

部分多值逻辑函数集中准完备集的分类问题研究

王 婷^{1,2} 刘任任^{1,2} 马 珂¹

(湘潭大学信息工程学院 湘潭 411105)¹

(湘潭大学智能计算与信息处理教育部重点实验室 湘潭 411105)²

摘 要 Sheffer 函数的最简判定是多值逻辑函数集完备性判定问题中的一个重要的理论和实际问题。根据部分多值逻辑函数的完备性理论,研究了部分多值逻辑函数集中准完备集的分类问题,从而为解决部分多值逻辑中 Sheffer 函数的判定问题提供了研究基础。

关键词 多值逻辑,完备性,保关系,准完备集,Sheffer 函数

中图法分类号 TP301.1 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2014.08.012

Research on Classification of Precomplete Classes in Partial Multiple-valued Logic Function Sets

WANG Ting^{1,2} LIU Ren-ren^{1,2} MA Ke¹

(School of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)¹

(Key Laboratory of Intelligent Computing & Information Processing of MOE, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)²

Abstract The simplest decision on Sheffer function is an important theoretical and practical problem in structure theory of multiple-valued logic functions. According to the completeness theory of partial multiple-valued logic functions, this paper studied the classification of pre-complete classes in multiple-valued logic function sets. The obtained results provide some basis for judging Sheffer functions in partial multiple-valued logic.

Keywords Multiple-valued logic, Completeness, Preserving relation, Pre-complete classes, Sheffer functions

1 引言

多值逻辑的研究内容大体可分为 3 个方面^[1],即多值逻辑的数学理论^[2-4]、多值电路与多值数字系统^[5,6]、多值逻辑的应用^[7,8]。多值逻辑的数学理论主要研究逻辑系统的内部规律,例如无矛盾性、完备性、判定算法以及表现形式等。这些结果可以应用于思维逻辑和指导后两方面的工作。多值电路与多值数字系统主要研究实现多值逻辑的各种物理器件、多值数字系统的逻辑设计及多值开关理论,这方面的研究结果可以提高数字系统的信息密度,解决集成电路的引线限制及连接复杂度问题,提高数字系统的可靠性、可测试性及容错能力等。多值逻辑的应用可以涉及到计算机科学与技术的许多领域。例如,多值逻辑作为一种方法可以用于二值计算机的测试码生成、故障定位以及容错设计,也可用于计算机系统诊断和社会诊断。目前计算机领域中主要使用的是二值逻辑。但三值、四值以及更高值的逻辑也已逐渐得到应用,并且越来越多地渗透到计算机领域的许多分支,显示出强大的生命力。

多值逻辑函数结构理论是多值逻辑理论中的一个重要的研究方向,主要包括完备性理论、函数表示理论以及单向陷门函数。其中的函数集完备性之判定问题是一个基本而重要的

问题,同时也是自动机理论、多值逻辑网络中必须解决的问题。此问题的解决依赖于定出多值逻辑函数集中的所有准完备集,通常分为完全多值逻辑、部分多值逻辑、一元多值逻辑中函数集完备性判定 3 个问题。

2 基本概念

设 $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}, k \geq 2$ 。函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 定义在 E_k 上而其函数值仍属于 E_k 。如果对任意值组 $(a_1, \dots, a_n)$ ($a_i \in E_k, i=1, \dots, n$), $f(a_1, \dots, a_n)$ 都有定义,则称 $f(x_1, \dots, x_n)$ 为完全 K 值逻辑函数,否则称为非完全 k 值逻辑函数。 E_k 上完全和非完全的 k 值逻辑函数统称为部分 k 值逻辑函数,所有完全 k 值逻辑函数作成之集合记为 P_k ,所有部分 k 值逻辑函数作成之集合记为 P_k^* 。

对于非完全函数 $f(x_1, \dots, x_n)$,当 $f(a_1, \dots, a_n)$ 无定义时,我们记为 $f(a_1, \dots, a_n) = *$,处处无定义的函数称为空函数,记为 $*$ 。

设 A 是 P_k^* 中的一个非空子集,函数 $f(x_1, \dots, x_m) \in A$, $g_i(x_1, \dots, x_n) (i=1, \dots, m)$ 或属于 A 或为自变数 x_i ,于是,函数 $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$ 是由 A 中的函数复合出来的函数,其函数值定义如下:对任意值组 $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$,若 $g_i(\tilde{a})$ 均有定义, $i=1, \dots, m$,则 $h(\tilde{a}) = f(g_1$

