P-集合与它的应用特征

史开泉
(山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)

摘 要 P-集合(packet sets)是由内 P-集合 $X^{\bar{F}}$(internal packet sets $X^{\bar{F}}$)与外 P-集合 X^{F}(outer packet sets X^{F})构成的集合对,或者$(X^{\bar{F}},X^{F})$是 P-集合。P-集合具有动态特性。利用 P-集合,给出信息遗传概念,给出信息遗传的度量,提出信息遗传定理。利用信息遗传特性,给出信息状态辨识的方法与应用,给出信息图像生成、信息图像隐匿-潜藏的应用。P-集合是研究动态信息系统的一个新的理论与方法。最后给出 P-集合存在的事实,给出 P-集合与 Z. Pawlak 粗集的区别。

关键词 P-集合,信息遗传,基数圆定理,信息状态辨识,信息图像的隐匿-潜藏,应用

P-sets and its Applied Characteristics

SHI Kai-quan
(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract P-sets are a set pair which are composed of internal P-sets$X^{\bar{F}}$ and outer P-setsX^{F}, or $(X^{\bar{F}},X^{F})$ is P-sets. P-sets have dynamic characteristics. By using P-sets, the concept of Information Inheritance and Information Inheritance Metric, as well as Information Inheritance Theorems were given. Based on characteristic of Information Inheritance, method and application of information state identification were proposed. Information Image-generation, applications of Information Image hidden-potential were provided. P-sets are new theory and method to study dynamic information system. Finally, the reality of P-sets was given, the differences of P-sets and Z. Pawlak rough sets were given.

Keywords P-sets, Information inheritance, Basic number circle theorem, Information state identification, Information image hidden-potential, Applications

1 引言

一个例子:给定苹果 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5;x_1-x_5 具有属性(特征)α_1=红色,α_2=甜味;具有属性 α_1,α_2 的 x_1-x_5 构成苹果集合(有限普通集合)$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}$是 x_1-x_5 的属性集合;或者,α 是 X 的属性集合。A. 如果在 α 内补充部分属性,α 变成 α^F,$\alpha\subseteq\alpha^F$;则$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$变成$(x)^{\bar{F}}=\{x_1,x_4,x_5\}$,$(x)^{\bar{F}}\subseteq(x)$。B. 如果在 α 内删除部分属性,α 变成$\alpha^{\bar{F}}$,$\alpha^{\bar{F}}\subseteq\alpha$;则$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$变成$(x)^F=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6',x_7'\}$,$(x)\subseteq(x)^F$。例如:$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$ 是具有属性(特征)α_1=红色,α_2=甜味的苹果;或者,$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$是 5 个红皮、甜味的苹果;$\alpha_1,\alpha_2$ 构成 X 的属性集合$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}$。若在$\alpha$内增加一个属性$\alpha_3$=山东烟台,$\alpha$ 变成 $\alpha^F=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$,则苹果集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$变成 $X^{\bar{F}}=\{x_1,x_2,x_5\}$。显然,$X^{\bar{F}}$内的元素个数比 X 内的元素个数少;尽管 x_3,x_4 是红皮、甜味的苹果,x_3,x_4 却不是产自山东烟台(可能产自山西、河南或北方其它地方);x_3,x_4 被从 X 内删除,X 变成 $X^{\bar{F}}$。若在 α 内删除一个属性 α_1,α 变成$\alpha^{\bar{F}}=\{\alpha_2\}$,则苹果集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$变成 $X^F=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x'_6,x'_7,x'_8,x'_9\}$。显然,$X^F$ 内的元素个数比 X 内的元素个数多。因为只要求 α_2=甜味,所以具有 α_2=甜味的白皮、黄皮、绿皮、紫皮的苹果 x_6',x_7',x_8',x_9' 都被统统补充到 X 内,X 变成X^F。从 A 中得到:对α给予属性补充,α 变成α^F,$\alpha\subseteq\alpha^F$;集合 X 内某些元素被删除,X 变成 $X^{\bar{F}}$,$X^{\bar{F}}\subseteq X$;或者 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$变成 $X^{\bar{F}}=\{x_1,x_2,x_5\}$。把生物学中的“遗传特征”引入到这里,认识 X 变成 $X^{\bar{F}}$:$X^{\bar{F}}$是 X 内的元素 x_1,x_2,x_5 被显性遗传得到的(x_3,x_4 是隐性遗传,在 $X^{\bar{F}}$内不被显露)。

从 B 中得到:对 α 给予属性删除,α 变成 $\alpha^{\bar{F}}\subseteq\alpha$,$X$ 变成 X^F,$X\subseteq X^F$;或者 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$变成 $X^F=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6',x_7',x_8',x_9'\}$。把生物学中的“遗传特征”引入到这里,认识 X 变成 X^F:X^F 是 X 内的元素 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 被显性遗传,同时又补充显性遗传 x_6',x_7',x_8',x_9'得到的。A 指出一个事实:y 是夫妇 P 与 Q 生育的子女;y 具有 P 的部分特征(P 的眼睛、耳朵特征被显性遗传,其它特征被隐性遗传),y 具有 Q 的部分特征(Q 的嘴、眉毛特征被显性遗传,其它特征被隐性遗传)。B 指出一个事实:y 是夫妇 P 与 Q 生育的子女;y 的所有特征是 Q 的特征(Q 的所有特征在 y 中被显性遗传,Q 是 y 的母亲),y 具有 R 的部分特征(R 的部分特征在 y 中被显性遗传,R 是 y 的姥姥)。P 的所有特征在 y 中被隐性遗传(R 是 y 的父亲)。

事实上,例子中,A 给出的事实特征、B 给出的事实特征

本文受山东省自然科学基金项目(Y2007G08)资助。

史开泉 教授,博士生导师,主要研究领域为粗集理论与应用、信息系统与信息识别理论与应用,E-mail:shikq@sdu.edu.cn。

与 P-集合(Packet sets)的特征相似；显然，P-集合对研究事实A与B，提供了理论支持。2008年，文献[1,2]把动态特性引入到有限普通集合 X 中，改进有限普通集合 X，提出 P-集合(Packet sets)，P-集合是由内 P-集合 $X^{\overline{F}}$(Internal packet sets $X^{\overline{F}}$)与外 P-集合 X^F(Outer packet sets X^F)构成的集合对，或者($X^{\overline{F}},X^F$)是 P-集合。P-集合具有动态特性。P-集合存在的事实与背景在第6节中给出。

本文利用 P-集合，给出信息的遗传特性，给出信息遗传的度量，给出信息的遗传定理；利用信息的遗传特性，给出异常信息的辨识方法与应用。为了深入认识 P-集合的应用特性，还给出信息图像的隐匿-潜藏方法与应用。

为了方便，本文给出的讨论又能使读者容易地接收本文给出的结果，把 P-集合的结构与特性简单地引入到本文的第2节中，作为本文讨论的预备概念与理论准备；P-集合的更多概念、应用参见文献[1-6]。

2 P-集合的结构与应用领域

2008年，文献[1,2]给出：

给定有限普通集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合；称 $X^{\overline{F}}$ 是 X 生成的内 P-集合(internal packet sets)，简称 $X^{\overline{F}}$ 是内 P-集合，而且

$$X^{\overline{F}}=X-X^- \tag{1}$$

X^- 称作 X 的 $\overline{F}$-元素删除集合，而且

$$X^-=\{x|x\in X,\overline{f}(x)=u\overline{\in}X,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{2}$$

如果 $X^{\overline{F}}$ 的属性集合 α^F 满足

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'|f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\} \tag{3}$$

式中，$\beta\in V,\beta\overline{\in}\alpha$；$f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$；$X^{\overline{F}}\neq\phi$；$V$ 是非空属性论域，U 是非空元素论域。

