

# 求解二维矩形 Packing 问题的完备算法

何 琨 姚鹏程 李立文

(华中科技大学计算机科学与技术学院 武汉 430074)

**摘 要** 对于典型的 NP 难度问题——二维矩形 Packing 问题,经典完备算法的计算复杂度不仅与待放块的数目相关,也与矩形框的宽和高相关。通过观察二维矩形 Packing 问题的合法布局的特点,将其与一对有向无环图相对应,并基于 Prüfer 码进行编码,提出了一种计算复杂度仅与待放块数相关的复杂度较低的完备算法。

**关键词** Packing 问题,完备算法,计算复杂度,Prüfer 编码,有向无环图

中图法分类号 TP301 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2014.08.011

## Complete Algorithm for 2D Rectangular Packing Problem

HE Kun YAO Peng-cheng LI Li-wen

(School of Computer Science and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract** The classical complete algorithm for the NP hard 2D rectangular packing problem is not only related to the number of items but also related to the width and height of the rectangular container. By observing the characteristics of feasible layouts for this packing problem, we corresponded each feasible layout to a pair of acyclic directed graphs. Then based on the prüfer code, we proposed a new complete algorithm whose computational complexity is only based on the number of items.

**Keywords** Packing problem, Complete algorithm, Computational complexity, Prüfer code, Directed acyclic graph

### 1 引言

二维矩形 Packing 问题是指:在二维欧氏空间中,已知一个宽为  $W$ 、高为  $H$  的大矩形框和  $n$  个宽高分别为  $w_1, h_1, w_2, h_2, \dots, w_n, h_n$  的小矩形块(不失一般性,可设所有已知量均为正整数),要求将这些小矩形块尽可能多地放入矩形框内,使框的面积利用率达到最大。放入块须完全在框内,边与框的边平行且任意两块间无嵌入。

二维矩形 Packing 问题是关于空间利用的典型的 NP 难度问题,简记此问题为 P。目前问题 P 代表性的求解方法为启发式算法,包括通用的遗传法<sup>[1,2]</sup>、禁忌法<sup>[3]</sup>、模拟退火<sup>[4]</sup>及根据问题特点设计的穴度法<sup>[5,6]</sup>。本文拟给出一个复杂度仅与待放块个数相关的完备算法。

### 2 求解二维矩形 Packing 问题的传统完备算法

本节拟先给出一种基于枚举法的完备算法以及相关的证明。

#### 2.1 左下平移算法 $A_0$

在各块合法放置的前提下,称  $X = \{(x_{i1}, x_{i2}), (x_{i2}, y_{i2}), \dots, (x_{ik}, y_{ik})\}$  为一个格局,其中  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  是  $\{1, \dots, n\}$  的子集且  $(x_{ik}, y_{ik})$  为块  $k$  的左下角坐标。例如,若框大小为  $7 \times 4$ ,有 6 个待放块,大小分别为  $1 \times 1, 1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, 2 \times 1, 4 \times 1$ ,其放置方法如图 1 所示,则对应的格局  $X = \{(0, 1), (4, 2), (2, 1), (6, 0), (4, 1), (2, 3)\}$ 。

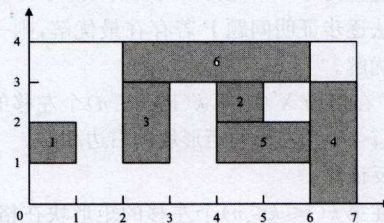


图 1 格局 X

左下平移算法  $A_0$ :

设格局  $X = \{(x_{i1}, x_{i2}), (x_{i2}, y_{i2}), \dots, (x_{ik}, y_{ik})\}$  为一合法格局。

1. 从  $X$  出发做水平左移动作

(1) 所有块按照  $(x, y)$  的字典序从小到大排序;

