANG Jian-wen LI Xun ZHANG Hui MA Hong-xu

(School of Mechatronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract Nonlinear filters in the framework of recursive Bayesian estimation were classified. These filters were divided into three categories based on their designed ideas. These categories include nonlinear filters based on functions' approximation or transform and nonlinear filters based on moments' approximation and nonlinear filters based on conditional posterior probability density function's approximation. At the same time, common properties and special properties among the linear regression Kalman filter and divided difference 2 Kalman filter and unscented Kalman filter and Gauss-Hermite filter were discussed in detail. Deficiencies of filters' synthesis which is used to design new nonlinear filters were indicated. Sufficiency of designed ideas in nonlinear filters was analyzed, and deficiencies in some designed ideas were detected. Potential breakthrough directions in nonlinear filters were specified.

Keywords Recursive bayesian estimation, Nonlinear filter, Classification, Sufficiency

严格来讲,现实世界中所有的系统都是非线性系统,甚至很多都是强非线性系统,因此,非线性系统滤波(Nonlinear Filter,NF)问题广泛存在于飞行器导航、目标跟踪及工业控制等领域中,具有重要的理论意义和广阔的应用前景。

NF算法经过近50年的发展已取得了丰硕的成果,目前,常用的NF算法有:广义卡尔曼滤波算法(Extended Kalman Filter, EKF)[1]、二阶卡尔曼滤波算法(Second-Order Kalman Filter,SOKF)[1]、中心差分卡尔曼滤波算法(Central Difference Kalman Filter,CDKF)[2]、一阶分离差分卡尔曼滤波算法(Divided Difference 1 Kalman Filter,DD1KF)[3]、二阶分离差分卡尔曼滤波算法(Divided Difference 2 Kalman Filter,DD2KF)[3]、线性回归卡尔曼滤波算法(Linear Regression Kalman Filter,LRKF)[4]、转换测量卡尔曼滤波算法(Converted Measurement Kalman Filter, CMKF)[5]、Unscented Kalman Filter算法(UKF)[6,7]、高斯-厄米特滤波算法(Gauss-Hermite Filter,GHF)[8]、高斯和滤波算法(Gaussian Sum Filter, GSF)[9,10]、质量点滤波算法(Point-Mass Method, PMM)[11,12]、粒子滤波算法(Particle Filter,PF)[13]等。

虽然上述NF算法均是在递归贝叶斯估计(Recursive Bayesian Estimation,RBE)[4]框架下发展起来的,但是它们的设计思想并不相同,甚至差异很大。面对如此众多的NF算法,无论是初次接触NF算法的学者还是在NF算法设计方面有较深造诣的学者都会感到些许迷茫,特别是不利于工程实践人员直接套用适合实际需要的NF算法解决实际问题。

本文将详细分析上述NF算法的基本设计思想,并根据设计思想的不同对NF算法分类,最终发现这些NF算法大致可分3类:1)基于函数拟合/变换的NF算法,这类算法包括EKF算法、SOKF算法、CDKF算法、DD1KF算法、DD2KF算法、LRKF算法、CMKF算法;2)基于矩拟合的NF算法,这类算法包括UKF算法、GHF算法;3)基于条件后验概率密度函数(Conditional Posterior Probability Density Function,CPPDF)拟合的NF算法,这类算法包括GSF算法、PMM算法和PF算法。对NF算法分类的目的在于提炼出每类NF算法的设计思想,加深对NF算法的理解,以便于初学者和工程

到稿日期:2009-09-02 返修日期:2009-12-07

王建文(1979—),男,博士,讲师,主要研究方向为智能机器人系统、无线传感器网络研究,E-mail:wangjianwen7921@sina.com;李 迅(1972—),男,博士,副教授,主要研究方向为无线传感器网络、机械臂操作研究;张 辉(1971—),男,博士,副教授,主要研究方向为无线传感器网络、多智能体系统研究;马宏绪(1966—),男,博士,教授,主要研究方向为仿人机器人系统、无人直升机系统研究。

技术人员掌握和实践。

同时，本文还论述了 LRKF 算法、DD2KF 算法、UKF 算法和 GHF 算法四者间的共性与区别，指出了基于 NF 算法间相互融合的新 NF 算法设计的不足，分析了上述三类 NF 算法设计思想的完备性，发现了一些 NF 算法设计思想中的不足，明确了 NF 算法将来的突破方向。