给定有限普通集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合，称 X^F 是 X 生成的外 P-集合(outer packet sets)，简称 X^F 是外 P-集合，而且

$$X^F=X\cup X^+ \tag{4}$$

X^+ 称作 X 的 F-元素补充集合，而且

$$X^+=\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\} \tag{5}$$

如果 X^F 的属性集合 $\alpha^{\overline{F}}$ 满足

$$\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\beta_i|\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{6}$$

式中，$\alpha_i\in\alpha,\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$；$\alpha^{\overline{F}}\neq\phi$。

由内 P-集合 $X^{\overline{F}}$ 与外 P-集合 X^F 构成的集合对，称作普通集合 X 生成的 P-集合(packet sets，P=packet)，简称 P-集合，如果

$$(X^{\overline{F}},X^F) \tag{7}$$

普通集合 X 称作 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 的基集合(基础集合，ground set)。

因为 P-集合具有动态特性，P-集合的一般表示形式是

$$\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)|i\in I,j\in J\} \tag{8}$$

式中，I,J 是指标集(index set)；式(8)是 P-集合的集合对族的表示形式。

为了表示的简单，又不失一般性，式(7)中只使用一个集合对 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 表示 P-集合的结构。

图1给出 P-集合 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 的直观表示。

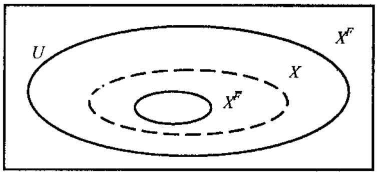

图1 X 是有限普通集合，用虚线表示；$X^{\overline{F}}$ 是 X 的内 P-集合，在 X 内，用实线表示；X^F 是 X 的外 P-集合，在 X 外，用实线表示。

利用式(1)－式(7)，式(8)得到

定理1(P-集合与有限普通集合第一关系定理) 给定 P-集合 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 与有限普通集合 X，若 $\overline{F}=F=\phi$，则

$$(X^{\overline{F}},X^F)_{\overline{F}=F=\phi}=X \tag{9}$$

事实上，若 $\overline{F}=F=\phi$，则式(3) $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'|f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}=\alpha$，这里：$\{\alpha'|f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}=\phi$；式(2) $X^-=\{x|x\in X,\overline{f}(x)=u\overline{\in}X,\overline{f}\in\overline{F}\}=\phi$，式(1)成为 $X^{\overline{F}}=X-X^-=X$；则式(6) $\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\beta_i|\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\}=\alpha$，这里：$\{\beta_i|\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\}=\phi$；式(5) $X^+=\{u|u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\}=\phi$，式(4)成为：$X^F=X\cup X^+=X$；或者，若 $\overline{F}=F=\phi$，则 $X^{\overline{F}}=X$ 而且 $X^F=X$，得到式(9)。

式(9)指出：在 $\overline{F}=F=\phi$ 的条件下，P-集合被还原成有限普通集合 X；P-集合 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 回到了有限普通集合 X 的"原点"；换一个说法，若 P-集合 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 就是有限普通集合 X，则 $\overline{F}=F=\phi$。

定理2(P-集合与有限普通集合第二关系定理) 若 $\overline{F}=F=\phi$，则

$$\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)|i\in I,j\in J\}_{\overline{F}=F=\phi}=X \tag{10}$$

式(10)指出：在 $\overline{F}=F=\phi$ 的条件下，每一个 $X_i^{\overline{F}}$ 与每一个 X_j^F 都被还原成有限普通集合 X；或者，$(X_i^{\overline{F}},X_j^F)$ 回到有限普通集合 X 的"原点"，$i\in I,j\in J$。

对式(1)－式(7)，给出1°－4°的说明，这些说明可为认识 P-集合，接收 P-集合概念，提供方便。

1°. 式(3) $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'|f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 与计算机内存储器 $T=T+1$ 的结构相似，在计算机科学领域中，$T=T+1$ 是一个简单、普通的概念，人们对 $T=T+1$ 并不陌生。$T=T+1$ 具有动态特性，式(3)也具有动态特性。式(3)的动态特性是：把 β_1 变成 $f(\beta_1)=\alpha_1'$；α_1' 进入 α 内得到 α_1^F，或者 $\alpha_1^F=\alpha\cup\{f(\beta_1)\}=\alpha\cup\{\alpha_1'\}=\{\alpha,\alpha_1'\}$；令 $\alpha=\alpha_1^F$，把 β_2,β_3 变成 $f(\beta_2)=\alpha_2'$，$f(\beta_3)=\alpha_3'$；α_2',α_3' 进入 α_1^F 内得到 α_2^F，或者 $\alpha_2^F=\alpha\cup\{\alpha_2',\alpha_3'\}=\alpha_1^F\cup\{\alpha_2',\alpha_3'\}=\{\alpha,\alpha_1'\}\cup\{\alpha_2',\alpha_3'\}=\{\alpha,\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'\}$；令 $\alpha=\alpha_2^F$，把 β_4 变成 $f(\beta_4)=\alpha_4'$；α_4' 进入 α_2^F，或者 $\alpha_3^F=\alpha\cup\{\alpha_4'\}=\alpha_2^F\cup\{\alpha_4'\}=(\{\alpha,\alpha_1'\}\cup\{\alpha_2',\alpha_3'\})\cup\{\alpha_4'\}=\{\alpha,\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4'\}$。

以此类推，显然式(3)与结构 $T=T+1$ 相似。如果以"静态"的观点去认识 $T=T+1$，则 $T=T+1$ 不成立，例如：$2\neq2+1$。

2°. 式(2)，式(3)，式(5)，式(6)中的 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$，$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_m\}$ 是元素迁移族[1-6,7-13]，$f\in F,\overline{f}\in\overline{F}$ 是元素迁移[1-6,7-13]。$f\in F$ 的特征是：$u\in U,u\overline{\in}X,f\in F$ 把 u 变成 $f(u)=x'\in X$；或者 $\beta\in V,\beta\overline{\in}\alpha,f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$。$\overline{f}\in\overline{F}$ 的特征是：$x\in X,\overline{f}\in\overline{F}$ 把 x 变成 $\overline{f}(x)=u\overline{\in}X$；或者 $\alpha_i\in\alpha,\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$。显然，元素迁移 $f\in F$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 是函数概念(或者，元素迁移 $f\in F,\overline{f}\in\overline{F}$ 是一个函数，

变换，映射)；在一类应用问题中，$f\in F,\overline{f}\in\overline{F}$ 是人们构造的一个具体函数。

3°. 式(3)：$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 中，$\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 表示被新补充到 α 内的属性构成的集合，$\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 与被补充新属性之前的属性集合 α 满足：$\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}\cap\alpha=\phi$。例如：$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}=\{\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha_3'\}$，$\alpha_k\neq\alpha'_k$，$k=1,2,3$；显然，$\alpha$ 与 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 没有公共元素，因此有 $\alpha\cap\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}=\phi$。有人对式(3)给出这样的结论："因为 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}\subseteq\alpha$，则有 $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}=\alpha$"；这是一个"小儿科"的错误；原因是："评论"是在没有弄清楚式(3)的具体意义的情况下给出的；以什么证据证明 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 是 α 的子集？或者 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}\subseteq\alpha$？如果没有足够的证据说明 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 是 α 的子集；或者 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}\subseteq\alpha$。结论："因为 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}\subseteq\alpha$，则有 $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}=\alpha$"是一个无任何证据的"瞎掰"与"罕见的学术浮躁"。

