

Einstein 谜的 SAT 求解

田 聪^{1,2} 段振华¹ 王小兵¹

(西安电子科技大学计算理论与技术研究所 西安 710071)¹

(武汉大学软件工程重点实验室 武汉 430072)²

摘 要 Einstein 谜,亦称 Zebra 谜,是爱因斯坦在 20 世纪初提出的,他说世界上有 98% 的人答不出来。该问题是一个典型的逻辑推理题,可以通过 SAT 求解给出问题的答案。现将 Einstein 谜转换成 SAT 求解问题,并使用当前流行的 SAT 求解器,如 MinSat,对 Einstein 谜进行自动求解。

关键词 Einstein 谜,命题逻辑,可满足性,验证,形式化方法

中图法分类号 TP301 **文献标识码** A

Solving Einstein's Puzzle with SAT

TIAN Cong^{1,2} DUAN Zhen-hua¹ WANG Xiao-bing¹

(Institute of Computing Theory and Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)¹

(State Key Laboratory of Software Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China)²

Abstract Einstein Puzzle, or Zebra Puzzle, is a widely known riddle given by Einstein in the early 20th century. He said 98% people in the world cannot solve this riddle. The question is a typical logical question which can be formalized as a SAT problem. We investigated how to solve the riddle by SAT. And then the currently popular SAT solvers, such as MinSat, was employed in solving this riddle automatically.

Keywords Einstein's puzzle, Propositional logic, SAT, Verification, Formal methods

Einstein 谜,亦称 Zebra 谜,是爱因斯坦在 20 世纪初提出的一个谜题^[2],他说世界上有 98% 的人答不出来。该问题的陈述如下:在一条街上,有 5 座房子,喷了 5 种颜色,每个房里住着不同国籍的人,每个人喝不同的饮料,抽不同品牌的香烟,养不同的宠物,另外还有以下 15 个已知条件:

- 1) 英国人住红色房子;
- 2) 瑞典人养狗;
- 3) 丹麦人喝茶;
- 4) 绿色房子在白色房子左面;
- 5) 绿色房子主人喝咖啡;
- 6) 抽 Pall Mall 香烟的人养鸟;
- 7) 黄色房子主人抽 Dunhill 香烟;
- 8) 挪威人住第一间房;
- 9) 住在中间房子的人喝牛奶;
- 10) 抽 Blends 香烟的人住在养猫的人隔壁;
- 11) 养马的人住抽 Dunhill 香烟的人隔壁;
- 12) 抽 Blue Master 的人喝啤酒;
- 13) 德国人抽 Prince 香烟;
- 14) 挪威人住蓝色房子隔壁;
- 15) 抽 Blends 香烟的人有一个喝水的邻居。

问题是:谁养鱼?

该问题是一个典型的逻辑推理题^[1],可以通过已知的约

束不断地推断出未知的结果。显然,通过人工的逻辑推理,可以得到最终的结果。但是,人工推理的过程复杂、易错,且在有多种解的情况下,会变得非常繁杂。本文通过形式化方法,将 Einstein 谜转换成 SAT 求解问题,并可以利用现有的 SAT 求解器,方便地给出问题的所有答案。

1 SAT 及 SAT 求解器

1.1 SAT

SAT 是理论计算机与逻辑学界共同关注的一个重大问题。在现实世界中,很多重要且难以解决的验证和组合问题均可转化成 SAT 问题,因此对它的研究在理论和实践方面都非常有意义。广泛地说,除了命题可满足性外, SAT 还包括量化布尔公式(QBF)、最大可满足性(Max-SAT)、可满足性模块理论(SMT)及其他一些相关的理论,这些都是当前研究的热点。具体地, SAT 问题指的是,给定一个包含 n 个布尔变量(只能为真或假) $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的逻辑析取范式,是否存在它们的一个取值组合,使得该析取范式被满足^[5,6]? 可以用一个具体例子来说明这一问题。假设你要安排一个 1000 人的晚宴,每桌 10 人,共 100 桌。主人给了你一张纸,上面写明其中哪些人因为江湖恩怨不能坐在同一张桌子上,问是否存在一个满足所有这些约束条件的晚宴安排?