(2) 按序将当前矩形块水平左移,直至其左边与某块或框的左壁相贴(即交的边长大于 0)。

由此得到格局  $X'$ 。

对图 1 中格局做水平左移动作后的格局如图 2 所示。

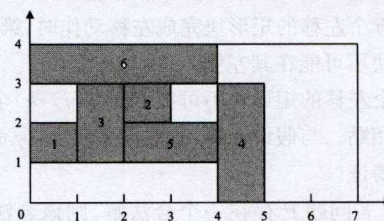


图 2 水平左移后的格局  $X'$

到稿日期:2013-05-29 返修日期:2013-07-08 本文受国家自然科学基金(61173180)资助。

何 琨(1972—),女,副教授,CCF 会员,主要研究方向为 NP 难度问题的算法设计、数据挖掘,E-mail:brooklet60@gmail.com;姚鹏程(1994—),男,主要研究方向为 NP 难度问题的算法设计;李立文(1993—),男,主要研究方向为 NP 难度问题的算法设计。

2. 从  $X'$  出发做竖直下移动作

(1) 所有块按照  $(y, x)$  的字典序从小到大排序;

(2) 按序对当前矩形块竖直下移, 直至其下边与某块或框的下壁相贴。

由此得到格局  $X''$ , 返回  $X''$ 。

对图 2 中格局做水平下移动作后的格局如图 3 所示。

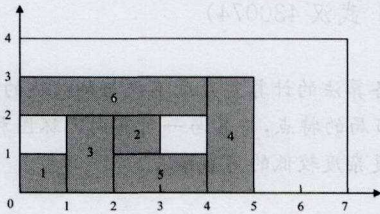


图 3 竖直下移后的格局  $X''$

## 2.2 整数最优解的存在性证明

为了求解问题 P, 需对待放块集  $A$  的每个子集  $S$ , 以及  $S$  中每个块的左下角坐标(由于块的宽和高已确定, 因此由其左下角坐标和放置方向即可唯一确定其放置位置)和方向(横放或竖放)进行穷举。由于块放入后, 可在框内平滑移动, 其候选的放置位置有无限多种可能, 因此问题 P 的搜索空间为无限大。

目前国际上讨论此问题的计算复杂性时, 均默认块的左下角坐标为整数值, 即只搜索整格点的情况, 但未给出严格的证明。本节拟给出严格的证明, 即若问题 P 存在最优解, 则一定存在块放置位置都为整数坐标的最优解。

设框的左壁为第 0 个宽为 0 的特殊矩形。本小节将利用左下平移算法逐步证明问题 P 若存在最优解, 则一定存在整数坐标的最优解。

**命题 1** 在格局  $X'$  中, 第  $k(1 \leq k \leq n)$  个左移的矩形块必然和第  $i(0 \leq i < k)$  个左移的矩形块的右边相贴。

证明:(反证法)

假设存在第  $k(1 \leq k \leq n)$  个左移的矩形块在格局  $X'$  中不和前  $k-1$  个左移的矩形块中的任意一个矩形块的右边相贴。

又由第 1 步的移动规则可知矩形块在完成动作后必然和框左壁或其他矩形块的右边相贴。

$\therefore$  结合假设和第 1 步的移动规则易知, 第  $k$  个左移的矩形块只可能和第  $j(j > k)$  个左移的矩形块的右边相贴。

$\therefore$  所有块是按照  $(x, y)$  的字典序从小到大的排序的。

$\therefore$  在第  $k$  个矩形块进行左移动作时, 第  $j(j > k)$  个左移的矩形块不可能在其左侧。

$\therefore$  在第  $k$  个左移的矩形块进行左移动作时, 第  $j(j > k)$  个左移的矩形块的位置不发生任何变化。

$\therefore$  在第  $k$  个左移的矩形块完成左移动作时, 第  $j(j > k)$  个左移的矩形块不可能在其左侧。

$\therefore$  第  $k$  个左移的矩形块不可能和第  $j(j > k)$  个左移的矩形块的右边相贴。与假设矛盾, 故假设不成立, 原命题成立。

命题 1 得证。

**命题 2** 若问题 P 存在一个合法解, 则该合法解通过左下平移算法  $A_0$  得到的格局  $X''$  对应于布局中每个矩形块的左下角坐标均为整数。

证明:

