基于Vague双向近似推理的系统决策方法

张倩生 蒋盛益
(广东外语外贸大学信息科学技术学院 广州 510420)

摘 要 先提出Vague值间的一种新的相似度，并基于有序加权聚类(OWA)算子给出Vague集间的新的加权相似测度，其中的权重是由决策者根据实际决策需求来确定的，具有一定的弹性；另外通过Vague输入事实与Vague决策规则的前件(或后件)之间的相似匹配度，得到一个简单可行的双向近似推理方法，这可为复杂环境下的系统决策(如工业检测和医疗诊断等领域问题)提供有效的支持工具。

关键词 Vague集，加权相似测度，有序加权聚类(OWA)算子，双向近似推理，Vague决策
中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

System Decision Making Method Based on Vague Bidirectional Approximate Reasoning

ZHANG Qian-sheng JIANG Sheng-yi
(School of Informatics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou 510420, China)

Abstract A similarity degree of vague value was firstly proposed, then a new weighted similarity measure of vague sets was given based on OWA operator, in which the weights were produced according to the requirement of decision maker. Finally, a simple bidirectional vague reasoning method for vague decision system was put forward on the basis of similarity measure between vague fact and the antecedent (or consequent) portion of vague rule. The presented method is very flexible and feasible, which provides a powerful tool for dealing with vague decision making problems in complex enviroment such as industry inspection and medical diagnosis systems.

Keywords Vague set, Weighted similarity measure, OWA operator, Bidirectional approximate reasoning, Vague decision

1 引言

自从Zadeh提出模糊集[1]以来，模糊集理论已经在自动控制、系统分析、智能决策[2]等众多领域取得广泛的应用。近年来，很多学者对模糊集作了许多拓展研究。其中区间值模糊集也是先由Zadeh[3]提出的，而后Gorzalczany[4]等人研究了它的一些性质和基于区间值模糊集的近似推理方法。1993年，Gau[5]等人还提出了Vague集概念，它作为模糊集的另外一种有用推广，是用一个真隶属度和一个假隶属度来描述的，所以与普通的模糊集只局限于用一个真隶属度来描述相比，其应用更广泛合理些。目前，国内外Li[6]，Chen[7]等人已提出了一些有效的Vague集间的相似度。另外，作者等人在文献[8]中，基于Vague集间的差异度，提出了Vague信息交叉熵概念，并可将其应用于基于Vague集的决策和多属性决策[9,10]以及模式识别中。国内学者虽然也在基于Vague集的推理和加权推理方面有些成果[11,12]，但本文主要针对多条Vague规则生成的决策系统的特点，将Vague近似推理方法与Vague决策相结合起来研究，提出了一个新的基于OWA算子加权相似度的双向近似推理的决策方法。由于OWA算子中的权向量是决策者根据实际决策需求来确定的，因此该方法将具有很大的弹性和合理性。最后还通过一个工业检测和医疗诊断的实际决策例子来阐明我们所提出的基于双向Vague近似推理的Vague决策方法的有效性。由于只使用了一些简单的并、交、数乘运算和模糊矩阵复合运算，因此它要比现有的一些Vague推理与决策方法[11]来得更简单更易操作，而且最大的优点是该方法更适合于处理由多条带可信度和阈值参数的Vague规则生成的决策系统。

2 预备知识

本文令$[I]$表示$[0,1]$中的所有闭子区间构成的集合。

定义1 设$\{[a_t^-,a_t^+]|_{t\in\Gamma}\}\subseteq[I]$，$\Gamma$为一个指标集，则它们之间的并、交运算可定义如下：

(1) $\bigvee_{t\in\Gamma}[a_t^-,a_t^+]=[\bigvee_{t\in\Gamma}a_t^-,\bigvee_{t\in\Gamma}a_t^+]$

(2) $\bigwedge_{t\in\Gamma}[a_t^-,a_t^+]=[\bigwedge_{t\in\Gamma}a_t^-,\bigwedge_{t\in\Gamma}a_t^+]$

定义2 设$[a^-,a^+]\in[I]$，$k\in[0,1]$，则它们之间的一些运算可定义如下：

$k\vee[a^-,a^+]=[k\vee a^-,k\vee a^+]$

$k\wedge[a^-,a^+]=[k\wedge a^-,k\wedge a^+]$

$k[a^-,a^+]=[ka^-,ka^+]$

定义3[13] $[I]$上的一个偏序关系“$\leqslant$”可定义如下：

到稿日期：2009-10-26 返修日期：2009-12-20 本文受国家自然科学基金项目(60673191)，广东省自然科学基金项目(8151042001000005，9151026005000002)，广东省哲学社会科学规划项目(09O-19)，广东高校优秀青年创新人才培育项目资助。

张倩生(1975－)，男，博士，副教授，CCF会员，主要研究方向为不确定系统的近似推理与决策，E-mail：zhqiansh01@126.com；蒋盛益(1963－)，男，博士，教授，主要研究方向为智能决策与数据挖掘方面等。