1.2 SAT 求解器

投稿日期:2009-06-08 返修日期:2009-09-03 本文受国家自然科学基金重点基金项目(60433010),国家自然科学基金项目(60373103, 60873018),总装 115 预研项目(51315050105),教育部博士点基金(200807010012)以及软件工程国家重点实验室(SKI SE20080713)资助。

田 聪(1982—),女,博士生,CCF 会员,主要研究方向为逻辑、模型理论及验证理论和技术等, E-mail: tico_tools@163.com。

虽然 SAT 问题是一个 NP 完全问题^[1,4],许多优秀的 SAT 求解器的开发,如 MinSat^[3]等,使得 SAT 求解可以完全自动化。使用 MinSat 求解器需先将要求解的公式等价地转换成合取范式(CNF),然后以 DIMACS 的格式表达。

一个 DIMACS 文件总是从 p cnf $\langle variables \rangle \langle clauses \rangle$ 开始,其中 $\langle variables \rangle$ 表示布尔变量的个数, $\langle clauses \rangle$ 表示子句的个数。每个布尔变量必须有一个整数索引,索引从 1 开始。0 表示一个子句的结束。用正整数表示布尔变量,该正整数多对应的负整数表示该布尔变量的非。例如: $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r)$ 的 DIMACS 文件如下:

```
p cnf 3 2
1 -2 0
2 -3 0
```

其中, $p=1, q=2, r=3$ 。

2 Einstein 谜的形式化描述

2.1 谜的形式化描述

一个谜可以被看作一个 $k \times n$ 的矩阵,并被形式化地描述为一个包含 $n2k$ 个布尔变量的 SAT 问题。将布尔变量记为 a_{ijl} ,其中 $1 \leq i \leq k$ 表示属性, $1 \leq j \leq n$ 表示位置,并且 $1 \leq l \leq n$ 表示值。 $a_{ijl} \equiv \text{true}$ 当且仅当矩阵 (i, j) 位置的值为 l ,其含义为:在位置 i ,属性 j 的值为 l 。布尔变量通常应该满足以下的约束关系:

(1) 矩阵中的每个位置有一个介于 1 和 n 之间的值:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \bigwedge_{1 \leq l \leq n} a_{ijl}$$

(2) 矩阵中的每个位置最多只有一个值:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \bigwedge_{1 \leq l \leq n} \bigwedge_{l' \neq l} \neg(a_{ijl} \wedge a_{ijl'})$$

(3) 在每一行每一列的值都不相同:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \bigwedge_{j' \neq j} \bigwedge_{1 \leq l \leq n} \neg(a_{ijl} \wedge a_{ij'l})$$

另外,根据需求的其它已知的约束条件,同理将它们形式化描述为布尔表达式。

2.2 Einstein 谜的形式化描述

在 Einstein 谜中,有 5 个位置($n=5$),即 5 个房子;5 个属性($k=5$),即房子的颜色、主人的国籍、主人抽的香烟、主人养的宠物、主人喝的饮料;每个属性有 5 个值($n=5$),如颜色有红、黄、绿、白、蓝。令:

$H=1, 2, 3, 4, 5$, 分别表示从左到右的 5 个房间;

$A=1, 2, 3, 4, 5$, 分别表示颜色、国籍、宠物、饮料、香烟 5 种性质;

$C=1, 2, 3, 4, 5$, 分别表示红、白、黄、绿、蓝 5 种颜色;

$N=1, 2, 3, 4, 5$, 分别表示英国、德国、丹麦、瑞典、挪威 5 个国家;

$P=1, 2, 3, 4, 5$, 分别表示猫、狗、鸟、马、鱼 5 种宠物;

$D=1, 2, 3, 4, 5$, 分别表示啤酒、牛奶、水、茶、咖啡 5 种饮料;

$S=1, 2, 3, 4, 5$, 分别表示 Pall Mall, Dunhill, Blends, Blue Master, Prince 5 种香烟。所有编码如表 1 所列。

表 1 编码表

编码	1	2	3	4	5
房间(H)	#1	#2	#3	#4	#5
属性(A)	颜色	国籍	宠物	饮料	香烟

颜色(C)	红	白	黄	绿	蓝
国籍(N)	英国	德国	丹麦	瑞典	挪威
宠物(P)	猫	狗	鸟	马	鱼
饮料(D)	啤酒	牛奶	水	茶	咖啡
香烟(S)	Pall Mall	Dunhill	Blends	Blue Master	Prince

因此, Einstein 谜可以表示为 5×5 矩阵,并被形式化描述为包含 $53=125$ 个布尔变量的 SAT 问题。其中,每个变量可表达为 a_{HAV} , $1 \leq H \leq 5, 1 \leq A \leq 5, 1 \leq V \leq 5$,其含义为:第 H 个房子的属性 A 的值为 V ,如 a_{135} 表示第一个房子主人所养的宠物是鱼。于是, Einstein 谜中的一般约束可以描述如下:

(1) 矩阵中的每个位置有一个介于 1 和 5 之间的值:

$$\bigwedge_{1 \leq H \leq 5} \bigwedge_{1 \leq A \leq 5} \bigwedge_{1 \leq V \leq 5} a_{HAV} \quad (1)$$

(2) 矩阵中的每个位置最多只有一个值:

$$\bigwedge_{1 \leq H \leq 5} \bigwedge_{1 \leq A \leq 5} \bigwedge_{1 \leq V \leq 5} \bigwedge_{V' \neq V} \neg(a_{HAV} \wedge a_{HAV'}) \quad (2)$$