到稿日期:2013-06-08 返修日期:2013-08-02 本文受国家自然科学基金(60673193),湖南省重点学科建设项目(计算机科学与技术),湖南省科技厅计划(2011FJ6038)资助。

王 婷(1980—),女,硕士,讲师,主要研究方向为多值逻辑,E-mail: piaopiaoting@139.com;刘任任(1959—),男,博士,教授,主要研究方向为多值逻辑;马 珂(1984—),女,硕士生,主要研究方向为多值逻辑。

$(\tilde{a}), \dots, g_m(\tilde{a}))$; 若至少有一个 $g_i(\tilde{a})$ 无定义, $1 \leq i \leq m$, 则 $h(\tilde{a}) = *$ 。

所有的由 A 复合出来的函数记为 A' 。易知, $A \subseteq A'$, 且若 $A \subseteq B$, 则 $A' \subseteq B'$ 。

设 $A \subseteq P_k^*$, A 非空。如果 $A = A'$, 则称 A 是封闭集。

易知, 任意有限多个封闭集的交集仍是封闭集。

设 A 是 P_k^* 的一个非空子集, 包含 A 的所有封闭集之交集称为 A 的封化集, 记为 $GEN(A)$ 。不难证明, $GEN(A) = A \cup A' \cup A'' \cup \dots \cup A^{(i)} \cup \dots$ 。

$A(\subseteq P_k^*)$ 是完备集, 如果 $GEN(A) = P_k^*$ 。

设 $M(\subseteq P_k^*)$ 是一个封闭集, 若 M 与 P_k^* 之间无其它的封闭集, 则 M 称为一个准完备集。

由完备性理论知, P_k^* 中的非空子集 A 是完备集, 必要而且只要 A 不含于任何准完备集之中。由此, 完备集之刻画问题可以转化为准完备集之刻画问题, 只要定出 P_k^* 中的所有准完备集便可完全解决函数系完备性之判定问题。

定义 1 令 $G_m = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \mid a_i \in E_k, i=1, 2, \dots, m \} \subseteq E_k^m$, $m \geq 2$, 称 G_m 为 E_k 上的一个 m 元关系。

定义 2 m 个值组: $\tilde{a}^1 = (a_1^1, \dots, a_n^1)$, $\tilde{a}^2 = (a_1^2, \dots, a_n^2)$, $\dots$, $\tilde{a}^m = (a_1^m, \dots, a_n^m)$ 说是保 m 元关系 G_m , 如果 $\langle a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^m \rangle \in G_m, i=1, \dots, n$ 。

定义 3 设函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_k^*$ 。如果对任意保 G_m 的 n 元值组 $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \dots, \tilde{a}^m$, 值组 $\langle f(\tilde{a}^1), f(\tilde{a}^2), \dots, f(\tilde{a}^m) \rangle$ 或者未完全有定义或者仍属于 G_m , 则称函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_k^*$ 是保 m 元关系 G_m 的。 P_k^* 中所有保 G_m 函数之集合记为 $T(G_m)$, 称为保 G_m 函数集。

定义 4 设 $N = \{ f \mid f(x_1, \dots, x_n) \in P_k, h(t_1, \dots, t_m) \in P_k^* \}$ 。若对任意 $g_1(\tilde{x}), \dots, g_m(\tilde{x}) \in N$, 复合函数 $h(g_1(\tilde{x}), \dots, g_m(\tilde{x})) = \begin{cases} h(g_1(\tilde{a}), \dots, g_m(\tilde{a})), & g_i(\tilde{a}) \text{ 均有定义}, i=1, \dots, m \\ *, & \text{存在 } g_i(\tilde{a}) = *, 1 \leq i \leq m \end{cases}$, 则称 $h(t_1, \dots, t_m)$ 保 N 。

P_k^* 中所有保 N 函数之集合记为 $T(N)$ 。易证, $T(N)$ 是封闭集。

定义 5 若对任意 $f(\tilde{x}), g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x}) \in N$, 复合函数 $f(g_1(\tilde{x}), \dots, g_n(\tilde{x})) \in N$, 则称 N 是一个 n 元封闭集。