首先证明  $X''$  中的每个矩形块的左下角的  $x$  坐标均为整数。

$\therefore$  第 2 步中并未改变任一块左下角的  $x$  坐标。

$\therefore$  只需证明  $X'$  中每个矩形块左下角的  $x$  坐标均为整数值。

用数学归纳法证明  $X'$  中任一矩形块左下角的  $x$  坐标均为整数值:

1. 对于第 1 个移动的矩形块:

$\therefore$  所有块是按照  $(x, y)$  的字典序从小到大的排序的。

$\therefore$  在初始格局  $X$  中此块必然在所有块的最左边。

$\therefore$  由第 1 步的移动规则易知该块在完成左移动作后必然与框的左壁相贴。

$\therefore$  其左下角  $x$  坐标等于 0, 为整数值。

2. 假设前  $k(k \geq 1)$  个矩形块的左下角  $x$  坐标为整数。

对于第  $k+1$  个矩形块:

由命题 1 可知, 第  $k+1$  个移动的矩形块在格局  $X'$  中必然与框的左壁相贴, 或者和第  $i(1 \leq i \leq k)$  个移动的矩形块的右边相贴。

(1) 若该块在格局  $X'$  中与框的左壁相贴, 则其左下角  $x$  坐标等于 0, 为整数。

(2) 若该块在格局  $X'$  中和第  $i(1 \leq i \leq k)$  个矩形块相贴, 则有  $x_{k+1} = x_i + \text{length}[i]$ , 其中  $\text{length}[i]$  表示块  $i$  在  $x$  方向的长度。

$\therefore$  由假设知  $x_i$  为整数, 而由问题 P 的定义可知  $\text{length}[i]$  为整数。

$\therefore x_{k+1}$  是整数。

综上, 第  $k(1 \leq k \leq n)$  个矩形块, 其左下角  $x$  坐标为整数。即  $X'$  中每个矩形块的左下角  $x$  坐标均为整数。

$\therefore X''$  中每个矩形块的左下角  $x$  坐标均为整数。

同理可证  $X''$  中每个矩形块的左下角  $y$  坐标也均为整数。

命题 2 得证。

**命题 3** 若问题 P 存在最优解, 则一定存在对应布局中每个矩形块左下角坐标均为整数的最优解。

证明:

设格局  $X = \{(x_{i1}, x_{i2}), (x_{i2}, y_{i2}), \dots, (x_{ik}, y_{ik})\}$  为问题 P 的最优解。显然存在以下两种情况:

(1) 若  $X$  对应布局中每个矩形块左下角坐标均为整数。

这种情况下, 显然  $X$  就是满足条件的最优解, 命题 3 成立。

(2) 若  $X$  对应布局中存在矩形块左下角坐标不均为整数。

$\therefore$  最优解必然为合法解。

$\therefore X$  为合法解。

$\therefore$  由命题 2 可知, 合法解  $X$  通过左下平移算法  $A_0$  可以得到另一合法解  $X''$ , 且  $X''$  对应布局中每个矩形块的左下角坐标均为整数。

$\therefore$  左下平移算法  $A_0$  并未改变格局中矩形块的数量。

$\therefore X''$  的矩形框面积利用率 =  $X$  的矩形框面积利用率。

$\therefore X''$  也是最优解。

命题 3 得证。

至此, 问题 P 整数最优解的存在性得到了完整的证明。

## 2.3 经典的完备算法 $A_1$ 及其复杂性分析

利用 2.2 节的命题和左下平移算法  $A_0$  可以轻松得到一个基于枚举法的完备算法  $A_1$ 。

完备算法  $A_1$ :

1. 枚举待放块集的每个子集  $S$ ;
2. 枚举  $S$  中每个矩形块所有左下角整数坐标;
3. 枚举  $S$  中每个矩形块横竖两种放置方向;
4. 判断得到格局的合法性, 若不合法, 返回 1;
5. 计算空间利用率, 若其比当前最优解的空间利用率高, 则更新最优解, 返回 1;
6. 输出最优解及其空间利用率。