$[a_1^-, a_1^+] \leqslant [a_2^-, a_2^+] \Leftrightarrow a_1^- \leqslant a_2^-$ 且 $a_1^+ \leqslant a_2^+$

定义 4 论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 上的一个 Vague 集 A 可定义为[14]：

$$A=\{(u_i,[t_A(u_i),1-f_A(u_i)])/u_i\in U\}$$

其中，$t_A(u_i)$ 表示元素 u_i 关于 A 的真隶属度，即 A 支持 u_i 的证据程度；$f_A(u_i)$ 表示元素 u_i 关于 A 的假隶属度，且 $0\leqslant t_A(u_i)+f_A(u_i)\leqslant 1$，$\forall u_i\in U$。

定义 5 设 A 为论域 U 中的 Vague 集，则它的补定义为：

$$A'=\{(u_i,[f_A(u_i),1-t_A(u_i)])/u_i\in U\}$$

3 Vague 集间新的相似度量

为了更方便地描述基于 Vague 集的近似推理，需要先给出 Vague 值间的一个相似度。

定义 6 设 A,B 为论域 U 中的两个 Vague 集，且 $A(u_i)=[t_A(u_i),1-f_A(u_i)]$，$B(u_i)=[t_B(u_i),1-f_B(u_i)]$ 为两个 Vague 值，则它们间的 Hausdorff 度量为：

$$d_H(A(u_i),B(u_i))=|t_A(u_i)-t_B(u_i)|\vee|f_A(u_i)-f_B(u_i)|$$

它们之间的相似匹配度也即可定义为，对 $\forall p\in[1,+\infty)$，

$$M_H^p(A(u_i),B(u_i))=1-[|t_A(u_i)-t_B(u_i)|^p\vee|f_A(u_i)-f_B(u_i)|^p]^{1/p}$$

定理 1 $0\leqslant M_H^p(A(u_i),B(u_i))\leqslant 1$。

定理 2 $M_H^p(A(u_i),B(u_i))=M_H^p(B(u_i),A(u_i))$。

定理 3 $M_H^p(A(u_i),B(u_i))=1$ if $A(u_i)=B(u_i)$。

证明：由定义 6，显然易证得。

定理 4 $M_H^p(A(u_i),B(u_i))=M_H^p(A'(u_i),B'(u_i))$

证明：

$$\begin{aligned}M_H^p(A'(u_i),B'(u_i))&=1-[|f_A(u_i)-f_B(u_i)|^p\vee|t_A(u_i)-t_B(u_i)|^p]^{1/p}\\&=M_H^p(A(u_i),B(u_i))\end{aligned}$$

定理 5 $M_H^p(A(u_i),B(u_i))=0$, if $A(u_i)=[0,0]$, $B(u_i)=[1,1]$; or $A(u_i)=[1,1]$, $B(u_i)=[0,0]$。

证明：若 $A(u_i)=[0,0]$，$B(u_i)=[1,1]$；or $A(u_i)=[1,1]$，$B(u_i)=[0,0]$；则 $t_A(u_i)=0$，$f_A(u_i)=1$，$t_B(u_i)=1$，$f_B(u_i)=0$，or $t_A(u_i)=1$，$f_A(u_i)=0$，$t_B(u_i)=0$，$f_B(u_i)=1$。

$$\begin{aligned}M_H^p(A(u_i),B(u_i))&=1-[|t_A(u_i)-t_B(u_i)|^p\vee|f_A(u_i)-f_B(u_i)|^p]^{1/p}\\&=1-1=0\end{aligned}$$

定理 6 若 $A(u_i)\leqslant B(u_i)\leqslant C(u_i)$，则 $M_H^p(A(u_i),C(u_i))\leqslant M_H^p(A(u_i),B(u_i))\wedge M_H^p(B(u_i),C(u_i))$

因为 $A(u_i)\leqslant B(u_i)\leqslant C(u_i)$，所以 $0\leqslant t_A(u_i)\leqslant t_B(u_i)\leqslant t_C(u_i)\leqslant 1$，$1\geqslant f_A(u_i)\geqslant f_B(u_i)\geqslant f_C(u_i)\geqslant 0$；则 $1\geqslant|t_A(u_i)-t_C(u_i)|^p\geqslant|t_A(u_i)-t_B(u_i)|^p\geqslant 0$，$1\geqslant|f_A(u_i)-f_C(u_i)|^p\geqslant|f_A(u_i)-f_B(u_i)|^p\geqslant 0$。

$$\begin{aligned}M_H^p(A(u_i),C(u_i))&=1-[|t_A(u_i)-t_C(u_i)|^p\vee|f_A(u_i)-f_C(u_i)|^p]^{1/p}\\&\leqslant 1-[|t_A(u_i)-t_B(u_i)|^p\vee|f_A(u_i)-f_B(u_i)|^p]^{1/p}\\&=M_H^p(A(u_i),B(u_i))\end{aligned}$$