定义 6 设 N 是一个一元封闭集。若 $x \in N$, 且 N 中不含关于 x 的所有完全函数, 则称 N 为一元正则集。

定义 7 设 $f(x, y) \in P_k$ 。若 $f(x, y)$ 不依赖于 x 或 y , 则称 $f(x, y)$ 是一个假二元函数。

定义 8 设 N 是一个二元封闭集。若 N 包含关于自变数 x, y 的所有假二元函数, 但不包含 x, y 的所有完全函数, 则称 N 为一个二元正则集。

3 结果及证明

定理 1 设 $A \subseteq P_k^*$ 且 $GEN(A) \supseteq P_k$ 。于是, 若 A 中有一个非空非完全函数, 则 $GEN(A) = P_k^*$ 。

证明: 设 $g(\tilde{x}) \in A$ 是一个非空非完全函数。于是, 有值组 $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, 使 $g(\tilde{a}) = a \in E_k$ (非空), $g(\tilde{\beta}) = *$ (非完全)。令 $\varphi(x) = \begin{cases} k-1, & x=a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$, $h_i(x) = \begin{cases} a_i, & x=k-1 \\ \beta_i, & x \neq k-1 \end{cases}, i=1, \dots, m$ 。

于是, 复合函数

$$\tau(x) = \varphi(g(h_1(x), \dots, h_m(x))) = \begin{cases} k-1, & x=k-1 \\ *, & x \neq k-1 \end{cases}$$

易知, $\varphi(x), h_i(x) \in GEN(A)$, 因此, $\tau(x) \in GEN(A)$ 。

下证: $GEN(A) = P_k^*$ 。

任取 $f(\tilde{x}) \in P_k^*$ 。设 $f(\tilde{x})$ 的定义域为 M 。现将 $f(\tilde{x})$ 扩充为一个完全函数 $F(\tilde{x})$, 如下:

$$F(\tilde{x}) = \begin{cases} f(\tilde{x}), & \tilde{x} \in M \\ 0, & \tilde{x} \notin M \end{cases}$$

并令

$$G(\tilde{x}) = \begin{cases} k-1, & \tilde{x} \in M \\ 0, & \tilde{x} \notin M \end{cases}$$

于是有, $f(\tilde{x}) = \min(F(\tilde{x}), \tau(G(\tilde{x})))$ 。注意到 $F(\tilde{x}), G(\tilde{x}), \min(x, y) \in GEN(A)$, 因此有 $f(\tilde{x}) \in GEN(A)$ 。故 $GEN(A) = P_k^*$ 。

定理 2 $P_k \cup \{*\}$ 是包含全部完全二元函数的准完备集。

证明: 先证 $P_k \cup \{*\}$ 是准完备集。

显然, $P_k \cup \{*\}$ 是封闭集, 并且 $P_k \cup \{*\} \subseteq P_k^*$ 。任取 $f(\tilde{x}) \notin P_k \cup \{*\}$, 易知, $f(\tilde{x})$ 是一个非空非完全函数。由完备性理论知, $P_k \cup \{*\} \cup \{f\}$ 是完备集。因此, $P_k \cup \{*\}$ 是准完备集。

再证 $P_k \cup \{*\}$ 包含全部二元函数。

设准完备集 M 包含全部二元函数, 下证 $M = P_k \cup \{*\}$ 。不难证明, $\{xy, \bar{x}, \bar{xy}\} \subseteq M$ 是完备集, 因此, M 中的函数可叠合出所有完全函数。于是, $P_k \subseteq M$, 易知, M 中不含非空非完全函数, 否则 M 就是完备集, 这与 M 是准完备集矛盾。因此, $M \subseteq P_k \cup \{*\}$, 再由 M 的准完备性和 $P_k \cup \{*\}$ 的封闭性知, $M = P_k \cup \{*\}$ 。