在算法  $A_1$  中, 每个块或者放入或者不放入, 若放入, 其放置方向有两种。因此, 其在框内不同整格点上的放置方式为  $2(W-w_i+1)(H-h_i+1) \leq 2WH$ , 不在框内时只有一种情况。故完备算法  $A_1$  最多只需要  $(2WH+1)^n$  次搜索, 检验每个格局的合法性, 并输出其中框面积利用率最高的一个及其对应的布局即可精确求解问题  $P$ 。

因此, 问题  $P$  的计算复杂度为  $O((2WH+1)^n)$ 。

至此, 我们将问题  $P$  的解空间由无限大减为有限大小。但其解空间仍与框的尺寸  $W, H$  有关。由于求解网络流问题的 Ford-Fulkerson 算法<sup>[7]</sup> 的计算复杂度与网络的最小割有关, 使得 FF 算法对一些顶点数、边数不变但最小割值很大的网络计算复杂度过高。因此, 随后有研究者给出了仅与网络的顶点数和边数有关的多种算法<sup>[8]</sup>。类似地, 对问题  $P$ , 在  $W, H$  的值很大但待放块数并不多的情形下, 上述完备算法的计算复杂度过高。是否可以找到计算复杂度仅与待放块数有关的算法呢? 下一节拟给出一个只与待放块数  $n$  有关的完备算法。

### 3 完备算法 $A_2$

通过观察完备算法  $A_1$  可以发现它搜索了很多无用的 (即矩形有重叠部分) 布局, 而实际上只需搜索左下平移算法有可能得到的合法布局构成的搜索空间  $S$  即可。基于 Prüfer 编码, 本节将可能生成的所有布局与一有向图  $G(V, E)$  对应起来, 然后将  $G(V, E)$  转化为树并编码化, 从而降低计算的复杂度。

#### 3.1 $G(V, E)$ 的构造

##### 1. X-图

①构造节点: 将框的左壁看作一宽为 0、高为  $H$  的特殊块, 对应节点 0; 矩形块  $i$  对应节点  $i$ 。

②构造有向边: 记块  $i$  的左下角坐标为  $(x_i, y_i)$ , 右上角坐标为  $(x_i', y_i')$ 。对于块  $i$  和块  $j$ , 若  $x_i' = x_j$  (即块  $i$  的右上角  $x$  坐标与块  $j$  的左下角  $x$  坐标相等), 则在 X-图中生成一条由节点  $i$  指向节点  $j$  的有向边。

③边权: 所有边的权值固定为 1。

④点权: 节点  $i$  的权值为矩形块  $i$  的宽, 节点 0 的权值为 0。

图 2 中格局  $X''$  对应的 X-图如图 4 所示。其边权均为 1, 节点的权为矩形块  $i$  的宽。

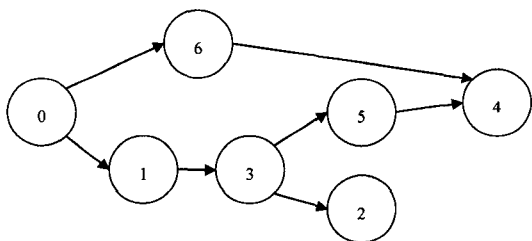


图 4 X-图

##### 2. Y-图

与 X-图的构造方法类似:

①构造节点: 将框的下壁看作一宽为  $L$ 、高为 0 的特殊块, 其对应节点 0; 矩形块  $i$  对应节点  $i$ 。

②构造有向边: 记块  $i$  的左下角坐标为  $(x_i, y_i)$ , 右上角坐标为  $(x_i', y_i')$ 。对于块  $i$  和块  $j$ , 若  $y_i' = y_j$  (即块  $i$  的右上角  $y$  坐标与块  $j$  的左下角  $y$  坐标相等), 则在 X-图中生成一条由节点  $i$  指向节点  $j$  的有向边。