1 递归贝叶斯估计框架[4]

设离散时间非线性随机系统模型为

$$\begin{cases} x_{k+1}=f(x_k,u_k,w_k) & k=0,1,\cdots \\ z_k=h(x_k,u_k,v_k) & k=1,2,\cdots \end{cases} \tag{1}$$

式中，$x_k\in R^n$ 是状态向量，$u_k\in R^l$ 是已知的输入向量，$z_k\in R^m$ 是观测向量，$w_k\in R^i$，$v_k\in R^j$ 是已知的相互独立的零均值白噪声，$f(\cdot)$，$h(\cdot)$是已知的非线性函数。

RBE 算法期望在给定 $Z^k=[z_1 \ \cdots \ z_k]^T$、$U^k=[u_0 \ \cdots \ u_k]^T$ 和初始状态 x_0 的概率密度函数 $p(x_0)$ 情况下能够估计出条件后验概率密度函数 $p(x_k|Z^k,U^k)$。

由贝叶斯公式知

$$\begin{cases} p(x_k\mid Z^k,U^k)=\dfrac{p(z_k\mid x_k,u_k)p(x_k\mid Z^{k-1},U^{k-1})}{\int_{R^n}p(z_k\mid x_k,u_k)p(x_k\mid Z^{k-1},U^{k-1})\mathrm{d}x_k} \\ p(x_k\mid Z^{k-1},U^{k-1})=\int_{R^n}p(x_k\mid x_{k-1},u_{k-1})p(x_{k-1}\mid \\ \quad Z^{k-1},U^{k-1})\mathrm{d}x_{k-1} \end{cases} \tag{2}$$

设概率密度函数 $p(x_k|x_{k-1},u_{k-1})$，$p(z_k|x_k,u_k)$已知，给定 $Z^k=[z_1 \ \cdots \ z_k]^T$、$U^k=[u_0 \ \cdots \ u_k]^T$ 和 $p(x_0)$，则由式(2)可递归计算出 $p(x_k|Z^k,U^k)$。

由于 $f(\cdot)$，$h(\cdot)$是非线性函数，因此，式(2)不存在解析解，此时，式(2)只能近似计算。设状态向量、观测向量和噪声向量服从高斯分布，则式(2)的计算过程可大大简化，此时，$p(x_k|Z^k,U^k)$也服从高斯分布，因此，仅需估计出$\hat{x}_k=E[x_k|Z^k,U^k]$和其协方差矩阵 P_{x_k} 即可描述 $p(x_k|Z^k,U^k)$，基于 RBE 算法框架可推导出$\hat{x}_k$，P_{x_k} 的估计式如下

$$\begin{cases} \hat{x}_k=\hat{x}_k^-+K_k(z_k-\hat{z}_k^-) \\ P_{x_k}=P_{x_k}^--K_kP_{z_k}K_k^T \\ \hat{x}_k^-=E[f(x_{k-1},u_{k-1},w_{k-1})|Z^{k-1},U^{k-1}] \\ P_{x_k}^-=E[(x_k-\hat{x}_k^-)(x_k-\hat{x}_k^-)^T|Z^{k-1},U^{k-1}] \\ \hat{z}_k^-=E[h(x_k,u_k,v_k)|Z^{k-1},U^{k-1}] \\ P_{z_k}=E[(z_k-\hat{z}_k^-)(z_k-\hat{z}_k^-)^T|Z^{k-1},U^{k-1}] \\ K_k=P_{x_kz_k}P_{z_k}^{-1} \\ P_{x_kz_k}=E[(x_k-\hat{x}_k^-)(z_k-\hat{z}_k^-)^T|Z^{k-1},U^{k-1}] \end{cases} \tag{3}$$

显然，式(3)比式(2)更容易计算。式(3)中需要解决的核心问题是各个条件期望式的计算，在 NF 算法发展的近五十年中，很多学者对这些条件期望式的计算进行了卓有成效的研究，取得了丰硕的成果，设计了一系列基于式(3)的 NF 算法，这些 NF 算法根据设计思想的不同可大致分为两类：一类是基于函数拟合/变换的 NF 算法，另一类是基于矩拟合的 NF 算法。另外，一些学者直接从式(2)出发，对式(2)的近似计算进行研究，设计了一系列基于式(2)的 NF 算法，称它们是基于 CPPDF 拟合的 NF 算法。下面，分别介绍 RBE 算法框架下的这 3 类 NF 算法。