结束语 在部分 k 值逻辑函数完备性判定问题研究中, 罗铸楷教授根据“保关系”的系统思想^[17,18], 将定出的所有准完备集划分为 7 类, 即保 E 函数集 T_E 、完满对称函数集 $F_{s,m}$ 、单纯可离函数集 $S_{l,m}$ 、正则可离函数集 $S_{R,m}$ 、拟线性函数集 L_p 、 L 型函数集 $L_{G_{4,2}}$ 以及 $P_k \cup \{*\}$ 。除 $P_k \cup \{*\}$ 外, 每一个准完备类中都含有大量的函数集, 而每个函数集都可以看成是保某个 m 元关系的集合。在确定准完备集的最小覆盖时, 搞清楚每个准完备类的性质, 对确定准完备集的最小覆盖是有用的, 也为最终解决部分多值逻辑中 Sheffer 函数的判定奠定了基础^[10-14]。

参考文献

- [1] 罗铸楷, 胡谋, 陈廷槐. 多值逻辑的理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 1992
- [2] Chajda I, Halas R, Rosenberg I G. On the role of logical connectives for primality and functional completeness of algebras of logics[J]. Inf. Sci., 2010, 180(8): 1345-1353
- [3] Fotea V L, Rosenberg I G. Hypergroupoids determined by lattices[J]. Eur. J. Comb., 2010, 31(3): 925-931
- [4] Machida H, Rosenberg I G. On Endoprimal Monoids in Clone Theory[C]//ISMVL. 2009: 167-172
- [5] Mishchenko A, Brayton R K, et al. Global delay optimization using structural choices[C]//FPGA 2010. 2010: 181-184
- [6] Mishchenko A, Case M L, Brayton R K, et al. Scalable and scalably-verifiable sequential synthesis[C]//ICCAD 2008. 2008: 234-241

- [7] Kimura H, Hanyu T, Kameyama M, et al. Multiple-valued logic-in-memory VLSI based on ferroelectric capacitor storage and charge addition[C]//Proceedings 32nd IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic. 2002;161-166
- [8] Jang S, Wu D, Jarvin M, et al. Brayton: SmartOpt; an industrial strength framework for logic synthesis[C]//FPGA 2009. 2009; 237-240
- [9] Wang Ting, Tan Hao-xun, Liu Ren-ren. An Effective Conversion Algorithm of Arithmetic Expression from Infix Form to Prefix Form[J]. Applied Mechanics and Materials, 2011(58-60); 1350-1353
- [10] 王婷, 刘任任. 部分多值逻辑中单纯可离和完满对称关系的计数[J]. 计算机科学, 2012, 39(10); 224-226
- [11] 刘任任, 王婷, 谭昊勋. 关于部分多值逻辑函数集中准完备集的若干性质[J]. 计算机学报, 2012, 35(4); 754-760
- [12] Liu Ren-ren, Wang Ting. Some Results on Decision of Basic Groups and Basic Semigroups in Partial Multiple-Valued Logic [C]//ICMT2011. IEEE Computer Society, 2011; 6011-6015
- [13] 刘任任, 王婷, 谭昊勋. 部分四值逻辑中完满对称函数集的分类及最小覆盖成员的判定[J]. 计算机科学, 2010, 37(11); 257-260
- [14] 刘任任, 罗秋棠, 王婷. 部分多值逻辑中保正规关系的准完备集的性质[J]. 武汉大学学报: 理学版, 2012, 58(2); 135-138
- [15] 王湘浩. 有限集合上缺值与不缺值函数的结构理论[J]. 吉林大学自然科学学报, 1963(2); 295-315
- [16] Freivald R V. A completeness criterion for partial functions of logic and many-valued logic (Russian)[J]. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1966, 167; 1249-1250
- [17] 罗铸楷. 部分多值逻辑函数集中的极大封闭集[J]. 数学学报, 1984, 27(6); 795-800
- [18] 罗铸楷. 部分多值逻辑函数的完备性理论[J]. 数学学报, 1984, 27(5); 676-683
- [19] 刘任任. 部分三值逻辑中准完备集之最小覆盖[J]. 湘潭大学自然科学学报, 1991, 13(2); 158-164
- [20] Liu Ren-ren. Some results on the decision for Sheffer functions in partial K-valued Logic, Multiple-Valued Logical[J]. An International Journal, 1996(1); 253-269
- [21] Liu Ren-ren. Some results on the decision for Sheffer functions in partial K-valued Logic(II)[C]//Proceeding of the 29th international Symposium on Multiple-valued logic. 1998; 77-81
- [22] Liu Ren-ren. Research on the Similarity among Precomplete Sets Preserving m-ary Relations in Partial K-Valued Logic[C]//Proceedings of the 30th International Symposium on Multiple-Valued Logic. 1999; 136-139
- [23] Rosenberg I G, Machida H. Gigantic Pairs of Minimal Clones [C]//ISMVL 1999. 1999; 74-79
- [24] Rosenberg I G, Schweigert D. Locally Maximal Clones II[J]. Journal of Automata, Languages and Combinatorics, 2000, 5(4); 421-456
- [25] Haddad L, Machida H, Rosenberg I G. On the Intersection of Maximal Partial Clones and the Join of Minimal Partial Clones [C]//ISMVL 2000. 2000; 396-401
- [26] Machida H, Miyakawa M, Rosenberg I G. Some Results on the Centralizers of Monoids in Clone Theory[C]//ISMVL. 2002. 2002; 10-16
- [27] Machida H, Rosenberg I G. On the Centralizers of Monoids in Clone Theory[C]//ISMVL 2003. 2003; 303-308
- [28] Liu Ren-ren, et al. Some results on the minimal coverings of pre-complete classes in partial k-valued logic functions[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2004, 19(6); 981-985
- [29] Machida H, Rosenberg I G. Monoids whose Centralizer is the Least Clone[C]//ISMVL 2004. 2004; 102-108
- [30] Liu Ren-ren, et al. On The Categorizing of Simply Separable Relations In Partial Four-Valued Logic[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3612; 1251-1256
- [31] Liu Ren-ren, et al. On the Categorizing of Fully Symmetric Relations in Partial Four-valued Logic[J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2006, 4223; 286-289
- [32] Haddad L, Lau D. Characterization of Partial Sheffer Functions in 3-Valued Logic[C]//ISMVL 2007. 2007; 34-38
- [33] Liu Ren-ren. On Basic Groups and Basic Semi-groups in Partial Multiple-Valued Logic[C]//Proceedings of Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discover. 2007, 2
- [34] Haddad L. Partial Clones Containing All Selfdual Monotonic Boolean Partial Functions[C]//ISMVL 2009. 2009; 173-178
- [35] Couceiro M, Haddad L. Finitely Generated Maximal Partial Clones and Their Intersections[C]//ISMVL 2010. 2010; 122-127
- [36] Machida H, Pantovic J, Rosenberg I G. Galois Connection for Hyperclones[C]//ISMVL 2010. 2010; 201-204