③边权: 所有边的权值固定为 1。

④点权: 节点  $i$  的权值为矩形块  $i$  的高, 节点 0 的权值为 0。

图 3 中格局  $X''$  对应的 Y-图如图 5 所示。其边权均为 1, 节点的权为矩形块  $i$  的宽。

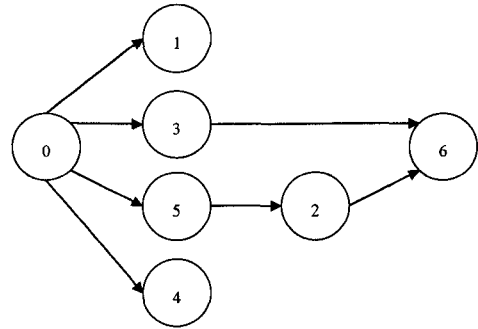


图 5 Y-图

#### 3.2 $G(V, E)$ 的基本性质

假定框左壁为矩形块 0, 通过观察不难发现 X-图的一些基本性质。

**性质 1** 除节点 0 的入度为 0 以外, 其余节点的入度均  $\geq 1$ 。

证明:

(1) 矩形块 0 左边无矩形块, 故节点 0 的入度为 0。(2) 在算法  $A_0$  水平左移过程中, 任意一个矩形块  $i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$  均与矩形块  $j (j \in \{0, 1, \dots, n\}, j \neq i)$  相贴, 即有  $x_i' = x_j'$ 。而在水平下移动作中,  $i, j$  的  $x$  坐标均不变。因此节点  $i$  在 X-图必然至少有一条边指向它, 即入度  $\geq 1$ 。

**性质 2** X-图为有向无环图。

证明:

假设 X-图中存在环  $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ , 则  $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_m} < x_{i_1}$ , 矛盾。故 X-图为有向无环图。

**性质 3** 从节点 0 至节点  $i$  路径上的所有节点的点权和代表矩形  $i$  的右上角  $x$  坐标。

证明:

用  $dist[j]$  表示节点 0 到节点  $j$  的边权和。例如图 4 中  $dist[1] = dist[6] = 1, dist[3] = 2$ 。

定义  $K_i = \{j \mid dist[j] = i\}$ 。例如图 4 中  $K_1 = \{1, 6\}$ 。

现用数学归纳法证明对于  $\forall i \in [0, n]$  及  $\forall j \in K_i$ , 有节点 0 至节点  $j$  上所有节点的点权和代表矩形  $j$  的右上角  $x$  坐标成立。

1) 当  $i=0$  时,  $K_0 = \{0\}$ , 而矩形 0 的点权及宽为 0, 显然结论成立。

2) 假设对于  $i=m (0 \leq m < n)$  时结论成立。

对于  $\forall j \in K_i$ , 由性质 1 可知必然存在节点  $l$  使得  $l$  指向

$j$ , 即  $x_i' = x_j$ .

$\therefore X$ -图中所有边权值固定为 1,

$\therefore$  必然有  $l \in K_i$ .

$\therefore x_i'$  等于节点 0 至节点  $l$  的点权和.

$\therefore x_j$  等于节点 0 至节点  $l$  的点权和.

$\therefore$  节点  $j$  的点权为矩形  $j$  的宽  $w_j$ ,

$\therefore x_j' + w_j$  等于节点 0 至节点  $j$  的点权和,

$\therefore$  对于  $i+1$  结论也成立.

综上所述, 对于  $\forall i \in [0, n]$  及  $\forall j \in K_i$ , 有节点 0 至节点  $j$  上所有节点的点权和代表矩形  $k$  的右上角  $x$  坐标成立.

而显然,  $K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m \cup \dots = \{0, 1, \dots, n\}$

故原命题成立.

**性质 4** 对任一节点  $i$ , 从节点 0 至节点  $i$  若有多条路径, 则这些路径的点权和相等.

证明:

节点 0 至节点  $i$  有多条路径共有两种情况:

(1) 节点  $i$  被多个节点指向.