4°. 式(1)—式(3)中给出这样的概念：X 内被删除部分元素，X 生成内 P-集合 $X^{\overline{F}}$，等价于对 X 的属性集合 α 内补充新的属性，α 生成 α^F，$\alpha\subseteq\alpha^F$。或者，若 α_1^F,α_2^F 分别是 $X_1^{\overline{F}},X_2^{\overline{F}}$ 的属性集合，而且 $\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F$，则有 $X_2^{\overline{F}}\subseteq X_1^{\overline{F}}$。式(3)中的 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$，不是从 X 内被删除的元素构成的集合 X^- 的属性集合；或者，$\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 不是 X^- 的属性集合，X^- 是式(2)。

集合对族 $\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\}$ 存在的理由与证据

给定有限普通集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合。如果在 α 内补充一些属性，同时删除另一些属性，则 α 分别变成 $\alpha_1^F,\alpha_1^{\overline{F}},\alpha_1^F\neq\alpha_1^{\overline{F}},\alpha\subseteq\alpha_1^F,\alpha_1^{\overline{F}}\subseteq\alpha$；由式(1)—式(7)得到 X 的 P-集合$(X_1^{\overline{F}},X_1^F)$。如果再在 α 补充一些属性，同时再在 α 内删除另一些属性，则 α 分别变成 $\alpha_2^F,\alpha_2^{\overline{F}},\alpha_2^F\neq\alpha_2^{\overline{F}},\alpha\subseteq\alpha_2^F,\alpha_2^{\overline{F}}\subseteq\alpha$；由式(1)—式(7)得到 X 的 P-集合$(X_2^{\overline{F}},X_2^F)$；如此等等。这些动态变化的一串集合对$(X_i^{\overline{F}},X_i^F)$构成集合对族式(8)。

P-集合的应用领域

式(1)—式(7)构成的 P-集合式(7)与集合对族式(8)的 P-集合，能够应用到信息系统中诸多应用领域，它们是

- 信息潜藏特性与应用
- 信息记忆特性与应用
- 信息遗传特性与应用
- 信息插入-剔除特性与应用
- 信息变异特性与应用
- 信息重组特性与应用
- 信息内推-外推特性与应用
- 信息恢复特性与应用
- 双信息规律生成特性与应用
- 信息图像隐藏特性与应用
- 信息迭代伪装特性与应用
- 信息过滤-还原特性与应用
- 信息分离-筛选特性与应用
- 信息依赖特性与应用
- 信息规律生成特性与应用
- 信息推理特性与应用
- 信息数据圆特性与应用
- 信息内-外挖掘特性与应用
- 信息融合特性与应用
- 信息规律重组与可辨识特性与应用
- 信息 P-关系特性与应用
- 信息搜索特性与应用
- 信息变换特性与动漫设计应用
- 信息动态特性-投资系统的风险估计与应用
- 信息丢失-补充与新材料的特性发现

在这些研究领域中，"记忆"、"遗传"、"插入-剔除"、"变异"、"重组"取自"遗传学"理论。在这些应用领域中所取得的研究成果，都是原创性的。如果读者理解了式(1)—式(7)，或式(8)，把式(1)—式(7)，或式(8)交叉，渗透到上面给出的研究领域，将得到一些意想不到的结果，建议读者做些尝试。事实上，把式(1)—式(7)，或式(8)交叉，渗透到上述应用领域，给出研究并不困难。

利用 2 节中的式(1)—式(7)，或式(8)，3，4 节给出信息遗传特性与异常信息辨识-应用的讨论，3，4 节中给出的讨论是 25 个应用领域中之一。3 节中给出信息遗传的基本特征，利用这些基本特征，4 节中给出异常信息辨识-应用。

3 信息遗传度量与信息遗传的基数圆定理

约定 为了方便，又不引起混乱与误解，在 3，4 节的讨论中，2 节中的 $X,X^{\overline{F}},X^F$，分别记作(x)，$(x)^{\overline{F}}$，$(x)^F$；或者$(x)=X$，$(x)^{\overline{F}}=X^{\overline{F}}$，$(x)^F=X^F$。

定义 1 称$(x)=\{x_1,x_2\cdots,x_q\}\subset D$ 是一个信息，$x_i\in(x)$称作(x)的信息元，$i=1,2,\cdots,q$；如果(x)具有属性集合 α，而且

$$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\tag{11}$$

式中，D 是有限信息论域。

定义 2 称$(x)^{\overline{F}}$是(x)的 $\overline{F}$-遗传信息，而且

$$(x)^{\overline{F}}=\{x_1,x_2\cdots,x_p\}\tag{12}$$

如果$(x)^{\overline{F}}$的属性集合 α^F 与(x)的属性集合 α 满足

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\beta_i\mid f(\beta_i)=\alpha_i'\in\alpha,f\in F\}\tag{13}$$

式(13)中的 β_i 满足 $\beta_i\in V,\beta_i\overline{\in}\alpha$，$f\in F$ 把 β_i 变成 $f(\beta_i)=\alpha_i'\in\alpha$；定义 1 与定义 2 中的 q,p 满足 $p\leqslant q$，$p,q\in N^+$。

定义 3 称$(x)^F$ 是(x)的 F-遗传信息，而且 $(x)^F=\{x_1,x_2\cdots,x_r\}$ (14)

如果$(x)^F$ 的属性集合 $\alpha^{\overline{F}}$ 与(x)的属性集合 α 满足

$$\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\alpha_i\mid\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\}\tag{15}$$

式(15)中的 α_i 满足 $\alpha_i\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$；定义 1 与定义 3 中的 q,r 满足 $q\leqslant r$；$q,r\in N^+$。

定义 4 称 $\gamma^{\overline{F}}$ 是$(x)^{\overline{F}}$关于(x)的 $\overline{F}$-遗传度量，简称 $\gamma^{\overline{F}}$ 是$(x)^{\overline{F}}$的 $\overline{F}$-遗传度量，如果

$$\gamma^{\overline{F}}=\mathrm{card}((x)^{\overline{F}})/\mathrm{card}((x))\tag{16}$$

称 γ^F 是$(x)^F$ 关于(x)的 F-遗传度量，简称 γ^F 是$(x)^F$ 的 F-遗传度量，如果

$$\gamma^F=\frac{\mathrm{card}((x)^F)}{\mathrm{card}((x))}\tag{17}$$

式(16)，式(17)中的 card=cardinal number。

定义 5 以 O 为圆心，以 $\gamma=1$ 为半径构成的 O 称作信息

(x)生成的(x)的基数单位圆，简称O是(x)的单位圆。

这里：$\gamma=\mathrm{card}((x))/\mathrm{card}((x))=1$，$\gamma$是$(x)$的自身遗传度量。

这里指出：在式(12)中，$(x)^{\overline{F}}=\{x_1,x_2\cdots,x_p\}\subseteq\{x_1,x_2,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_q\}=(x)$；$(x)$中的部分信息元$x_1,x_2,\cdots,x_p$被遗传；$x_1,x_2,\cdots,x_p$生成$(x)^{\overline{F}}$。在式(14)中，$(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subseteq\{x_1,x_2,\cdots,x_q,x_{q+1},\cdots,x_r\}=(x)^F$；$(x)$中的全部信息元$x_1,x_2,\cdots,x_q$被遗传；$x_1,x_2,\cdots,x_q$生成$(x)^F$。

由定义1—定义5，得到：

命题1 遗传度量$\gamma^*<1$的信息$(x)^*$一定是(x)的一个$\overline{F}$-遗传信息$(x)^{\overline{F}}$，反之亦真。