(上接第 49 页)

图像超分辨率重建算法对图像质量的提高是有限制条件的, 不可能无限制地提高图像的质量, 当图像过于模糊时, 重建后的图像质量改善有限。进一步探索图像质量下降的原因, 提高图像重建的质量, 仍需要继续深入的研究。

参 考 文 献

- [1] Trai R Y, Huang T S. Multi frame Image Restoration and Registration [M]//Huang T S, ed. Advances in Computer Vision and Image Processing. UK: JAI Press Inc, 1984; 317-339
- [2] Li X, Orchard M T. New edge-directed interpolation[J]. IEEE Trans. Image Proc., 2001, 10(10); 1521-1527
- [3] Zhang L, Wu X. An edge-guided image interpolation algorithm via directional filtering and data fusion[J]. IEEE Trans. Image Proc., 2006, 15(8); 2226-2238
- [4] Muresan D D. Fast edge directed polynomial interpolation[C]//IEEE International Conference on Image Processing. 2005, 2; 990-993
- [5] Harris J L. Diffraction and Resolving Power [J]. J. O. S. A., 1964, 54(7); 931-936
- [6] Goodman J W. Introduction to Fourier Optics[M]//McGraw-Hill. New York, 1968; 77-197
- [7] Tekalp M, Ozkan M K, Sezan M I. High resolution image reconstruction from lower resolution image sequences and space varying image restoration [C]//Proceedings of IEEE International Conference on ASSP, San Francisco, IEEE, 1992; 169-172
- [8] Pattij, Sezan M I, Tekalp A M. Super resolution video reconstruction with arbitrary sampling lattices and nonzero aperture time [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 8(6); 1064-1076
- [9] Buades A, Coll B, Morel J M. A non-local algorithm for image denoising[C]//Proc. IEEE CVPR. vol. 2, June 2005; 60-65
- [10] 邵青, 魏江, 卢选民. 基于 PSF 改进的 POCS 超分辨率图像重构[J]. 现代电子技术, 2011(2)