同理可得 $M_H^p(A(u_i),C(u_i))\leqslant M_H^p(B(u_i),C(u_i))$。证毕。

故上面定义的 Vague 值间的相似度确是符合一般模糊相似度需遵循的几个公理，所以该定义是恰当的，且计算简单。

据此，给出 Vague 集间的相似度定义如下。

定义 7 设 A,B 为论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 中的两个 Vague 集，且

$$A=\{(u_i,[t_A(u_i),1-f_A(u_i)])/u_i\in U\}$$
$$B=\{(u_i,[t_B(u_i),1-f_B(u_i)])/u_i\in U\}$$

则它们之间的相似度可按如下来计算：

$$S(A,B)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[|t_A(u_i)-t_B(u_i)|^p\vee|f_B(u_i)-f_A(u_i)|^p]^{1/p}$$

若考虑到论域 U 中各元素的权重，还需要给出如下加权相似度的定义。

定义 8 设 $W=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为 U 中元素的权重向量，则 Vague 集 A,B 间的加权相似度可定义为：

$$S(A,B)=1-\sum_{i=1}^{n}\omega_i[|t_A(u_i)-t_B(u_i)|^p\vee|f_B(u_i)-f_A(u_i)|^p]^{1/p}$$

其中，参数 $p\in[1,+\infty)$。

但上面公式中如何确定权重却是个棘手的问题。下面将针对 Vague 集提出一个基于 OWA 算子的加权相似度，其中的权重可通过决策者根据实际决策需求来灵活方便地确定。

定义 9[15] 有序加权聚类算子 OWA：$R^n\rightarrow R$ 可定义为：

$$OWA_W(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}w_ib_i$$

其中，b_i 是 $\{a_i(i=1,2,\cdots,n)\}$ 中第 i 大的数；$W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是有序加权聚类算子的权向量，且 $w_i\in[0,1]$，$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。显然有

$$\min_i(a_i)\leqslant \mathrm{OWA}_W(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant\max_i(a_i)$$

所以，OWA 运算取值的关键是选择合适的加权向量 W。

下面介绍一种可方便确定加权向量 W 的函数。

定义 10 设函数 $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$，满足 (1) $\forall x<y$，有 $f(x)\leqslant f(y)$；(2) $f(0)=0$，$f(1)=1$，则称为基本单位区间单调(BUM)函数。

根据 BUM 函数，决策者可按如下方式获得 OWA 算子的加权向量 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$，其中 $w_i=f(\frac{i}{n})-f(\frac{i-1}{n})$，$(i=1,2,\cdots,n)$。

例如，可取 BUM 函数 $f(x)=x^r(r>0)$，r 的取值可根据决策者的需求来选择。

当 $r>1$，所得权向量 $\{w_i\}|_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是一个单调增序列；

当 $0<r<1$，所得权向量 $\{w_i\}|_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是单调减序列；

当 $r=1$，可算得权 $w_i=\frac{1}{n}$ 是一个常值 $(1\leqslant i\leqslant n)$，此时 OWA 即变为加权算术平均算子。

定义 11 在上面求出的权向量 W 下，A,B 间的加权相似度可定义为：

$$S_W^p(A,B)=\mathrm{OWA}_W(M_H^p(A(u_1),B(u_1)),\cdots,M_H^p(A(u_n),B(u_n)))$$

其中，$A(u_i)=[t_A(u_i),1-f_A(u_i)]$，$1\leqslant i\leqslant n$；$B(u_i)=[t_B(u_i),1-f_B(u_i)]$，$1\leqslant i\leqslant n$。

根据前面定理(1)—定理(6)，容易验证以下性质成立。

(1)$0\leqslant S_W^p(A,B)\leqslant 1$；

(2)$S_W^p(A,B)=S_W^p(B,A)$；

(3)$S_W^p(A,B)=S_W^p(A',B')$；

(4)$S_W^p(A,B)=1$ if $A=B$；

(5)$S_W^p(A,C)\leqslant S_W^p(A,B)\wedge S_W^p(B,C)$。

所以 $S_W^p(A,B)$显然也是 Vague 集 A,B 间的一个相似度，而且它比定义 8 中的加权相似度更符合实际决策环境的需求。

为便于计算，本文接下来将取参数 $p=2$。即：

$$S_W(A,B)=\mathrm{OWA}_W(M_H^2(A(u_1),B(u_1)),\cdots,M_H^2(A(u_n),B(u_n)))$$

其中，$M_H^2(A(u_i),B(u_i))=1-[|t_A(u_i)-t_B(u_i)|^2\vee|f_A(u_i)-f_B(u_i)|^2]^{1/2}$。