(2) 节点  $i$  之前的某个节点  $j$  被多个点指向, 而节点  $j$  到节点  $i$  只有一条路径.

分情况讨论:

(1) 若节点  $i$  被多个节点  $i_1, i_2, \dots, i_m$  指向.

由有向边的构造方法可知必然有  $x_{i_1}' = x_i, x_{i_2}' = x_i, \dots, x_{i_m}' = x_i$ .

$\therefore x_{i_1}' = x_{i_2}' = \dots = x_{i_m}'$ .

$\therefore$  从节点 0 至节点  $i$  的路径的上所有节点的点权和代表矩形  $i$  的右上角  $x$  坐标.

$\therefore$  节点 0 至节点  $k_1, k_2, \dots, k_m$  的路径的点权和相等.

(2) 节点  $i$  之前的某个节点  $j$  被多个点指向, 而节点  $j$  到节点  $i$  只有一条路径.

由(1)易知节点 0 到节点  $j$  的任意路径的点权和相等.

$\therefore$  节点  $j$  到节点  $i$  只有一条路径.

$\therefore$  节点 0 到节点  $i$  的任意路径的点权和相等.

综上所述, 若有从节点 0 至节点  $i$  的多条路径, 则这些路径的点权和相等.

**性质 5** (节点  $i$  在  $X$ -图中的点权, 节点  $i$  在  $Y$ -图中的点权)  $\in \{(w_i, h_i), (h_i, w_i)\}$ .

即当节点  $i$  在一个图中的点权已知时, 其在另一个图中的点权固定.

不难证明,  $Y$ -图也有与  $X$ -图类似的性质. 由上述性质可以得到另一条重要性质.

**性质 6** 一对( $X$ -图,  $Y$ -图)与一个格局一一对应.

证明:

(1) 一个格局唯一对应一对( $X$ -图,  $Y$ -图).

由  $X$ -图和  $Y$ -图的构造规则易知, 由一个格局只能生成一对确定( $X$ -图,  $Y$ -图).

(2) 一对( $X$ -图,  $Y$ -图)唯一对应一个格局.

先证明  $X$ -图中所有节点对应的矩形左下角  $x$  坐标唯一确定.

由  $X$ -图性质 3 可知, 节点 0 到节点  $i$  的路径的点权和等于矩形  $i$  的右上角坐标.

$\therefore$  节点  $i$  的点权即为矩形  $i$  的宽.

$\therefore$  矩形  $i$  的左下角  $x$  坐标可以由节点 0 到节点  $i$  的路径

点权和和节点  $i$  的点权确定.

而由  $X$ -图性质 4 可知, 若对某节点  $i$ , 有从节点 0 至节点  $i$  的多条路径, 则这些路径的点权和相等.

$\therefore$  矩形  $i$  的左下角  $x$  坐标唯一确定. 命题得证.

同理可以证明,  $Y$ -图中所有节点对应的矩形左下角  $y$  坐标唯一确定.

综上所述, 一对( $X$ -图,  $Y$ -图)与一个格局一一对应.

因此只需要搜索所有的  $X$ -图和  $Y$ -图即可搜索到所有的格局. 但是想要得到所有可能的  $X$ -图与  $Y$ -图是比较困难的, 下节将其转化为结构更简单的形式.

### 3.3 有向图向树的转化

通过  $X$ -图的性质 3 可以知道, 若对某节点  $i$ , 有从节点 0 至节点  $i$  的多条路径, 则这些路径的点权之和相等. 由性质 4 可知路径的点权和代表矩形  $i$  的右上角  $x$  坐标. 因此仅需知道节点 0 至节点  $i$  的一条路径即可唯一确定矩形  $i$  的放置位置.

由此可以得到由  $X$ -图转换为  $X$ -树的规则:

(1) 在  $X$ -图中若存在节点  $i$  被多条边指向, 则只保留其中一条边.

(2) 将所有有向边改为无向边.

图 4 对应的  $X$ -树如图 6 所示.