命题2 遗传度量$\gamma^\circ>1$的信息$(x)^\circ$一定是(x)的一个F-遗传信息$(x)^F$，反之亦真。

命题1、命题2是直接的事实，证明略。

定理3($\overline{F}$-遗传信息的属性差集定理) $(x)^*$是(x)的一个$\overline{F}$-遗传信息的充分必要条件是$(x)^*$的属性集合α^*与(x)的属性集合α满足

$$\alpha^*-\alpha=\nabla\alpha^* \tag{18}$$

式中，$\nabla\alpha^*=\{\alpha_i|\alpha_i\in\alpha^*,\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha^*,\overline{f}\in\overline{F}\}$，$\nabla\alpha^*\neq\phi$。

证明：由定义1和定义2得到：$\overline{F}$-遗传信息$(x)^{\overline{F}}$与信息(x)满足$(x)^{\overline{F}}\subseteq(x)$；或者，$\mathrm{card}((x)^{\overline{F}})\leqslant\mathrm{card}((x))$。1°. 若$(x)^*$是$(x)$的一个$\overline{F}$-遗传信息，则由2节中的式(1)—式(3)，式(11)，式(13)得到：属性集合α^*与属性集合α之间存在属性差集$\nabla\alpha^*=\{\alpha_i|\alpha_i\in\alpha^*,\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha^*,\overline{f}\in\overline{F}\}$；或者，$\alpha^*-\alpha=\{\alpha_i|\alpha_i\in\alpha^*,\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha^*,\overline{f}\in\overline{F}\}=\nabla\alpha^*\neq\phi$。2°. 若$\alpha^*-\alpha=\nabla\alpha^*\neq\phi$，则具有$\alpha^*$的信息$(x)^*$与具有$\alpha$的信息$(x)$满足：$(x)^*\subseteq(x)$，由定义2，$(x)^*$是$(x)$的一个$\overline{F}$-遗传信息，而且$(x)^*=(x)^{\overline{F}}$。

定理4(F-遗传信息的属性差集定理) $(x)^\circ$是(x)的一个F-遗传信息的充分必要条件是$(x)^\circ$的属性集合α°与(x)的属性集合α满足

$$\alpha-\alpha^\circ=\Delta\alpha^\circ \tag{19}$$

式中，$\Delta\alpha^\circ=\{\alpha_i|\alpha_i\in\alpha,\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\}$，$\Delta\alpha^\circ\neq\phi$。

证明与定理3类似，证明略。事实上，由2中的式(4)—式(6)，式(11)，式(15)直接可得到式(19)。

定理5($\overline{F}$-遗传信息的内同心圆定理) $(x)^*$是(x)的一个$\overline{F}$-遗传信息的充分必要条件是$(x)^*$生成的基数圆O^*是(x)生成的单位圆O的内同心圆，而且

$$O^*\sqsubset O \tag{20}$$

式中，用符号"$\sqsubset$"表示O^*被O包围，O^*是以O为圆心，以γ^*为半径，被$(x)^*$生成的基数圆。

证明：令$\gamma=\mathrm{card}((x))/\mathrm{card}((x))$是$(x)$的遗传度量，$\gamma$与式(16)中的$\gamma^{\overline{F}}$满足$\gamma^{\overline{F}}<\gamma$。1°. 若$(x)^*$是$(x)$的一个$\overline{F}$-遗传信息，则由式(16)得到：$\gamma^*\leqslant\gamma$。以$O$为圆心，以$\gamma^*$为半径作圆$O^*$；以$O$为圆心，以$\gamma$为半径作圆$O$，则有$O^*\sqsubset O$，$O^*$是$O$的内同心圆，$O$是单位圆。2°. 若$O^*$是$O$的内同心圆，$O$是单位圆，$O^*\sqsubset O$；$\gamma^*$是$O^*$的半径，$\gamma$是$O$的半径，而且$\gamma^*\leqslant\gamma$，由式(16)得到：$\mathrm{card}((x)^*)\leqslant\mathrm{card}((x))$，或者$(x)^*\subseteq(x)$；由定义2，$(x)^*$是$(x)$的一个$\overline{F}$-遗传信息，$(x)^*=(x)^{\overline{F}}$。

定理6(F-遗传信息的外同心圆定理) $(x)^\circ$是(x)的一个F-遗传信息的充分必要条件是$(x)^\circ$生成的基数圆O°是(x)生成的单位圆O的外同心圆，而且

$$O\sqsubset O^\circ \tag{21}$$

式中，用符号"$\sqsubset$"表示O被O°包围，O°是以O为圆心，以γ°为半径，被$(x)^\circ$生成的基数圆。

证明与定理5类似，证明略。

图2给出基数圆O^*，O°与基数单位圆O的直观表示。

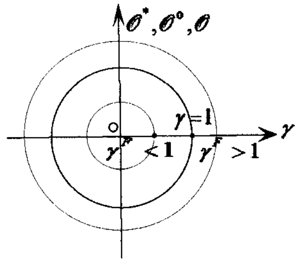

图2 基数圆O^*，O°分别用虚线表示，基数单位圆O用实线表示；O^*在O内，O^*是O的内同心圆；O°在O外，O°是O的外同心圆；$\gamma^{\overline{F}}$，γ^F，γ分别是O^*，O°，O的半径，$\gamma=1$。

定理7(信息剔除与$\overline{F}$-遗传信息生成定理) 若信息$(x)^*$的属性集合α^*与(x)的属性集合α满足

$$\alpha^*-(\alpha\cup\{\beta_i|f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha,f\in F\})=\phi \tag{22}$$

则(x)内的部分信息元被剔除，生成$\overline{F}$-遗传信息$(x)^*$。式中，$\beta_i\in V$，$\beta_i\overline{\in}\alpha$，$f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha$。

证明：式(22)$\alpha^*-(\alpha\cup\{\beta_i|f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha,f\in F\})=\phi$，等价于$\alpha^*=\alpha\cup\{\beta_i|f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha,f\in F\}$，或者，$\alpha\subseteq\alpha^*$，$\mathrm{card}(\alpha)\leqslant\mathrm{card}(\alpha^*)$。由2节中的式(1)—式(3)得到：$(x)^*\subseteq(x)$，$(x)^*$是$(x)$内被剔除部分信息元的生成；由定义1和定义2得到：$(x)^*$是$(x)$的$\overline{F}$-遗传信息，而且$(x)^*=(x)^{\overline{F}}$。

推论1 若$\gamma^*-\gamma\leqslant0$，则具有$\gamma$的信息$(x)$的内部有部分信息元被剔除，$(x)$生成$\overline{F}$-遗传信息$(x)^*$，$(x)^*=(x)^{\overline{F}}$。

定理8(信息插入与F-遗传信息生成定理) 若信息$(x)^\circ$的属性集合α°与(x)的属性集合α满足

$$(\alpha^\circ\cup\{\beta_i|f(\beta_i)=\alpha_i{}'\in\alpha^\circ,f\in F\})-\alpha=\phi \tag{23}$$

则(x)内被插入部分信息元，生成F-遗传信息$(x)^\circ$。

证明：式(23)$(\alpha^\circ\cup\{\beta_i|f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha^\circ,f\in F\})-\alpha=\phi$，等价于$\alpha^\circ\cup\{\beta_i|f(\beta_i)=\alpha'_i\in\alpha^\circ,f\in F\}=\alpha$，或者$\alpha^\circ\subseteq\alpha$，$\mathrm{card}(\alpha^\circ)\leqslant\mathrm{card}(\alpha)$。由2节中的式(4)—式(6)得到：$(x)\subseteq(x)^\circ$，$(x)^\circ$是$(x)$内被插入部分信息元的生成；由定义1和定义3得到：$(x)^\circ$是$(x)$的$F$-遗传信息，而且$(x)^\circ=(x)^F$。