4 Vague 系统基于双向近似推理的决策方法

4.1 基于相似度的 Vague 双向推理方法

现在考虑一个由 Vague 规则生成的决策系统，假设该系统包含 l 对 Vague 输入 X_j 和输出数据 Y_j，且每个 Vague 规则带有两个参数 $c_j\in[0,1]$，$\delta_j\in[0,1]$，$1\leqslant j\leqslant l$。每一对 Vague 输入输出数据(X_j,Y_j)可看成一个规则，该 Vague 系统也可视为是由 l 条 Vague 规则生成的。其中参数 c_j 代表规则 R_j 的确定因子，表示该规则的可信度；另一个参数 δ_j 代表规则激活的阈值，即表示只有当规则的相似匹配度不小于 δ_j 值时，该 Vague 规则 R_j 才能被激活。参数 c_j 和δ_j 的取值，一般是在该规则被提取时就指派给定的。

R_1：if$\{(u_1,[t_{1u_1},1-f_{1u_1}]),\cdots,(u_n,[t_{1u_n},1-f_{1u_n}])\}$，
Then$\{(v_1,[t_{1v_1},1-f_{1v_1}]),\cdots,(v_m,[t_{1v_m},1-f_{1v_m}])\}$；

R_2：if$\{(u_1,[t_{2u_1},1-f_{2u_1}]),\cdots,(u_n,[t_{2u_n},1-f_{2u_n}])\}$
Then$\{(v_1,[t_{2v_1},1-f_{2v_1}]),\cdots,(v_m,[t_{2v_m},1-f_{2v_m}])\}$；

……

R_l：if $\{(u_1,[t_{lu_1},1-f_{lu_1}]),\cdots,(u_n,[t_{lu_n},1-f_{lu_n}])\}$，
Then $\{(v_1,[t_{lv_1},1-f_{lv_1}]),\cdots,(v_m,[t_{lv_m},1-f_{lv_m}])\}$。

其中，系统的 Vague 输入和输出数据分别为：

$$X_j=(x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jn})=([t_{ju_1},1-f_{ju_1}],\cdots,[t_{ju_n},1-f_{ju_n}])\in[I]^n$$

$$Y_j=(y_{j1},y_{j2},\cdots,y_{jm})=([t_{jv_1},1-f_{jv_1}],\cdots,[t_{jv_m},1-f_{jv_m}])\in[I]^m$$

(for $1\leqslant j\leqslant l$)

该系统也可简化成如下 l 条 Vague 规则生成的系统。

$R_j:X_j\rightarrow Y_j(1\leqslant j\leqslant l)$

接下来，希望通过一个能够执行从 $[I]^n$ 到 $[I]^m$ 的模糊关系映射，得到一个双向 Vague 近似推理方法，使得当输入事实 $X_*\notin\{X_1,X_2,\cdots,X_l\}$，且 X_* 相似于 X_j 时，可得到的输出结果也将相似于 Y_j。相反地，若给定输入事实 $Y_*\notin\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_l\}$，且 Y_* 相似于 Y_j 时，则得到的反向输出结果 X_* 也必相似于 X_j。

现在，详细探讨一下在该 Vague 决策系统中如何实现上面所述的双向近似推理机制。

首先定义两个矩阵 $P\in[I]_{l\times n}$ 和 $Q\in[I]_{l\times m}$，矩阵 P 第 j 行记为 $P_j=(p_{j1},p_{j2},\cdots,p_{jn})$，$1\leqslant j\leqslant l$；矩阵 Q 第 j 行记为 $Q_j=(q_{j1},q_{j2},\cdots,q_{jm})$，$1\leqslant j\leqslant l$；其中 $p_{ji},q_{jk}\in[I]$，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant k\leqslant m$。

令 $P_j=X_j$，$Q_j=Y_j$，即可得该 Vague 决策系统的正向推理算法Ⅰ如下：

Step 1 对于给定的 Vague 输入数据向量

$X_*=(X_{*1},X_{*2},\cdots,X_{*n})=([t_{*u_1},1-f_{*u_1}],[t_{*u_2},1-f_{*u_2}],\cdots,[t_{*u_n},1-f_{*u_n}])$，可先计算出它与每个 Vague 规则前件 X_j 的相似指标向量

$$\eta_j=(\eta_{j1},\eta_{j2},\cdots,\eta_{jn})$$

其中，$\eta_{ji}=1-[|t_{ju_i}-t_{*u_i}|^2\vee|f_{ju_i}-f_{*u_i}|^2]^{1/2}$表示 X_* 与 X_j 的第 i 维 Vague 值间的相似度指标。

Step 2 用所获得的相似指标向量 $\eta_j=(\eta_{j1},\eta_{j2},\cdots,\eta_{jn})$来计算 Vague 输入事实 X_* 与每个 Vague 规则前件数据 X_j 的加权相似度 $s_W^j=\mathrm{OWA}_W(\eta_{j1},\eta_{j2},\cdots,\eta_{jn})$，其中 W 为 OWA 算子的加权向量，可由 BUM 函数来获取。进而，即可得 X_* 与各个 Vague 规则前件数据 $X_j(1\leqslant j\leqslant l)$间的加权相似度向量 $S_W=(s_W^1,s_W^2,\cdots,s_W^l)$。

Step 3 通过各 Vague 规则的确定性因子 c_j 来修正上面所求的加权相似度向量为 $\hat{S}_W=(\hat{s}_W^1,\hat{s}_W^2,\cdots,\hat{s}_W^l)$，其中