(3) 在每一行每一列的值都不相同:

$$\bigwedge_{1 \leq H \leq 5} \bigwedge_{1 \leq H' \leq 5} \bigwedge_{H \neq H'} \bigwedge_{1 \leq A \leq 5} \bigwedge_{1 \leq V \leq 5} \neg(a_{HAV} \wedge a_{H'AV}) \quad (3)$$

此外, 15 条提示可以分别表示如下:

1) 英国人住红色房子:

$$\bigvee_{1 \leq H \leq 5} a_{H11} \quad (4)$$

2) 瑞典人养狗:

$$\bigvee_{1 \leq H \leq 5} (a_{H24} \rightarrow a_{H32}) \quad (5)$$

3) 丹麦人喝茶:

$$\bigvee_{1 \leq H \leq 5} (a_{H24} \rightarrow a_{H44}) \quad (6)$$

4) 绿色房子在白色房子左面:

$$\bigvee_{2 \leq H \leq 5} (a_{H12} \rightarrow a_{H-114}) \quad (7)$$

5) 绿色房子主人喝咖啡:

$$\bigvee_{1 \leq H \leq 5} (a_{H14} \rightarrow a_{H44}) \quad (8)$$

6) 抽 Pall Mall 香烟的人养鸟:

$$\bigvee_{1 \leq H \leq 5} (a_{H51} \rightarrow a_{H33}) \quad (9)$$

7) 黄色房子主人抽 Dunhill 香烟:

$$\bigvee_{1 \leq H \leq 5} (a_{H13} \rightarrow a_{H52}) \quad (10)$$

8) 挪威人住第一间房:

$$a_{125} \quad (11)$$

9) 住在中间房子的人喝牛奶:

$$a_{342} \quad (12)$$

10) 抽 Blends 香烟的人住在养猫的人隔壁:

$$\bigvee_{\substack{1 \leq H \leq 5 \\ H-1 \geq 1 \\ H+1 \leq 5}} (a_{H53} \rightarrow (a_{H-131} \vee a_{H+131})) \quad (13)$$

11) 养马的人住抽 Dunhill 香烟的人隔壁:

$$\bigvee_{\substack{1 \leq H \leq 5 \\ H-1 \geq 1 \\ H+1 \leq 5}} (a_{H34} \rightarrow (a_{H-152} \vee a_{H+152})) \quad (14)$$

12) 抽 Blue Master 的人喝啤酒:

$$\bigvee_{1 \leq H \leq 5} (a_{H54} \rightarrow a_{H41}) \quad (15)$$

13) 德国人抽 Prince 香烟:

$$\bigvee_{1 \leq H \leq 5} (a_{H22} \rightarrow a_{H55}) \quad (16)$$

14) 挪威人住蓝色房子隔壁:

$$\bigvee_{\substack{1 \leq H \leq 5 \\ H-1 \geq 1 \\ H+1 \leq 5}} (a_{H24} \rightarrow (a_{H-115} \vee a_{H+115})) \quad (17)$$

15) 抽 Blends 香烟的人有一个喝水的邻居:

$$\bigvee_{\substack{1 \leq H \leq 5 \\ H-1 \geq 1 \\ H+1 \leq 5}} (a_{H53} \rightarrow (a_{H-143} \vee a_{H+143})) \quad (18)$$

因此, Einstein 谜可以表达为:

$$(1) \wedge (2) \wedge \dots \wedge (17) \wedge (18) \quad (19)$$

求谁养鱼即求满足式(19)的解。由于满足式(19)的解不一定唯一, 因此可能存在着多种可能性的解。

3 基于 MinSat 的求解

使用 MinSat 求解器需先将要求解的公式等价地转换成合取范式(CNF), 然后以 DIMACS 的格式表达。为了将公式表达成 DIMACS 格式, 先对公式中所涉及的布尔变量定义索引, 如表 2 所列。