2 基于函数拟合/变换的非线性滤波算法

函数拟合/变换是一种处理非线性函数的数学变换方法，通过使用函数拟合/变换，非线性函数能够变换为易于处理的函数。目前，常见的非线性函数拟合方法有泰勒展开拟合、斯特林插值拟合和加权统计线性回归(Weighted Statistical Linear Regression，WSLR)拟合，常见的非线性函数变换方法有转换测量变换。下面，分别介绍这些函数拟合/变换方法以及基于它们所设计的一些 NF 算法。

设非线性函数 $y=f(x)$处处可微分，$x\in R^n$ 是随机变量，在 $\bar{x}=E[x]$点附近泰勒展开 $f(x)$，得

$$\begin{cases} f(x)=f(\bar{x}+\Delta x)\approx\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{i!}D_{\Delta x}^if \\ D_{\Delta x}^if=\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\Delta x_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big)^if(x)|_{x=\bar{x}} \end{cases} \tag{4}$$

式中，$\Delta x=x-\bar{x}=[\Delta x_1 \ \ \Delta x_2 \ \ \cdots \ \ \Delta x_n]^T$。

泰勒展开拟合方法利用式(4)中 $f(x)$泰勒展开式的某些项来代替 $f(x)$，一般使用 $f(x)$泰勒展开式的一阶多项式或二阶多项式拟合 $f(x)$。

若使用 $f(x)$泰勒展开式的一阶多项式拟合 $f(x)$，则有

$$f(x)\approx f(\bar{x})+D_{\Delta x}^1f \tag{5}$$

EKF 算法的基本思想就是使用 $f(x)$泰勒展开式的一阶多项式拟合 $f(x)$，基于式(5)设计的 NF 算法就是 EKF 算法。

若使用 $f(x)$泰勒展开式的二阶多项式拟合 $f(x)$，则有

$$f(x)\approx f(\bar{x})+D_{\Delta x}^1f+\frac{1}{2}D_{\Delta x}^2f \tag{6}$$

SOKF 算法的基本思想就是使用 $f(x)$泰勒展开式的二阶多项式拟合 $f(x)$，基于式(6)设计的 NF 算法就是 SOKF 算法。

由式(5)、式(6)可以看出，EKF 算法和 SOKF 算法需要计算 $f(x)$的一次微分或二次微分。对于复杂的非线性函数来说，$f(x)$的一次微分或二次微分可能难于计算甚至不存在，因此，EKF 算法和 SOKF 算法的应用范围受到了限制。为了弥补 EKF 算法和 SOKF 算法的不足，Schei[2] 和 Nörgaard[3] 等人提出使用斯特林插值拟合式(5)、式(6)中 $f(x)$的一次微分和二次微分。

定义 1

$$\begin{cases} \delta_pf(\bar{x})=f\Big(\bar{x}+\dfrac{h}{2}e_p\Big)-f\Big(\bar{x}-\dfrac{h}{2}e_p\Big) \\ \mu_pf(\bar{x})=\dfrac{1}{2}\Big(f\Big(\bar{x}+\dfrac{h}{2}e_p\Big)+f\Big(\bar{x}-\dfrac{h}{2}e_p\Big)\Big) \end{cases} \tag{7}$$

式中，$e_p=[0\cdots \underset{p}{1} \ \cdots \ 0]^T\in R^n$，$h$ 是插值步长。

利用式(7)重新描述式(5)，得

$$f(x)\approx f(\bar{x})+\frac{1}{h}\Big(\sum_{p=1}^{n}\Delta x_p\mu_p\delta_p\Big)f(\bar{x}) \tag{8}$$

CDKF 算法和 DD1KF 算法的基本思想就是使用式(8)拟合 $f(x)$，基于式(8)设计的 NF 算法就是 CDKF 算法和 DD1KF 算法。

利用式(7)重新描述式(6)，得

$$
\begin{cases}
f(x)\approx f(\bar{x})+\dfrac{1}{h}(\sum\limits_{p=1}^{n}\Delta x_p\mu_p\delta_p)f(\bar{x})+\dfrac{1}{2}\tilde{D}_{\Delta x}^2 f \\
\tilde{D}_{\Delta x}^2 f=\dfrac{1}{h^2}(\sum\limits_{p=1}^{n}(\Delta x_p)^2\delta_p^2+A)f(\bar{x}) \\
A=\sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{q=1,q\neq p}^{n}\Delta x_p\Delta x_q(\mu_p\delta_p)(\mu_q\delta_q)
\end{cases} \tag{9}
$$