推论2 若$\gamma^\circ-\gamma\geqslant0$，则具有$\gamma$的信息$(x)$的内部被插入部分信息元，$(x)$生成$F$-遗传信息$(x)^\circ$，$(x)^\circ=(x)^F$。

由定义1—定义5，命题1和命题2与定理3—定理8得到：

信息辨识的基数单位圆准则

若任意时刻$t\in T$，信息系统输出的信息$(x)_t$，$(x)_t$生成基数单位圆O_t，则信息$(x)_t$内既无信息元被插入又无信息元被剔除；或者

$$\nabla(x)_t-\Delta(x)_t=\phi \tag{24}$$

式中，$\nabla(x)_t=\{x_1{}',x_2{}',\cdots,x_\lambda{}'\}$是被插入到$(x)_t$内的信息元$x_i{}'$构成的信息；$x_i{}'$被插入$(x)_t$之前，$x_i{}'$满足：$x_i{}'\in U$，$x_i{}'\overline{\in}(x)_t$。$\Delta(x)_t=\{x_{p+1},x_{p+2},\cdots,x_q\}$是$(x)_t$内被剔除的信息元$x_j$构成的信息，$x_j$被剔除之前，$x_j$满足：$x_j\in(x)_t$；$(x)_t=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$。"插入"、"剔除"二词，取自生物学中的"基因，基因变异"中的概念。

利用2节中的P-集合模型和3节中的结果，4节中给出

3 节中结果的应用。

4 信息遗传特征的应用与异常信息状态辨识

为了通俗又便于接受，尽量避开一些过分的"专业概念"给读者带来的不便；在这一节中，给出一个能被一般人接受的例子。山东大学每年都安排博士生导师查体，保证导师们具有健康的身体与充沛的精力培养好博士们，查体的定点医院是：山东省省立医院，山东大学齐鲁医院（原山东省省立二院）。医院给定查体的指标：$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$；$x_1-x_7$ 的繁杂名称，略；它不影响对例子的结果分析。设 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是被查体导师构成的集合；取 $\alpha_i,\alpha_j\in A$；α_i,α_j 查体得到的实际指标（信息元）列入表 1。

表 1 α_i,α_j 的查体指标分布 $i\neq j;i,j\in(1,2,\cdots,n)$

	指标								
α_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
α_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8'	x_9'

这里：医院给定的指标 x_1-x_7，或表 1 中的指标 x_1-x_7 是健康人具有的指标；指标 x_1-x_7 的设定理由是：在查体过程中发现指标异常（异常信息），能够辨识被查体人的状态。若把表 1 中的 α_i 具有的指标（信息元）$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$ 抽象的定义成信息 (x)，则有

$$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\} \tag{25}$$

若把表 1 中的 α_j 具有的指标（信息元）$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x'_8,x'_9$ 抽象的定义成信息 $(x)^*$，则有

$$(x)^*=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x'_8,x'_9\} \tag{26}$$

式中，x_8',x_9' 是 α_j 在查体中新发现的指标（例如，x_8' 是胆结石）。

利用表 1，式(25)与式(26)，3 节中定义 1 和定义 3 得到：$(x)^*$ 是 (x) 的 F-遗传信息，$(x)^*=(x)^F$；利用式(17)得到 $(x)^F$ 的 F-遗传度量 $\gamma^F=\text{card}((x)^F)/\text{card}((x))=1.29>1$；利用定理 6 得到：$(x)$ 生成的基数单位圆 O 与 $(x)^F$ 生成的基数圆 O° 满足 $O\subseteq O^\circ$；或者 O° 是 O 的外同心圆。利用信息辨识的基数单位圆准则得到：α_j 从健康人群中被分辨；或者，$(x)^*$ 的异常信息状态从 (x) 的信息状态中被分辨，或者

$$\text{IDE}\{(x),(x)^*\} \tag{27}$$

式中，IDE＝identification。

事实上，α_i 的指标 x_1-x_7 表明：α_i 属健康状态（信息 (x) 正常状态），α_j 被发现新的指标 x_8',x_9'，α_j 属亚健康状态（信息 $(x)^*$ 是异常状态）；式(24)成为：$\nabla(x)_t-\Delta(x)_t\neq\phi$；或者 $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8',x_9'\}-\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}\neq\phi$。具有异常信息状态的 α_j 被辨识。

这个通俗、简单的例子，稍加引申，可应用到计算机数据传输系统中的数据丢失研究、冗余数据发现研究；还可以引申到信息图像重组与辨识研究中，这些引申是简单的，建议读者做些尝试。

为了加深对 P-集合的应用认识，品味 P-集合；5 节中给出"专业味"浓一点的应用。

5 信息图像的隐匿-潜藏与应用

给定数据集合 y_o^F,y_o^F；α_o^F,α_o^F 分别是 y_o^F,y_o^F 的属性集合，而且

$$y_o^F=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\} \tag{28}$$

$$y_o^F=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\} \tag{29}$$

$$\alpha_o^F=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q\} \tag{30}$$

$$\alpha_o^F=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\} \tag{31}$$

式中，y_o^F,y_o^F 分别是 $(x)_o^F,(x)_o^F$ 的特征值集合（$(x)_o^F,(x)_o^F$ 的元素值集合）；$\forall y_k\in y_o^F$，$\forall y_r\in y_o^F$，$y_k\neq y_r$；$y_k,y_r\in R$；$k,r\in(1,2,\cdots,n)$；$p\leqslant q$，$p,q\in N^+$。

由式(28)，式(29)得到数据点

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n) \tag{32}$$

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n) \tag{33}$$

利用式(34)与式(32)，式(34)与式(33)

$$w(x)=\sum_{j=1}^{n}y_j\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_i}{x_j-x_i} \tag{34}$$

得到

$$w(x)_o^F=\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_{n-2}x^{n-2}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_o \tag{35}$$

$$w(x)_o^F=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_o \tag{36}$$

式中，式(35)是式(34)与式(32)生成的多项式（曲线）；式(36)是式(34)与式(33)生成的多项式（曲线）；$w(x)_o^F\leqslant w(x)_o^F$。

若 $w(a)_o^F=w(a)_o^F=\eta$，$w(b)_o^F=w(b)_o^F=\rho$，则得到一个封闭的二维图形：$O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$；图 3 给出 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 的直观表示。

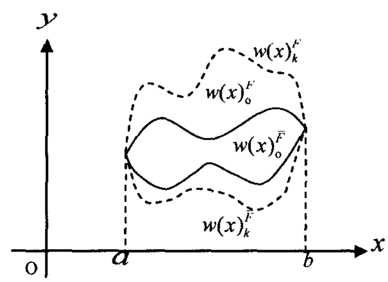

图 3 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 是由 $\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F$ 构成的一个二维图像，$O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 用实线表示；$w(x)_o^F$ 与 $w(x)_o^F$ 是 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 的两条曲线边界。$O^*(\alpha,w(x)_k^F,b,w(x)_k^F)$ 是 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 的假图像，$O^*(\alpha,w(x)_k^F,b,w(x)_k^F)$ 用虚线表示。

显然，若把图 3 中由点 $x=\alpha$，曲线 $w(x)_o^F$，点 $x=b$，曲线 $w(x)_o^F$ 构成的封闭二维图形 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 定义成某个真实信息图像的一个子图像，则找到了 P-集合在信息图像（计算机图像）生成与应用的结合点；或者，P-集合能够交叉，渗透到信息图像生成-辨识研究中。