$\hat{s}_W^j=c_j\cdot s_W^j(j=1,2,\cdots,l)$；

当 $c_j=1$，$\hat{s}_W^j=s_W^j$；

当 $0\leqslant c_j<1$，$\hat{s}_W^j<s_W^j$。

Step 4 通过修正的相似度向量$\hat{S}_W=(\hat{s}_W^1,\hat{s}_W^2,\cdots,\hat{s}_W^l)$，并考虑各规则的阈值 δ_j，来确定该决策系统各规则前件与输入事实 X_* 间真正的相似匹配度向量 $M_W=(m_W^1,m_W^2,\cdots,m_W^l)$，其中 m_W^j 可按如下方式来确定：

若$\hat{s}_W^j\geqslant\delta_j$，第 j 条 Vague 规则可被激活，则 $m_W^j=\hat{s}_W^j$；

若$\hat{s}_W^j<\delta_j$，第 j 条 Vague 规则不能被激活，则 $m_W^j=0$ 。

Step 5 最后，作为 Vague 决策系统的决策输出值的 Vague 输出向量 $Y_{*W}=(y_{*W}^1,y_{*W}^2,\cdots,y_{*W}^m)$可通过矩阵 M_W 与矩阵 Q 的复合运算得到。即：

$$Y_{*W}=M_W\circ Q_{l\times m}$$

若$\circ$是取($\vee,\wedge$)复合运算，则

$$y_{*W}^k=\bigvee_{1\leqslant j\leqslant l}(m_W^j\wedge q_{jk}),k=1,2,\cdots,m$$

若$\circ$取($\vee,\cdot$)复合运算，则

$$y_{*W}^k=\bigvee_{1\leqslant j\leqslant l}(m_W^j\cdot q_{jk}),k=1,2,\cdots,m$$

类似地，还可给出该 Vague 决策系统反向推理算法Ⅱ如下：

Step 1 若给定的事实是 Vague 输入数据

$$Y_*=(y_{*1},y_{*2},\cdots,y_{*m})=([t_{*v_1},1-f_{*v_1}],[t_{*v_2},1-f_{*v_2}],\cdots,[t_{*v_m},1-f_{*v_m}])；$$

则可先计算出它与每个 Vague 规则后件 Y_j 的相似指标向量

$$\eta_j=(\eta_{j1},\eta_{j2},\cdots,\eta_{jm})$$

其中，$\eta_{jk}=1-[|t_{jv_k}-t_{*v_i}|^2\vee|f_{jv_i}-f_{*v_k}|^2]^{1/2}$表示 Y_* 与 Y_j 的第 k 维 Vague 值间的相似度指标。

Step 2 用所获相似指标向量 $\eta_j=(\eta_{j1},\eta_{j2},\cdots,\eta_{jm})$来计算 Vague 输入事实 Y_* 与每个 Vague 规则后件 Vague 数据 Y_j 的加权相似度 $s_W^j=\mathrm{OWA}_W(\eta_{j1},\eta_{j2},\cdots,\eta_{jm})$，其中 W 为 OWA 算子的加权向量，也可由 BUM 函数获得。继而可得

Y_* 与各 Vague 规则后件 Y_j $(1\leqslant j\leqslant l)$ 间的加权相似度向量 $S_W=(s_W^1,s_W^2,\cdots,s_W^l)$。

Step 3 通过各 Vague 规则的可信度 c_j 来修正上面所求的加权相似度向量为 $\hat{S}_W=(\hat{s}_W^1,\hat{s}_W^2,\cdots,\hat{s}_W^l)$，其中 $\hat{s}_W^j=c_j\cdot s_W^j,(j=1,2,\cdots,l)$。

Step 4 通过修正的相似度向量 $\hat{S}_W=(\hat{s}_W^1,\hat{s}_W^2,\cdots,\hat{s}_W^l)$，并综合考虑各规则的阈值 δ_j，来确定该决策系统各规则后件与输入事实 Y_* 间真正的相似匹配度向量 $M_W=(m_W^1,m_W^2,\cdots,m_W^l)$，其中 m_W^j 是按如下方式来定义的：

若 $\hat{s}_W^j\geqslant\delta_j$，第 j 条 Vague 规则可被激活，则 $m_W^j=\hat{s}_W^j$；

若 $\hat{s}_W^j<\delta_j$，第 j 条 Vague 规则不能被激活，则 $m_W^j=0$ 。

Step 5 最后，作为 Vague 决策系统的决策输出值的 Vague 向量 $X_{*W}=(x_{*W}^1,x_{*W}^2,\cdots,x_{*W}^n)$ 可通过矩阵 M_W 与矩阵 P 的复合运算得到，即 $X_{*W}=M_W\circ P_{l\times n}$。

若取$\circ$ 为$(\vee,\wedge)$ 复合运算，则

$x_{*W}^i=\bigvee_{1\leqslant j\leqslant l}(m_W^j\wedge p_{ji})\quad i=1,2,\cdots,n$