表 2 布尔变量索引的定义

房间	颜色	索引	国籍	索引	宠物	索引	饮料	索引	香烟	索引
#1	a111	1	a121	26	a131	51	a141	76	a151	101
	a112	2	a122	27	a132	52	a142	77	a152	102
	a113	3	a123	28	a133	53	a143	78	a153	103
	a114	4	a124	29	a134	54	a144	79	a154	104
	a115	5	a125	30	a135	55	a145	80	a155	105
#2	a211	6	a221	31	a231	56	a241	81	a251	106
	a212	7	a222	32	a232	57	a242	82	a252	107
	a213	8	a223	33	a233	58	a243	83	a253	108
	a214	9	a224	34	a234	59	a244	84	a254	109
	a215	10	a225	35	a235	60	a245	85	a255	110
#3	a311	11	a321	36	a331	61	a341	86	a351	111
	a312	12	a322	37	a332	62	a342	87	a352	112
	a313	13	a323	38	a333	63	a343	88	a353	113
	a314	14	a324	39	a334	64	a344	89	a354	114
	a315	15	a325	40	a335	65	a345	90	a355	115
#4	a411	16	a421	41	a431	66	a441	91	a451	116
	a412	17	a422	42	a432	67	a442	92	a452	117
	a413	18	a423	43	a433	68	a443	93	a453	118
	a414	19	a424	44	a434	69	a444	94	a454	119
	a415	20	a425	45	a435	70	a445	95	a455	120
#5	a511	21	a521	46	a531	71	a541	96	a551	121
	a512	22	a522	47	a532	72	a542	97	a552	122
	a513	23	a523	48	a533	73	a543	98	a553	123
	a514	24	a524	49	a534	74	a544	99	a554	124
	a515	25	a525	50	a535	75	a545	100	a555	125

根据索引的定义, 一个 CNF 公式很容易写成 DIMACS 格式。经过 MiniSat 的执行得到唯一的结果:

$$a_{113}=1, a_{125}=1, a_{131}=1, a_{143}=1, a_{152}=1,$$

$$a_{215}=1, a_{223}=1, a_{234}=1, a_{244}=1, a_{253}=1,$$

$$a_{311}=1, a_{321}=1, a_{333}=1, a_{342}=1, a_{351}=1,$$

$$a_{414}=1, a_{422}=1, a_{435}=1, a_{445}=1, a_{455}=1,$$

$$a_{512}=1, a_{524}=1, a_{532}=1, a_{541}=1, a_{554}=1$$

根据表 1, 得知 Einstein 谜的解为德国人养鱼, 如表 3 所列。

表 3 Einstein 谜的结果

	房间 #1	房间 #2	房间 #3	房间 #4	房间 #5
颜色	黄	蓝	红	绿	白
国籍	挪威	丹麦	英国	[REDACTED]	瑞典
宠物	猫	马	鸟		狗
饮料	水	茶	牛奶		咖啡
香烟	Dunhill	Blend	Pall Mall	Prince	Blue master

结束语 通过将 Einstein 谜转换为 SAT 求解问题, 可以将复杂的逻辑推理题转换成命题逻辑的 SAT 问题, 并通过 SAT 求解器自动解答问题。这一结论体现了现实生活中的复杂问题可以通过成熟的逻辑、数学理论和方法严格求解。

参考文献

(上接第 150 页)

- [4] Xu Jianliang, Tang Xueyan, Lee Wang-Chien. Time-critical on-demand data broadcast; algorithms, analysis, and performance evaluation[J]. IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst., 2006, 17(1): 3-14
- [5] Chung Y D, Kim M-H. QEM; a scheduling method for wireless broadcast data[C]//Proceedings of DASFAA. 1999
- [6] Chehadeh Y C, Hurson A R, Kavehrad M. Object organization on a single broadcast channel in the mobile computing environment[J]. Multimedia Tools and Applications, 1999, 9(1): 69-94
- [7] Lee Victor C S, Wu Xiao Joseph, Ng Kee-Yin. Sheduling real-time requests in on-demand data broadcast environments[J]. Real-Time Systems, 2006, 34(2): 83-99
- [8] Wang Hongya, Ning Guoqin, Li Guohui, et al. Mobile Real-time Read-only Transaction Processing in Broadcast Disks[J]. Journal of Information Science and Engineering, 2006, 22(5): 1249-1264
- [9] Si A, Leong H V. Query optimization for broadcast database [J]. Data and Knowledge Eng., 1999, 29(3): 351-380
- [10] Chung Yu-Chi, Chen Chao-Chun, Lee Chiang. Design and performance evaluation of broadcast algorithms for time-constrained data retrieval[J]. IEEE Trans. Knowl. Data Eng., 2006, 18(11): 1526-1543
- [11] Acharya S, Franklin M, Zdonik S. Broadcast disks; data management for asymmetric communication environments[C]//Proceedings of ACM SIGMOD. 1995
- [12] Acharya S, Franklin M, Zdonik S. Disseminating updates on broadcast disks[C]//Proceedings of VLDB. 1996
- [13] Acharya S, Franklin M, Zdonik S. Balancing push and pull for data broadcast[C]//Proceedings of ACM SIGMOD. 1997
- [14] Acharya S, Franklin M, Zdonik S. Balancing push and pull for data broadcast[C]//Proceedings of ACM SIGMOD. 1997
- [15] Huang Jiun-Long, Chen Ming-Syan, Peng Wen-Chih. Broadcasting Dependent Data for Ordered Queries Without Replication in a Multi-channel Mobile Environment[C]//Proceedings of ICDE. 2003