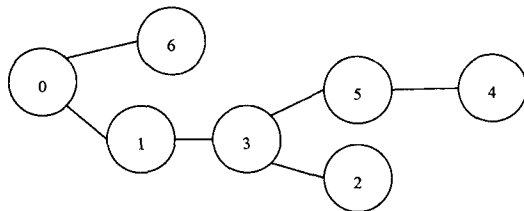


图 6  $X$ -树

**命题 4** 按照上述规则得到的一定是一棵树.

证明:

(1)  $X$ -图为一个节点数为  $n+1$  的有向无环图.

在  $X$ -图执行规则(1)后得到的新图  $G'$  中, 显然除了节点 0, 其余节点的入度均为 1, 故新图  $G'$  仅有  $n$  条有向边.

在  $G'$  执行规则(2)后得到新图  $G''$ ,  $G''$  显然为无向图.

$\therefore G'$  中对任意节点  $i$  必然存在节点 0 到  $i$  的一条路径.

$\therefore$  在  $G''$  中对任意节点  $i$  必然存在节点 0 到  $i$  的一条路径.

$\therefore$  对任意两个节点  $i$  和  $j$  必然存在节点 0 到  $i$  和 0 到  $j$  的路径, 即存在节点  $i$  到  $j$  的路径.

$\therefore G''$  为无向连通图.

下证  $G''$  中无环, 假设  $G''$  中存在简单回路, 简单回路中包含  $k$  个点, 则简单回路中必然有  $k$  条边.

$\therefore G''$  为连通图.

$\therefore$  剩余的  $n-k+1$  个节点中必然每个节点均有边与之相连, 且有一个节点与回路有边相连.

$\therefore$  至少还有  $n-k+1$  条边.

$\therefore G''$  中共有  $n+1$  条边, 与条件矛盾, 假设不成立.

$\therefore G''$  为无向连通图, 有  $n$  条边, 且没有简单回路.

$\therefore G''$  为一棵树, 显然节点 0 为  $G''$  的根. 由此命题得证.

同理, 可以依据上述规则得到  $Y$ -树.

由于保留边的随机性, 显然当节点数  $n$  确定时, 一对( $X$ -图,  $Y$ -图)可能对应多对( $X$ -树,  $Y$ -树), 但一对( $X$ -树,  $Y$ -树)唯

一一对应(X-图, Y-图)。

由性质 6 可知一对(X-图, Y-图)是和一个格局一一对应的,故易知一个格局可能对应多对(X-树, Y-树),但一对(X-树, Y-树)唯一对应一个格局。即 $|X\text{-树}, Y\text{-树对应的格局}| \geq |X\text{-图}, Y\text{-图对应的格局}|$ ,这保证了利用 X-树和 Y-树来求解问题 P 时搜索空间的完整性。

### 3.4 X-树, Y-树的编码表示

为了方便在搜索时遍历到所有的 X-树和 Y-树,可以将 X-树与 Y-树编码化,通过搜索所有可能的编码来间接地搜索到所有的 X-树和 Y-树。而实现树的编码化可以借用 Prüfer 编码的思路,将树转变成 Prüfer 编码<sup>[9]</sup>,从文献[9]中易知 Prüfer 编码和一棵树唯一对应,因此可以通过搜索  $n+1$  个节点的树的所有 Prüfer 编码来找到所有可能的 X-树和 Y-树。

### 3.5 算法 $A_2$

设  $n$  个矩形块构成集合  $S$

1. 从 1 至  $n$  枚举初始待放矩形块个数  $num$ ;
2. 枚举集合  $S$  的元素个数为  $num$  的子集,代表待放矩形块;
3. 预生成所有长度为  $num$  的 01 序列于数组  $A$  中,表示方向序列(矩形块 0 方向及位置固定,故无需枚举其方向);
4. 预生成所有长度为  $num+1$  的 Prüfer 编码于数组  $B$  中;
5. 枚举  $B$  中元素组成的排列  $\langle B_1, B_2 \rangle$  于数组  $C$  中,分别代表 X-树和 Y-树的结构;
6. 枚举  $A$  中元素和  $C$  中元素组成的组合  $\langle A_i, C_j \rangle$ ,并判断其对应格局的合法性,若合法则保存该方案,并跳转 1;
7. 输出保存的最优方案并退出。