若取$\circ$为$(\vee,\cdot)$复合运算，则

$x_{*W}^i=\bigvee_{1\leqslant j\leqslant l}(m_W^j\cdot p_{ji}),i=1,2,\cdots,n$

4.2 数值实例分析

接下来，考虑工业产品质量检测中的一个决策系统。假设产品质量的检测过程需要用到一个可视系统来测量每个产品的 4 个特征数据指标 $u_i=[t_{u_i},1-f_{u_i}]\in[I],(i=1,2,3,4)$，并通过其他仪器来度量产品的另外 3 个数据指标 $v_k=[t_{v_k},1-f_{v_k}]\in[I],(k=1,2,3)$。

假设根据以往检测资料和一些权威检测专家的经验知识，我们已得到该质量检测系统是由下面的 5 条 Vague 规则生成的决策系统。

R_1: If $\{(u_1,[0.3,0.58]),(u_2,[1.0,1.0]),(u_3,[0.5,0.8]),(u_4,[0.28,0.45])\}$

Then $\{(v_1,[0.72,1]),(v_2,[0.78,0.96]),(v_3,[0.48,0.75])\}$; $C_1=0.87,\delta_1=0.68$。

R_2: If $\{(u_1,[0.15,0.62]),(u_2,[0.86,1]),(u_3,[1,1]),(u_4,[0.45,0.57])\}$

Then $\{(v_1,[0.47,0.73]),(v_2,[0.8,1.0]),(v_3,[0.68,0.89])\}$; $C_2=0.9,\delta_2=0.75$。

R_3: If $\{(u_1,[0.52,0.63]),(u_2,[0.69,0.87]),(u_3,[0.25,0.56]),(u_4,[1,1])\}$

Then $\{(v_1,[0.76,0.82]),(v_2,[0.32,0.54]),(v_3,[0.91,0.98])\}$; $C_3=0.97,\delta_3=0.56$。

R_4: If $\{(u_1,[0.8,1]),(u_2,[0.75,0.92]),(u_3,[0.56,0.78]),(u_4,[0.32,0.49])\}$

Then $\{(v_1,[0.18,0.36]),(v_2,[0.43,0.82]),(v_3,[0.38,0.65])\}$; $C_4=0.94,\delta_4=0.65$。

R_5: If $\{(u_1,[0.33,0.65]),(u_2,[0.67,0.83]),(u_3,[0.86,1]),(u_4,[0.74,0.92])\}$

Then $\{(v_1,[0.28,0.46]),(v_2,[0.63,0.87]),(v_3,[0.48,0.65])\}$;$C_5=0.83,\delta_5=0.58$。

上面这个 Vague 规则生成系统也可以简化地表示成如下的 5 对带两个参数的 Vague 输入和输出数据。

$X_1=([0.3,0.58],[1,1],[0.5,0.8],[0.28,0.45])$,

$Y_1=([0.72,1],[0.78,0.96],[0.48,0.75]),C_1=0.87,\delta_1=0.68$;

$X_2=([0.15,0.62],[0.86,1],[1,1],[0.45,0.57])$,

$Y_2=([0.47,0.73],[0.8,1.0],[0.68,0.89]),C_2=0.9,\delta_2=0.75$;

$X_3=([0.52,0.63],[0.69,0.87],[0.25,0.56],[1,1])$,

$Y_3=([0.76,0.82],[0.32,0.54],[0.91,0.98]),C_3=0.97,\delta_3=0.56$;

$X_4=([0.8,1],[0.75,0.92],[0.56,0.78],[0.32,0.49])$,

$Y_4=([0.18,0.36],[0.43,0.82],[0.38,0.65]),C_4=0.94,\delta_4=0.65$;

$X_5=([0.33,0.65],[0.67,0.83],[0.86,1],[0.74,0.92])$,

$Y_5=([0.28,0.46],[0.63,0.87],[0.48,0.65]),C_5=0.83,\delta_5=0.58$。

其中，c_j 代表规则 R_j 的确定因子，表示该规则的可信度；另一个参数 δ_j 代表规则被激活的阈值，$1\leqslant j\leqslant 5$ 。

所以根据正向推理算法 Ⅰ，矩阵 Q,P 可分别表示为：

$$Q=\begin{bmatrix}[0.72,1.0] & [0.78,0.96] & [0.48,0.75]\\ [0.47,0.73] & [0.8,1.0] & [0.68,0.89]\\ [0.76,0.82] & [0.32,0.54] & [0.91,0.98]\\ [0.18,0.36] & [0.43,0.82] & [0.38,0.65]\\ [0.28,0.46] & [0.63,0.87] & [0.48,0.65]\end{bmatrix},$$

$$P=\begin{bmatrix}[0.3,0.58] & [1.0,1.0] & [0.5,0.8] & [0.28,0.45]\\ [0.15,0.62] & [0.86,1.0] & [1.0,1.0] & [0.45,0.57]\\ [0.52,0.63] & [0.69,0.87] & [0.25,0.56] & [1.0,1.0]\\ [0.8,1.0] & [0.75,0.92] & [0.56,0.78] & [0.32,0.49]\\ [0.33,0.65] & [0.67,0.83] & [0.86,1.0] & [0.74,0.92]\end{bmatrix}$$