DD2KF 算法的基本思想就是使用式(9)拟合 $f(x)$，基于式(9)设计的 NF 算法就是 DD2KF 算法。

WSLR 拟合方法是一种模型辨识方法，它不考虑非线性函数 $f(x)$ 的具体形式，也不需要泰勒展开 $f(x)$，而是把 $f(x)$ 看作一个黑箱，通过黑箱的输入-输出对估计所设计的线性函数的参数，并使用辨识出的线性函数来拟合 $f(x)$。

设非线性函数 $f(x)$ 存在 m 个输入-输出对 $(\chi_i,f(\chi_i),\omega_i)$，$i=1,\cdots,m$，设 $e_i=f(\chi_i)-(A\chi_i+b)$，其中，$A,b$ 需满足

$$
\begin{cases}
\min\limits_{A,b}(\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i e_i^T e_i) \\
\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i=1
\end{cases} \tag{10}
$$

定义 2

$$
\begin{cases}
\hat{x}=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i\chi_i \\
\hat{P}_x=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i(\chi_i-\hat{x})(\chi_i-\hat{x})^T \\
\bar{y}=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i f(\chi_i) \\
P_y=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i(f(\chi_i)-\bar{y})(f(\chi_i)-\bar{y})^T \\
\hat{P}_{xy}=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i(\chi_i-\hat{x})(f(\chi_i)-\bar{y})^T
\end{cases} \tag{11}
$$

解式(10)得，$A=\hat{P}_{xy}^T\hat{P}_x^{-1}$，$b=\bar{y}-A\hat{x}$。

由此可见，在 WSLR 拟合方法中，只要给定 m 个输入-输出对 $(\chi_i,f(\chi_i),\omega_i)$，$i=1,\cdots,m$，即可利用式(11)计算出 $\hat{P}_{xy}^T$，$\hat{P}_x^{-1}$，$\bar{y}$，$\hat{x}$，进而可得 $f(x)$ 的线性拟合式为

$$
y_a=\hat{P}_{xy}^T\hat{P}_x^{-1}x+\bar{y}-A\hat{x} \tag{12}
$$

LRKF 算法的基本思想就是使用式(12)拟合 $f(x)$，基于式(12)设计的 NF 算法就是 LRKF 算法。

上述 3 种函数拟合方法均是非线性函数某种程度上的近似，由于存在拟合误差，因此，基于函数拟合方法设计的 NF 算法的性能将受到影响。为了提高 NF 算法的性能，Lerro 等人[5]在研究雷达目标跟踪问题时提出了非线性函数的转换测量变换方法。转换测量变换方法通过对观测方程施加非线性变换 T 把非线性观测方程变换为线性观测方程，即有

$$
y_n=T(y)=T(f(x))=Ax \tag{13}
$$

由于转换测量变换方法是一种精确线性化方法，不存在线性化误差，因此，基于式(13)设计的 NF 算法能够显著提高滤波精度，该算法就是 CMKF 算法。

3 基于矩拟合的非线性滤波算法

一般来说，拟合非线性函数的概率密度函数比拟合非线性函数本身要容易。由于非线性函数的概率密度函数是非线性函数各阶矩的函数，因此，只要拟合出非线性函数的各阶矩就可实现非线性函数概率密度函数的拟合。Julier 等人基于上述思想提出了一种拟合非线性函数前两阶矩的方法，称为 UT 变换(Unscented Transform，UT)[6,7]。UT 变换方法首先选择 m 个 Sigma 点 (χ_i,ω_i)，$i=1,\cdots,m$ 满足

$$
\begin{cases}
\bar{x}=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i\chi_i \\
P_x=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i(\chi_i-\bar{x})(\chi_i-\bar{x})^T \\
\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i=1
\end{cases} \tag{14}
$$

Sigma 点 (χ_i,ω_i)，$i=1,\cdots,m$ 经非线性变换后用于拟合 $f(x)$ 的前两阶矩，即有

$$
\begin{cases}
E[y]\approx\check{y}=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i f(\chi_i) \\
P_y\approx\check{P}_y=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i(f(\chi_i)-\check{y})(f(\chi_i)-\check{y})^T
\end{cases} \tag{15}
$$