如果 A 把子图像 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 传递给 B，则 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 在传递中会被他人攻击，截获，篡改；换句话说，$O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 的安全受到威胁。我们是否可以这样做：把 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 变成一个假图像 $O^*(\alpha,w(x)_k^F,b,w(x)_k^F)$；A 把假图像 $O^*(\alpha,w(x)_k^F,b,w(x)_k^F)$ 传递给 B，达到"以假乱真"的目的，又能使真图像 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 在传递中获得安全；B 又能从假图像 $O^*(\alpha,w(x)_k^F,b,w(x)_k^F)$ 中容易地获取真图像 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$？显然，这是容易的。

事实上，把真图像 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 变成假图像 $O^*(\alpha,w(x)_k^F,b,w(x)_k^F)$ 的本质是把真图像 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$ 隐匿-潜藏在假图像 $O^*(\alpha,w(x)_k^F,b,w(x)_k^F)$ 中；得到假图像 $O^*(\alpha,w(x)_k^F,b,w(x)_k^F)$ 后，再把假图像 $O^*(\alpha,w(x)_k^F,b,w(x)_k^F)$ 恢复成真图像 $O(\alpha,w(x)_o^F,b,w(x)_o^F)$。

再回到式(28)—式(31)及第2节的式(1)—式(7)中，A，B双方共同对 α_o^F 给予属性补充，由 α_o^F 得到 α_k^F，$\alpha_o^F \subseteq \alpha_k^F$；对 α_o^F 给予属性删除，由 α_o^F 得到 α_k^F，$\alpha_k^F \subseteq \alpha_o^F$，$\alpha_k^F \neq \phi$。被补充的属性、被删除的属性，只有A，B双方知道，不得泄露给他人，则 α_o^F 变成 α_k^F，α_o^F 变成 α_k^F；而且

$$\alpha_k^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{q+\lambda}\} \tag{37}$$

$$\alpha_k^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{p-\epsilon}\} \tag{38}$$

式中，$\lambda, \epsilon \in N^+$。

由式(37)—式(38)，则式(28)中的 y_o^F 和式(29)中的 y_o^F 分别变成 y_k^F，y_k^F，而且

$$y_k^F = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \tag{39}$$

$$y_k^F = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \tag{40}$$

利用式(39)，式(34)；式(40)，式(34)，分别得到

$$w(x)_k^F = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_o \tag{41}$$

$$w(x)_k^F = d_{n-1}x^{n-1} + d_{n-2}x^{n-2} + \cdots + d_1 x + d_o \tag{42}$$

显然，由式(35)，式(41)；式(36)，式(42)分别得到

$$w(x)_k^F \leqslant w(x)_o^F \tag{43}$$

$$w(x)_o^F \leqslant w(x)_k^F \tag{44}$$

若 $w(\alpha)_k^F = w(\alpha)_k^F = \eta$，$w(b)_k^F = w(b)_k^F = \rho$，则得到图像 $O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$，$O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 是 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 的一个假图像。$O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 在图3中用虚线表示。

如果把 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 看作是一张运送武器的战略地图，或军事火力的分布图，则 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 的安全是重要的。如果 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 是水下游动的被打击的目标，则对 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 的辨识是重要的。如果 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 是健康人的体细胞，$O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 是 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 的病变体细胞，则对 $O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 的辨识与病人的及时治疗是重要的。聪明的年轻人，看到这里，或许感到 P-集合的潜在应用价值。

再回到式(28)—式(36)、式(28)—式(38)与式(39)—式(44)的讨论：

A把 $O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 传给B，B只要把补充到 α_o^F 内的属性从 α_o^F 内删除，使得 $\alpha_k^F = \alpha_o^F$；B只要把 α_o^F 内被删除的属性再补充到 α_o^F 内，使得 $\alpha_k^F = \alpha_o^F$，则B从假图像 $O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 中得到真图像 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$。

或许有人说：用穷举方法，可以从假图像 $O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 中获取真图像 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$。应该说，穷举方法是用来证明问题的一个数学方法，在这里使用是无效的，例如：被补充到 α_o^F 内的属性 α_7 = 红色(属性)，用穷举方法如何知道 α_7 是"颜色"而不是"数值"。

利用式(28)—式(44)的简短讨论，直接得到命题3、命题4。

命题3 真图像 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 的假图像 $O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 存在，非唯一。

命题4 真图像 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 隐匿-潜藏在假图像 $O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 内。

定理9(信息图像分辨定理) 若 $O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)$ 是 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 的一个生成，则

$$\mathrm{IDE}\{O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F), O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F)\} \tag{45}$$

定理10(信息图像隐匿-潜藏定理) 给定数对 (μ_*^F, μ_*^F)，具有数对 (μ_*^F, μ_*^F) 的图像 $O^*(\alpha, w(x)_*^F, b, w(x)_*^F)$ 内隐匿-潜藏着图像 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$，$O^*(\alpha, w(x)_*^F, b, w(x)_*^F)$ 是 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 的一个假图像。

其中，$\mu_*^F = \mathrm{card}(\alpha_*^F)/\mathrm{card}(\alpha_o^F)$，$\mu_*^F = \mathrm{card}(\alpha_*^F)/\mathrm{card}(\alpha_o^F)$；$\mu_*^F$ 是 $w(x)_o^F$ 关于 $w(x)_*^F$ 的隐匿-潜藏系数，μ_*^F 是 $w(x)_o^F$ 关于 $w(x)_*^F$ 的隐匿-潜藏系数，$\mu_*^F \leqslant 1$，$\mu_*^F \geqslant 1$。

定理10的证明留给读者。

定理11(信息图像恢复定理) 假图像 $O^*(\alpha, w(x)_*^F, b, w(x)_*^F)$ 被恢复成真图像 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 的充分必要条件是

$$1 - \mu_*^F = 0 \tag{46}$$

$$\mu_*^F - 1 = 0 \tag{47}$$

式中，$1 = \mathrm{card}(\alpha_o^F)/\mathrm{card}(\alpha_o^F) = \mathrm{card}(\alpha_o^F)/\mathrm{card}(\alpha_o^F)$。

定理12(信息图像不可辨识定理) 若 $O^*(\alpha, w(x)_*^F, b, w(x)_*^F)$ 是 $O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)$ 的恢复，则

$$\mathrm{UNI}\{O^*(\alpha, w(x)_k^F, b, w(x)_k^F), O(\alpha, w(x)_o^F, b, w(x)_o^F)\} \tag{48}$$

式中，UNI=unidentification。

定理11和定理12的证明是直接的，证明略。

应当指出：

1°. 本节的例子，只给出信息图像生成和信息图像的隐匿-潜藏，没给出具体的数据(式(28)中的 y_o^F，式(29)中的 y_o^F)；对于应用具体的数据去做图像隐匿-潜藏，留给读者。

2°. 信息图像的生成、信息图像的隐匿-潜藏方式很多，本节中只给出多种方式的一种。

3°. 如果把信息安全算法(椭圆曲线[11,12,16-18])与信息图像隐匿-潜藏进行交叉，渗透，能够得到一些更新的结果，建议读者试一试。

6 P-集合存在的事实与背景

一个概念

凡是具有数学基本常识的人都能接受这个概念：给定有限普通集合 A, B；若 $A \subset B$，$B \subset A$，则 $A = B$。

从这个概念的正面得到：1°. A, B 中对应元素相同；2°. A, B 中元素个数相等(或者 $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$)；3°. A, B 的名称相同，则有 $A = B$。从这个概念的反面得到：1*. A, B 中对应元素不相同；2*. A, B 中元素个数不相等(或者 $\mathrm{card}(A) \neq \mathrm{card}(B)$)；3*. A, B 的名称不相同，则有 $A \neq B$。以名称为例：$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_5\}$ 是5头猪的集合；或者，A 的名称是"猪的集合"。$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_5\}$ 是5个人的集合；或者 B 得名称是"人的集合"；显然，$A \neq B$。