若通过仪器检测到某产品的 Vague 数据指标向量为：

$X_*=([0.2,0.6],[0.7,1],[0.6,0.8],[0.34,0.52])$

则根据前面提出的 Vague 正向推理算法 Ⅰ，可先计算 X_* 与每个规则前件 Vague 数据 X_j $(1\leqslant j\leqslant 5)$ 的加权相似度 $s_W^j=\mathrm{OWA}_W(\eta_{j1},\eta_{j2},\cdots,\eta_{j4})$，再根据规则的可信度 c_j，可将其修正为 $\hat{s}_W^j=c_j\cdot s_W^j$；进而得到 $\hat{S}_W=(\hat{s}_W^1,\hat{s}_W^2,\cdots,\hat{s}_W^5)$；

再通过阈值计算得到 X_* 与各 Vague 前件 X_j 的真正的相似匹配度向量 $M_W=(m_W^1,m_W^2,\cdots,m_W^5)$。

最后根据 $Y_{*W}=M_W\circ Q_{5\times 3}$，即可得 Vague 输出值向量 $Y_{*W}=(y_{*W}^1,y_{*W}^2,y_{*W}^3)$。

这里取$\circ$为两矩阵间的$(\vee,\cdot)$复合运算，则 $y_{*W}^k=\bigvee_{1\leqslant j\leqslant 5}(m_W^j\cdot q_{jk}),k=1,2,3$。

其中，W 为 OWA 算子的加权向量，可通过 BUM 函数 $f(x)=x^r$ 由决策者根据实际决策需求获取。

若决策者选取 $r=2$，则根据定义 10，可得 OWA 算子的权向量，并进而根据正向推理算法 Ⅰ 得到对应 Vague 的输出。其过程如下：

$W_{r=2}=(0.0625,0.1875,0.3125,0.4375)$;

$S_W=(s_W^1,s_W^2,\cdots,s_W^5)$

$=(0.8144,0.7512,0.5337,0.7031,0.7037)$;

$\hat{S}_W=(\hat{s}_W^1,\hat{s}_W^2,\cdots,\hat{s}_W^5)$

$=(0.7085,0.6761,0.5177,0.6609,0.5841)$;

$M_W=(m_W^1,m_W^2,\cdots,m_W^5)=(0.7085,0,0,0.6609,0.5841)$;

$Y_{*W}^{r=2}=(y_{*W}^1,y_{*W}^2,y_{*W}^3)$

$=([0.5101,0.7085],[0.5526,0.6802],[0.3401,$

0.5314])。

如果决策者选取 $r=1$,则可按如下过程计算得到它们所对应的 Vague 输出值。

$W_{r=1}=(0.25,0.25,0.25,0.25)$;

$S_W=(s_W^1,s_W^2,\cdots,s_W^5)$

$=(0.8575,0.82,0.635,0.8125,0.76)$;

$\hat{S}_W=(\hat{s}_W^1,\hat{s}_W^2,\cdots,\hat{s}_W^5)$

$=(0.746,0.738,0.616,0.7637,0.6308)$;

$M_W=(m_W^1,m_W^2,\cdots,m_W^5)$

$=(0.746,0,0.616,0.7637,0.6308)$;

$Y_{*W}^{r=1}=(y_{*W}^1,y_{*W}^2,y_{*W}^3)$

$=([0.5371,0.746],[0.5819,0.7162],[0.5606,0.6037])$。

如果决策者选取 $r=0.5$,则类似地可计算得:

$W_{r=0.5}=(0.5,0.207,0.159,0.134)$;

$S_W=(s_W^1,s_W^2,\cdots,s_W^5)$

$=(0.8882,0.8732,0.7247,0.8836,0.8049)$;

$\hat{S}_W=(\hat{s}_W^1,\hat{s}_W^2,\cdots,\hat{s}_W^5)$

$=(0.7727,0.7859,0.703,0.8306,0.6681)$;

$M_W=(m_W^1,m_W^2,\cdots,m_W^5)$

$=(0.7727,0.7859,0.703,0.8306,0.6681)$;

$Y_{*W}^{r=0.5}=(y_{*W}^1,y_{*W}^2,y_{*W}^3)$

$=([0.5563,0.7727],[0.6287,0.7859],[0.6397,0.6995])$。

若规定检测标准的要求为:产品的输出数据 Y 的各个指标数据 $v_k(k=1,2,3)$ 均必须超过[0.3,0.5],才能把它归类为质量优的产品。而我们发现通过上面方法在最严格决策需求环境下计算出来的其中最小的 Vague 决策输出值 $Y_{*W}^{r=2}$ 中所有的 v_k 值都≥[0.3,0.5];故而该产品可认为质量优。