上述过程就是 UT 变换，基于 UT 变换所设计的 NF 算法就是 UKF 算法。

Ito 等人[8]对非线性函数期望的计算问题进行了深入研究，最终利用高斯-厄米特积分规则(Gauss-Hermite Quadrature Rule，GHQR)[14]把非线性函数期望计算问题转化为 Sigma 点和相应权值的计算问题，这些 Sigma 点和权值满足

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\cong\sum_{i=1}^{m}q_i f(z_i) \tag{16}
$$

式中，$z\in R$，q_i，z_i 的计算参见文献[14]。

把式(16)扩展到多维系统，有

$$
\int_{R^n}f(x)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2}|x|_2^2}\mathrm{d}x\cong\sum_{i_1=1}^{m}\cdots\sum_{i_n=1}^{m}f(z_{i_1},\cdots,z_{i_n})q_{i_1}\cdots q_{i_n} \tag{17}
$$

式中，$|x|_2$ 是向量的 2-范数。

设 $p_j=[z_{i_1}\ \cdots\ z_{i_n}]^T$，$\omega_j=q_{i_1}\cdots q_{i_n}$，$j=m^n$，代入式(17)，得

$$
\int_{R^n}f(x)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2}|x|_2^2}\mathrm{d}x\cong\sum_{j=1}^{m^n}f(p_j)\omega_j \tag{18}
$$

设 $x\in N(\bar{x},P_x)$，$P_x=S_xS_x^T$，$\chi=S_xp+\bar{x}$，则 $f(x)$ 的期望为

$$
\begin{cases}
E[y]=\int_{R^n}f(x)p(x)\mathrm{d}x\cong\check{y}=\sum\limits_{j=1}^{m^n}f(\chi_j)\omega_j \\
p(x)=\dfrac{1}{((2\pi)^n\det P_x)^{\frac{1}{2}}}e^{(-\frac{1}{2}(x-\bar{x})P_x^{-1}(x-\bar{x})^T)}
\end{cases} \tag{19}
$$

式中，$\chi_j=S_xp_j+\bar{x}$。

由式(19)可以看出，Ito 等人的方法实际上是使用 m^n 个 Sigma 点和相应权值拟合 $f(x)$ 的一阶矩。$f(x)$ 的二阶矩使用下式拟合

$$
P_y\approx\check{P}_y=\sum_{j=1}^{m^n}\omega_j(f(\chi_j)-\check{y})(f(\chi_j)-\check{y})^T \tag{20}
$$

上述方法就是 Ito 等人提出的基于 GHQR 的非线性函数前两阶矩拟合方法，基于上述方法设计的 NF 算法就是 GHF 算法。

可以证明，式(19)中的 Sigma 点和权值满足式(14)，称 Sigma 点和权值满足式(14)且非线性函数前两阶矩拟合具有式(15)形式的矩拟合方法为 Sigma 点拟合方法，基于 Sigma 点拟合方法所设计的 NF 算法称为 Sigma 点卡尔曼滤波(Sigma-points Kalman filter，SPKF)算法。显然，UKF 算法和 GHF 算法都是一种 SPKF 算法。

4 基于条件后验概率密度函数拟合的非线性滤波算法

前述 NF 算法均是基于式(3)设计的,对于非线性系统,式(3)在拟合 CPPDF 方面存在一定近似性。若直接估计式(2)中的 CPPDF,一方面可避免式(3)中的条件期望式的计算,另一方面也可放宽对状态向量、观测向量和噪声向量分布特性的限制。Alspach 等人[9]首先对 CPPDF 估计问题进行了尝试性研究,提出了 GSF 算法。GSF 算法的理论基础是任何概率密度函数均可用高斯混合模型无限逼近,基于该理论,状态向量 x_{k-1},x_k、过程噪声 w_{k-1} 和量测噪声 v_k 的条件概率密度函数可描述为

$$\begin{cases} p(x_{k-1}\mid Z^{k-1},U^{k-1})\approx\sum_{i=1}^{G}\omega_{x,i}N(x;\hat{x}_{k-1,i},P_{x_{k-1},i}) \\ p(w_{k-1})\approx\sum_{j=1}^{I}\omega_{w,i}N(w;\hat{w}_j,P_{w,j}) \\ p(v_k)\approx\sum_{k=1}^{J}\omega_{v,i}N(v;\hat{v}_k,P_{v,k}) \\ p(x_k\mid Z^k,U^k)\approx\sum_{l=1}^{M}\omega_{x,l}N(x;\hat{x}_{k,l},P_{x_k,l}) \end{cases} \tag{21}$$