两个事实

事实1 中国河南省有一个城市，城市的名称是"驻马店市"。该市有800万人口。因为800万人中每个人都具有"驻马店市户籍 α(属性 α)"，则有集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{800}\}$；或者集合 X 的名称是"驻马店市"。随着市场经济的发展，该市有2万人离开这个城市，去其它城市务工，2万人注销了"驻马店市"的户籍，获得了其它城市的户籍，则集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{800}\}$ 变成集合 $X' = \{x_1, x_2, \cdots, x_{798}\}$；利用集合相等的概念，则有 $X' \neq X$。因为 $X' \neq X$，利用1°, 2°, 3°与1*, 2*, 3*；"驻马店市"应当改变名称："驻马店市"改为"驻驴店市"。因为支

援其它兄弟城市的经济建设，山东省的1万名专业技术人才来到“驻马店市”工作，并获得“驻马店市户籍”，则集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_{800}\}$ 变成集合 $X''=\{x_1,x_2,\cdots,x_{801}\}$；利用集合相等的概念，则有 $X''\neq X$。因为 $X''\neq X$，利用 $1°,2°,3°$ 与 $1^*,2^*,3^*$；“驻马店市”应当改变名称：“驻马店市”改为“驻牛店市”。显然，这是违背事实的。事实上，无论从“驻马店市”调出多少人，无论“驻马店市”从外地引进多少人，“驻马店市”的名称并没有改变。这个事实向 $1°,2°,3°$ 与 $1^*,2^*,3^*$ 提出挑战；或者，事实1向具有静态特性的有限普通集合概念提出挑战。

事实2　重庆市火车站内的旅客 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，因为他们当中每个人手中具有共同的特征（属性）$\alpha=$ 火车票；$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 构成旅客集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$；现在要问：旅客集合 X 是不是我们在教科书：“数学分析”、“实变函数论”、“高等数学”、“离散数学”中的集合概念？若集合旅客 X 是这些教科书中的集合概念，则我们得到：1°. 旅客集合 X 中的任意一位旅客，在火车到来时不准上火车；2°. 具有车票的新旅客，不准进火车站的候车室内候车，准备上火车。因此，旅客集合 X，已不是我们在上述教科书中接受的集合概念。旅客集合 X 具有了动态特性：集合 X 在缩小（一部分旅客乘上火车走了），集合 X 在扩大（一些新旅客进入候车室内候车）。我们从上述教科书中的集合概念得到：给定有限集合 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$，集合 Y 的特征是：Y 内的元素 y_i 不准离开 Y，或者 $y_i\overline{\in}Y$；Y 外的元素 u_j 不准进入 Y 内，或者 $u_j\in Y$；集合 Y 具有静态特性。事实2向具有静态特性的有限普通集合概念提出挑战。

从事实1、事实2中不难看到：对有限普通集合概念（经典有限集合）的研究，还有一块很大的空间，这块空间还未被我们认识-开发，空间中隐藏着多少还未被我们认识的东西，这些东西等待着聪明的年轻人去“挖掘”。两个事实是纯真、确凿的；这两个事实却在经典数学中被回避，被遗忘；不能不使人们感到：有限普通集合概念中，存在某些“缺失”。或许有人对这两个事实不屑一顾；或者，对这两个事实不认账，只能说明该人的“愚蠢与僵化”。

面对两个事实，应当改进有限普通集合 X 的概念（有限经典集合 X 概念）；2008年，作者把动态特性引入到有限普通集合 X 中，提出 P-集合概念（Packet sets），给出 P-集合的结构式(1)—式(7)，式(8)；因为事实1,2中的集合都具有一个共同特征“动态性”。文献[1-6]给出了 P-集合的多个特性与应用。聪明的读者，从阅读文献[1-6]（还有一些待发表的论文）中看到：P-集合中潜在着很好的应用前景，特别是在计算机科学、信息科学与信息系统中。或许有人对原创性的研究：P-集合不接受，不理解；这是科学研究中的常事，原因是：这个人不具有动态思维能力，而具有科学研究的“学术惰性”。

7　*P*-集合的本质与特征

给定有限普通集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，集合 X 具有1°.“精确性”，2°.“边界确定性”，3°.“静态性”。例如：$A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5\}$，$A$ 中有且只有5个元素，多一个元素或者少一个元素都不可以，集合 A 具有“精确性”。$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ 是4个男人构成的集合，B 内没有一个女人，集合 B 具有“边界确定性”。$C=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\}$ 具有5个元素，不允许 C 内的元素 c_k 离开 C；或者，不允许 $c_k\overline{\in}C$；不允许 C 外的元素 d_i 进入 C 内；或者 $d_i\in C$，集合 C 具有“静态性”。特性 $1°,2°,3°$ 潜藏在有限普通集合 X 内。

1965年，美国人 L. A. Zadeh 用“边界不确定性”代替有限普通集合 X 的“边界确定性”，提出模糊集合（Fuzzy Sets）[14]，给出模糊集合的结构

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: X\to[0,1]$$

$$x\to\mu_{\underset{\sim}{A}}^{(x)} \tag{49}$$

例如，“老年人”集合 $\underset{\sim}{A}$，多少岁算作老年人？若65岁算作老年人，61岁算不算老年人？“老年人”集合 $\underset{\sim}{A}$ 的边界不确定。在 L. A. Zadeh 模糊集中，用 $\mu_{\underset{\sim}{A}}^{(x)}\in(0,1)$ 来描述集合的边界不确定性。这个事实早已被模糊集研究的学者接受。仔细解读 L. A. Zadeh 的原创性学术论文[14]，品味 L. A. Zadeh 的学术思想，不难得到这个结论。然而，在 L. A. Zadeh 的原创性学术论文与能见到的模糊集论文中，没有给出如此直接的讨论。

1982年，波兰人 Z. Pawlak 用“近似性”代替有限普通集合 X 的“精确性”，提出粗集合（Rough sets）[15]，给出粗集合的结构

$$(R_-(X),R^-(X)) \tag{50}$$

用 $X\subset U$ 的下近似 $R_-(X)$ 与 $X\subset U$ 的上近似 $R^-(X)$，共同近似逼近有限普通集合 $X\subset U$（经典有限普通集合 X）。这个事实早已被粗集理论与应用学者接受。仔细解读 Z. Pawlak 的原创性学术论文[15]，品味 Z. Pawlak 的学术思想，不难得到这个结论。然而，在 Z. Pawlak 原创性的学术论文与能见到的粗集论文中，没有给出如此直接的讨论。

2008年，史开泉用“动态性”代替有限普通集合 X 的“静态性”，提出 P-集合（Packet sets）[1,2]，给出 P-集合的结构

$$(X^F,X^{\bar{F}}) \tag{51}$$

$$\{(X_i^F,X_j^{\bar{F}})\mid i\in I,j\in J\} \tag{52}$$

从式(49)—式(52)中容易看到：有限普通集合 $X\subset U$ 中还潜藏着这样一些新鲜的东西。模糊集合、粗集合、P-集合在工程的多个应用领域中得到应用。早在上个世纪70年代初，模糊集合遇到某些“学术权威”们的质疑与反对；时至今日，质疑与反对之声已荡然无存，因为模糊集理论解决了众多经典集不能解决的应用问题，这些重要的工程应用成果回答了这些“学术权威”们。看来，某些“学术权威”们在新的学术思想面前也表现得“苍白无力”。事实上，一个新的学术思想、新的数学结构没有被人提出反对，反而是不正常的。任何一个新的学术思想与学术研究都是在一条弯弯曲曲的路上，才能“长大成人”的。式(49)—式(52)的讨论，或许有人说：“这是夸大”；作者认为：这只是某人的个人偏见；或许这个人只知道模糊集合、粗集合、P-集合的名词而已；对模糊集合、粗集合、P-集合没有去做深入的应用研究，更拿不出像样的研究成果，去启迪年轻的一代；或许这个人只知道模糊集合、粗集合、P-集合的一点“皮毛概念”，才给出这样“评论”，这样的人在学术界“屡见不鲜”。式(49)—式(52)给出的讨论却是不争的事实。