若检测标准的要求规定为:产品输出数据 Y 的各指标数据,在任何决策环境下都必须满足 $v_1\leqslant[0.52,0.75]$,且 $v_2\leqslant[0.64,0.8]$,$v_3\leqslant[0.76,0.9]$,才能把该产品归为质量优的产品,但按照最宽松的决策环境下计算出来的其中最大的 Vague 输出值 $Y_{*W}^{r=0.5}$ 中却有 $v_1=[0.5563,0.7727]\geqslant[0.52,0.75]$;故该产品不符合质量优的检验标准,所以不能认为它是优质产品。

另外一方面,前面所提出的反向推理方法Ⅱ也可应用到医疗诊断决策等领域问题。比如,若上述基于 Vague 规则的系统的 Y 向量是表示与症状有关的 Vague 数据向量,X 向量是表示与身体紊乱有关的 Vague 数据向量,现如果给定一个 Vague 输入 Y_*,它是由带 Vague 值的各症状构成的 Vague 集合,则同样可以根据前面提及的反向近似推理算法Ⅱ,先算出 Y_* 与系统各规则后件 $Y_j(1\leqslant j\leqslant l)$ 真正的相似匹配度向量 M_W,再根据矩阵 M_W 与矩阵 P 的复合运算来得到反向推理结果 X_*,即:

$$X_{*W}=(x_{*W}^1,x_{*W}^2,x_{*W}^3,\cdots,x_{*W}^n)=M_W\circ P_{l\times n}$$

P 是该决策系统的各规则前件 Vague 数据构成的矩阵。

若$\circ$是取 max-min 复合运算,则其中:

$$x_{*W}^i=\bigvee_{1\leqslant j\leqslant l}(m_W^j\wedge p_{ji}),i=1,2,\cdots,n$$

假若系统给出的决策要求也为一个 Vague 数据向量 $(E_1,E_2,\cdots,E_n)$,则可先比较 x_{*W}^i 与 E_i 的大小,从而得到 X_* 与 E 的关系,最终可做出该 Vague 数据 X_* 是否符合决策需求 E 的推断,并得到病人是否患有某个病的诊断决策结论。这里就不再举详细例子来说明,因为过程类似于前面的正向推理的 Vague 决策方法。

结束语 本文基于 Hausdorff 度量,提出一个新的 Vague 值间的相似度;进而建立基于 OWA 算子的加权相似度。通过决策系统各 Vague 规则的相似匹配度向量与输出(或输入)的 Vague 数据矩阵的复合运算可以方便快速地得到决策系统的 Vague 输出结果。文献[11,12]虽然提出了一些 Vague 集间的加权相似度和距离测度,但没有考虑到 Vague 规则的阈值和可信度等参数对推理结果的影响;文献[2]也只是研究了模糊决策系统的双向推理方法。而本文不但综合考虑了 Vague 规则的各参数的影响,还针对更为广泛的 Vague 系统提出了对应的双向推理方法。显然,我们的方法要比现有的一些方法更具优越和灵活性。但如何根据聚类方法[16]来约简 Vague 系统的规则,是我们未来研究的一部分。

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965,8(3):338-353

[2] Chun M G. A similarity-based bi-directional approximate reasoning method for decision-making systems [J]. Fuzzy sets and Systems,2001,117:269-278

[3] Zadeh L A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning [J]. Information Sciences,1975,8(3):199-249

[4] Gorzalczany M B. A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1987,21(1):1-17

[5] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Trans. Systems Man Cybernet,1993,23:610-614

[6] Li Y H, Olson D L, et al. Similarity measures between intuitionistic fuzzy (vague) sets: A comparative analysis[J]. Pattern Recognition Letters,2007,28:278-285

[7] Chen S M. Measures of similarity between vague sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1995,74:217-223

[8] Zhang Q S, Jiang S Y. A note on information entropy measures for vague sets and its applications [J]. Information Sciences, 2008,178(21):4184-4191

[9] Chen S M, Tan J M. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory [J]. Fuzzy Sets and Systems,1994,67:163-172

[10] Ye Jun. Improved method of multicriteria fuzzy decision-making based on vague set [J]. Computer-Aided Design,2007,39:164-169

[11] 王天江,卢正鼎,李凡. 一个新的基于 Vague 集加权相似度量的双向近似推理方法[J]. 小型微型计算机系统,2004,25(2):211-215

[12] 石玉强,王鸿绪. 一种基于 Vague 集间距离的双向近似推理方法[J]. 小型微型计算机系统,2007,28(4):661-665

[13] Bustince H. Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations Application to approximate reasoning[J]. Fuzzy Sets and Systems,2000,113:205-219

[14] 万树平. 基于 Vague 集的多传感器目标识别方法[J]. 控制与决策,2009,24(7):1099-1102

[15] Xu Z S. Dynamic intuitionistic fuzzy multi - attribute decision making[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008,48:246-262

[16] 赵法信,马宗民. 一种基于 Vague 关系的模糊聚类方法[J]. 计算机科学,2007,34(7):150-153