由式(21)可以看出,若要计算 $p(x_k\mid Z^k,U^k)$,必须先确定参数 $M,\omega_{x,l},\hat{x}_{k,l},P_{x_k,l},l=1,\cdots,M$,它们的确定方法参见文献[8,10],基于上述思想设计的 NF 方法就是 GSF 算法。

实际上,GSF 算法并没有完全摆脱式(3)的影响,它在计算 $p(x_k\mid Z^k,U^k)$ 时仍旧使用了基于式(3)设计的某些 NF 算法。Bucy 等人[12]基于积分近似计算方法提出了一种 PMM 算法,其核心思想是使用有限项和式拟合积分式,从而实现式(2)的计算。

PMM 算法的基本计算过程如下。

设 $p(x_k\mid Z^k,U^k)$,$p(x_{k+1}\mid x_k,u_k)$,$p(z_{k+1}\mid x_{k+1},u_{k+1})$ 已知,从 $p(x_k\mid Z^k,U^k)$ 中选择 N_k 个点 $\xi_{k,i},i=1,\cdots,N_k$ 组成网格,该网格经非线性变换后得到新网格

$$\eta_{k+1,i}=f(\xi_{k,i},u_k,0),i=1,\cdots,N_k \tag{22}$$

重新定义网格 $\eta_{k+1,i},i=1,\cdots,N_k$ 得到新网格 $\xi_{k+1,j},j=1,\cdots,N_{k+1}$,基于新网格计算

$$p(\xi_{k+1,j}\mid Z^k,U^k)=\sum_{i=1}^{N_k}\Delta\xi_{k,i}p(\xi_{k+1,j}\mid\xi_{k,i},u_k)p(\xi_{k,i}\mid Z^k,U^k) \tag{23}$$

式中,$\Delta\xi_{k,i}$ 是第 i 个网格点的体积。

同理,计算

$$p(\xi_{k+1,j}\mid Z^{k+1},U^{k+1})=\frac{p(z_{k+1}\mid\xi_{k+1,j},u_{k+1})p(\xi_{k+1,j}\mid Z^k,U^k)}{\sum_{i=1}^{N_{k+1}}\Delta\xi_{k+1,j}p(z_{k+1}\mid\xi_{k+1,j},u_{k+1})p(\xi_{k+1,j}\mid Z^k,U^k)} \tag{24}$$

式中,$\Delta\xi_{k+1,j}$ 是第 j 个网格点的体积。

当计算出所有的 $p(\xi_{k+1,j}\mid Z^{k+1},U^{k+1}),j=1,\cdots,N_{k+1}$ 后,即得到近似的 CPPDF。

PMM 算法的难点在于网格的确定,若把网格点随机分布,且无限增多,则显然 PMM 算法的精度将进一步提高。PF 算法的基本思想就是使用随机分布的大量网格点,即粒子去近似 CPPDF,目前,PF 算法也是最具代表性的基于 CPPDF 拟合的 NF 算法。

PF 算法的基本计算过程如下。

设概率密度函数 $q(x_k\mid x_{k-1},z_k)$ 已知,从 $q(x_k\mid x_{k-1},z_k)$ 中随机抽取 N 个样本 $x_{k,i},i=1,\cdots,N$,更新 $x_{k,i},i=1,\cdots,N$ 的权值并归一化

$$\begin{cases} \omega_k^{(i)}=\omega_{k-1}^{(i)}\dfrac{p(z_k\mid x_k^{(i)},u_k)p(x_k^{(i)}\mid x_{k-1}^{(i)},u_{k-1})}{\pi(x_k^{(i)}\mid x_{k-1}^{(i)},z_k)} \\ \tilde{\omega}_k^{(i)}=\dfrac{\omega_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N}\omega_k^{(i)}} \end{cases} \tag{25}$$

则 CPPDF 可近似描述为

$$p(x_k\mid Z^k,U^k)\approx\sum_{i=1}^{N}\tilde{\omega}_k^{(i)}\delta(x_k-x_k^{(i)}) \tag{26}$$