应当指出：

P-集合是一个集合对：$(X^F,X^{\bar{F}})$；或者，P-集合是一个集合对族：$\{(X_i^F,X_j^{\bar{F}})\mid i\in I,j\in J\}$。Z. Pawlak 粗集是一个集合对：$(R_-(X),R^-(X))$。在未弄清楚 P-集合的结构与特征及 Z. Pawlak 粗集的结构与特征的情况下，有人认为：P-集合就

是 Z. Pawlak 粗集，这是一个误解。如果把式(49)—式(52)的讨论理解透了，这个误解自然会消除。

事实上，P-集合的本质是"动态性"，Z. Pawlak 粗集的本质是"近似性"，显然，"动态"≠"近似"。P-集合仍然保持着有限普通集合的"精确性"、"边界确定性"；Z. Pawlak 粗集仍然保持着有限普通集合的"边界确定性"、"静态性"。因为 P-集合具有动态性，P-集合是一串集合对构成的集合对族：$\{(X_i^{\bar{F}}, X_j^{F}) \mid i\in I, j\in J\}$；因为 Z. Pawlak 粗集具有静态性，Z. Pawlak 粗集仅是一个集合对：$(R_-(X), R^-(X))$。因此，P-集合与 Z. Pawlak 粗集在概念上不存在任何联系，它们是各自独立的数学概念与数学结构；P-集合与 Z. Pawlak 粗集之间不存在相互替代关系。

从式(49)—式(52)给出讨论，容易得到：在一定的条件下，L. A. Zadeh 模糊集合能够回到普通集合的"原点"；在一定的条件下，Z. Pawlak 粗集能够回到普通集合的"原点"；在一定的条件下，P-集合能够回到普通集合的"原点"(见第 2 节的定理 1 和定理 2)。

8 讨论与建议

再回到本文的第 2 节中：给定有限普通集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合。若在 α 内补充有限个属性，则 α 变成 α^F，$\alpha\subseteq\alpha^F$；X 变成 X^F，$X^F\subseteq X$，$X^F\neq\phi$。若在 α 内删除有限个属性，则 α 变成 $\alpha^{\bar{F}}$，$\alpha^{\bar{F}}\subseteq\alpha$；$X$ 变成 $X^{\bar{F}}$，$X\subseteq X^{\bar{F}}$。这个过程使得具有静态特性的有限普通集合 X 具有了动态特征(例如，第 6 节中的重庆市火车站旅客集合 X)。从这里我们得到一个道理：有限普通集合 X 的属性集合 α 的变化(α 内属性个数增多，α 内属性个数减少)，或者 α 的量的变化，引起有限普通集合 X 质的变化：单个的集合 X 变成一个集合对$(X^F, X^{\bar{F}})$。因此，把动态特性引入到有限普通集合 X 中，改进有限普通集合 X，提出 P-集合，遵守了哲学中的"量变到质变"的哲学规律。事实上，P-集合是把多个事实给予抽象而得到的一个数学概念与数学结构。正是这个数学概念与数学结构，给人们认识动态信息目标、动态信息系统，提供了一个新的视觉尺度、新的分析工具与方法。

我们遇到更多的问题：动态信息系统、运动着的图像目标(目标的形状随时变化)、动态变化的数据系统(数据库的刷新与补充)，等；这些问题的共性是"动态性"。P-集合的特征是"动态性"，显然，把 P-集合作为一个工具，应用到这些问题研究中，P-集合能给予理论支持。我们能够说：P-集合将成为研究动态信息系统的一个新的数学模型与新的数学方法。本文给出了 25 个研究分支，这些分支都与 P-集合有关系。作者建议：如果年轻的学者们对此感兴趣，在理解与接收 P-集合结构的条件下，不妨对这些分支做些探讨与尝试，作者认为：能够得到一些原创性的结果，这些结果是令人高兴的。或者把已有的其它模型与 P-集合交叉，渗透，能得到一些更重要的结果，作者祈盼着这些优秀的研究问世；作者感到欣慰与高兴。如果想在 P-集合领域中做些工作，用 E-mail：shikq@sdu.edu.cn 进行讨论。

再回到本文的第 7 节中：在一般人看来，有限普通集合(或者普通集合)还有什么可研究？事实并非如此。模糊集合是从普通集合中走出来的，粗集合是从普通集合中走出来的，P-集合也是从普通集合中走出来的。因为普通集合的概念能解决的问题太有限了，逼迫着人们回过头来重新认识普通集合的概念，寻找普通集合概念中的"漏洞"，这些"漏洞"催生了新数学概念与新数学结构的发育-成长。第 7 节中给出讨论的目的：启迪优秀的年轻人，学会看问题，想问题；提升自己的创造力。事实上，第 7 节中的讨论可用一句话概括，亦即"人类的认识不会停留在一个水平上"；聪明的年轻一代，或许能从第 7 节中得到的更多，一些开创性的研究都潜藏在这些"更多"之中。

参考文献

[1] Shi Kaiquan. P-sets and its applications[J]. An Internat-ional Journal Advances in Systems Science and Applications, 2009, 9(2): 209-219

[2] 史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报：理学版，2008，43(11)：77-84

[3] 史开泉，张丽. 内 P-集合与数据外-恢复[J]. 山东大学学报：理学版，2009，44(4)：8-14

[4] 汤积华，陈保会，史开泉. P-集合与$(\bar{F}, F)$-数据生成-辨识[J]. 山东大学学报：理学版，2009，44(11)：83-92

[5] 于秀清. P-集合的辨识与筛选[J]. 山东大学学报：理学版，2010，45(1)：94-98

[6] 张飞，陈萍，张丽. P-集合的 P-分离与应用[J]. 山东大学学报：理学版，2010，45(3)：83-92

[7] Shi Kaiquan, et al. One direction S-roughsets[J]. Inter-national Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 13(2): 319-334

[8] Shi Kaiquan. Two direction S-rough sets[J]. Internatio-nal Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 13(2): 335-349

[9] 史开泉，姚炳学. 函数 S-粗集与规律辨识[J]. 中国科学 E：信息科学，2008，38(4)：553-564

[10] Shi Kaiquan, Yao Bingxue. Function S-rough sets andlaw identification[J]. Science in China F: Information Sciences, 2008, 51(5): 499-510

[11] 史开泉，赵建立. 函数 S-粗集与隐藏规律安全-认证[J]. 中国科学 E：信息科学，2008，38(8)：1234-1243

[12] Shi Kaiquan, Zhao Jianli. Function S-rough sets and security-authentication of hiding law[J]. Science in China F: Information Sciences, 2008, 51(7): 924-935

[13] 史开泉，姚炳学. 函数 S-粗集与系统规律挖掘[M]. 北京：科学出版社，2007：147-198

[14] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965(8): 338-353

[15] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Co-mputer and Information Sciences, 1982, 32(11): 341-356

[16] 史开泉，崔玉泉. 双枝模糊决策与决策加密-认证[J]. 中国科学 E：技术科学，2003，33(2)：154-163

[17] Shi Kaiquan, Cui Yuquan. Both-branch fuzzy decisionand decision encryption-authentification [J]. Science inChina F: Information Science, 2003, 46(2): 90-103

[18] Koblitz N. Elliptic curve cryptosystems [J]. Mathematics of Computation, 1987(17): 203-209