式中,$\delta(\cdot)$是 Delta 函数。

5 非线性滤波算法讨论

5.1 非线性滤波算法间的关系

观察 LRKF 算法可以发现,虽然 LRKF 算法的设计思想与 SPKF 算法的设计思想完全不同,但是,若 LRKF 算法中 $(\chi_i,\omega_i),i=1,\cdots,m$ 满足

$$\begin{cases} \bar{x}=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\chi_i \\ P_x=\sum_{i=1}^{m}\omega_i(\chi_i-\hat{x})(\chi_i-\hat{x})^T \end{cases} \tag{27}$$

则 LRKF 算法可看作是 SPKF 算法。

考察 DD2KF 算法,若 DD2KF 算法中的协方差矩阵使用式(28)近似计算,则称此时的 DD2KF 算法为近似 DD2KF 算法。

$$P_y\approx\breve{P}_y=E[\tilde{D}_{\Delta x}^1\tilde{f}(\tilde{D}_{\Delta x}^1\tilde{f})^T]+\frac{1}{4}E[\tilde{D}_{\Delta x}^2\tilde{f}(\tilde{D}_{\Delta x}^2\tilde{f})^T]-(\bar{y}-\tilde{f}(\bar{z}))(\bar{y}-\tilde{f}(\bar{z}))^T \tag{28}$$

式(28)中各运算符号的定义参见文献[3]。

显然,近似 DD2KF 算法也可看作是一种 SPKF 算法。

考察 LRKF 算法,若 LRKF 算法中$(\chi_i,\omega_i),i=1,\cdots,m$ 仅满足式(29),则称此时的 LRKF 算法为弱广义 Sigma 点卡尔曼滤波算法(Weak Extended Sigma-points Kalman Filter,WESPKF)。若 LRKF 算法中$(\chi_i,\omega_i),i=1,\cdots,m$ 连式(29)都不满足,则称此时的 LRKF 算法为强广义 Sigma 点卡尔曼滤波算法(Strong Extended Sigma-points Kalman Filter,SESPKF)。

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\chi_i \tag{29}$$

显然,LRKF 算法等同于 SESPKF 算法,DD2KF 算法可看作是一种 WESPKF 算法,GSPKF 算法[15]也是一种 WESPKF 算法,GSPKF 算法同时渐进收敛于 SPKF 算法。若为 SESPKF 算法加上不同的约束条件,它可转化为 WESPKF 算法或 SPKF 算法。由于 SESPKF 算法和 WESPKF 算法对 Sigma 点和权值的约束较弱,因此,理论上可设计出无穷多种 SESPKF 算法和 WESPKF 算法,但是,这些 NF 算法缺少必要的理论支撑(如估计精度的定性分析等),一般很难被接受。

5.2 非线性滤波算法间的关系

递归贝叶斯估计框架下的滤波算法间借鉴的目的是综合各滤波算法的优点,进而解决系统的状态估计问题或提高滤波估计精度。

van der Merwe 等人在滤波算法的借鉴方面作了大量的研究工作,文献[16,17]把平方根滤波算法与 UKF 算法和

DD2KF算法结合，设计了平方根UKF算法和平方根DD2KF算法；文献[10]把SPKF算法、GSF算法和PF算法结合，设计了高斯混合Sigma点粒子滤波(Gaussian Mixture Sigma-Point Particle Filter,GMSPPF)算法。另外，文献[18]把自适应滤波算法与CDKF算法结合用于解决噪声统计特性未知时的状态估计问题；文献[19]把自适应滤波算法与UKF算法相结合用于提高UKF算法的估计精度和收敛速度；文献[20]把UT变换思想、EKF算法和多模型线性化思想相结合，设计了基于UT变换的多模型广义卡尔曼滤波算法；文献[21]把GHF算法与PF算法结合，设计了高斯-厄米特粒子滤波(Gauss-Hermite Particle Filter,GHPF)算法等。

实际上，通过滤波算法间的相互借鉴可设计出很多种NF算法，虽然滤波算法间相互借鉴的出发点各不相同，但实际上它们都没有引入新的滤波算法思想，而仅是为了解决现有问题而不得不借鉴其他滤波算法或为了提高现有滤波算法的性能而引入其他滤波算法。

5.3 非线性滤波算法间的关系

观察$f(x)$的泰勒展开式可以发现，无论是使用微分形式的二阶多项式拟合$f(x)$，还是使用斯特林插值形式的二阶多项式拟合$f(x)$，其表达式都相当复杂，特别是在计算协方差矩阵时尤为麻烦。若使用更高阶的多项式拟合$f(x)$，则在计算$f(x)$的均值和协方差矩阵时将遇到困难，甚至可能需要修正式(3)中的RBE算法框架，这对于所处理的实际问题来说可能得不偿失。目前来看，使用二阶多项式拟合$f(x)$已经足够，可以说基于函数拟合的NF算法的设计思想基本是完备的。

对于基于矩拟合的NF算法来说，理论上，SESPKF算法、WESPKF算法和GHF算法中的Sigma点和权值能够实现对x的任意阶矩的匹配，因此，基于矩拟合的NF算法的设计思想也是完备的。

CMKF算法通过观测向量坐标的非线性变换把非线性观测方程变换为线性观测方程，目前，它仅适用于某些特殊的非线性系统，缺少必要的理论支持，属于一种经验方法，因此，基于函数变换的NF算法的设计思想很不完备，具有较大的突破空间。另外，基于CPPDF拟合的NF算法的设计思想也很不完备，其需要解决的核心问题是高维积分问题，目前，无论是在数学上还是在实际应用中都存在较大的突破空间。

参考文献

[1] 史忠科.最优估计的计算方法[M].北京：科学出版社，2001

[2] Schei T S. A Finite-difference Method for Linearization in Nonlinear Estimation Algorithms[J]. Automatica, 1997, 33(11): 2051-2058

[3] Nögaard M, Poulsen N K, Ravn O. New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems[J]. Automatica, 2000, 36: 1627-1638

[4] Lefebvre T, Bruyninckx H, De Schutter J. Comment on A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(8): 1406-1408

[5] Lerro D, Bar-Shalom Y. Tracking with Debiased Consistent Converted Measurements versus EKF[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1993, 29(3): 1015-1022

[6] Julier S J, Uhlmann J K. A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems[A]//Proceedings of the 1995 American Control Conference[C]. Seattle, 1995: 1628-1632

[7] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-481

[8] Ito K, Xiong K Q. Ganssian Filters for Nonlinear Filtering Problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927

[9] Alspach D L, Sorenson H W. Nonlinear Bayesian Estimation using Gaussian Sum Approximation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1972, 17(4): 439-448

[10] van der Merwe R, Wan E A. Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models[A]//Proceedings of the Workshop on Advances in Machine Learning[C]. Montreal, Canada, 2003

[11] Simandl M, Kralovec J, Soderstrom T. Anticipative Grid Design in Point-Mass Approach to Nonlinear State Estimation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(4): 699-702

[12] Bucy R, Senne K. Digital Synthesis of Nonlinear Filters[J]. Automatica, 1971, 7(3): 287-298

[13] Gustafsson F, Gunnarsson F, Bergman N, et al. Particle Filters for Positioning, Navigation and Tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(2): 425-437

[14] Box G E P, Rabinowtiz P. Numerical Integration[M]. Waltham, Mass, Blaisdell, 1967

[15] 王建文，韩大鹏，马宏绪，等.一种新的SPKF算法—GSPKF算法[J].系统仿真学报，2008，20(4)：885-887

[16] van der Merwe R, Wan E A. The Square-Root Unscented Kalman Filter For State and Parameter-Estimation[A]//Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)[C]. Salt Lake City, Utah, 2001: 3461-3464

[17] van der Merwe R, Wan E A. Efficient Derivative-Free Kalman Filters for Online Learning[A]//Proceedings of the European Symposium on Artificial Neural Networks[C]. Bruges, 2001: 205-210

[18] 范文兵，张素贞.带未知时变噪声的非线性系统卡尔曼滤波器算法研究[J].华东理工大学学报，2003，29(3)：299-302

[19] Song Q, Han J D. An Adaptive UKF Algorithm for the State and Parameter Estimations of a Mobile Robot[J]. ACTA AUTOMATICA SINICA, 2008, 34(1): 72-79

[20] Wang J W, Li H J, Li X, et al. The Multiple-Model Linearization Based on the Unscented Transform and its Application in Nodes' Locations in Wireless Sensor Networks[A]//Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics[C]. Sanya, 2007: 1099-1013

[21] 袁泽剑，郑南宁，贾新春.高斯—厄米特粒子滤波器[J].电子学报，2003，31(7)：970-973