### 3.6 $A_2$ 的正确性证明

**命题 5** 算法  $A_2$  枚举了所有的待放块集合。

证明:(反证法)。

假设存在待放块集合  $S'$  未被算法  $A_2$  枚举。设该集合元素个数为  $k$ ,显然有  $1 \leq k \leq n$ 。

$\therefore$  由  $A_2$  中第 1 步可知必然存在  $num=k$  的情况。

而当  $num=k$  时,  $A_2$  在第 2 步会枚举  $S$  所有个数为  $num$  的子集。由此可推出  $S' \notin S$ ,与条件矛盾,假设不成立,原命题成立。

命题 5 得证。

**命题 6** 算法  $A_2$  枚举了所有的(X-树, Y-树)对。

证明:(反证法)。

假设存在(X-树, Y-树)对未被算法  $A_2$  枚举。设 X-树中节点数为  $k$ ,则显然 Y-树中节点数也为  $k$ 。

$\therefore$  有  $2 \leq k \leq n+1$ 。

$\therefore$  必然存在  $num=k-1$  的情况。

而当  $num=k-1$  时,算法  $A_2$  在第 4 步会枚举所有长度为  $num+1$  的 Prüfer 编码。而从文献[9]中易知 Prüfer 编码和一棵树唯一对应。

$\therefore$  算法  $A_2$  在第 4 步枚举了所有节点数为  $num+1$  的树结构,并保存于数组  $B$  中。

$\therefore$  算法  $A_2$  在第 5 步枚举了所有  $\langle B_1, B_2 \rangle$  的排列。

$\therefore$  结合上述结论易知,算法  $A_2$  在第 5 步枚举了所有形如(树 1, 树 2)的对。

$\therefore$  显然算法  $A_2$  在第 5 步枚举了所有节点数为  $num+1$ ,

即节点数为  $k$  的(X-树, Y-树)对,与假设矛盾,原命题成立。

命题 6 得证。

**命题 7** 算法  $A_2$  枚举了所有的布局情况。

证明:

$\therefore$  由命题 6,算法  $A_2$  枚举了所有的(X-树, Y-树)对。再结合 3.2 节和 3.3 节可知,算法  $A_2$  枚举了所有的格局。

$\therefore$  当待放块一定,且方向一定时,算法  $A_2$  枚举了所有待放块的拜访情况。

$\therefore$  由命题 5 可知算法  $A_2$  枚举了所有的待放块集合。而算法  $A_2$  在第 3 步枚举了长度为  $num$  的所有方向序列。

$\therefore$  算法  $A_2$  枚举了所有的待放块集合,对于每个待放块集合枚举了所有对应长度的方向序列以及格局。

$\therefore$  显然算法  $A_2$  枚举了所有的布局情况。

命题 7 得证。

命题 7 说明了算法  $A_2$  求解问题 P 时搜索空间的完整性。由于搜索空间是完整的,并且算法  $A_2$  会保存并输出其中最优的合法解,因此  $A_2$  的正确性得到了证明。

### 3.7 $A_2$ 的时间复杂度

$n$  个元素的集合共有  $2^n$  个子集,算法描述中第 1, 2 步实际上即为枚举矩形块的所有子集,时间复杂度为  $O(2^n)$ 。

长度为  $n$  的方向序列共有  $2^n$  个,而  $n+1$  个节点的树的 Prüfer 编码共有  $(n+1)^{n-1}$  个。算法描述中第 4, 5 步即为枚举所有(X-树, Y-树)对,时间复杂度为  $O((n+1)^{n-1}(n+1)^{n-1})$ 。

算法描述中第 6 步即确定(X-树, Y-树)中节点代表的矩形的放置方向。由 3.2 节的性质 5 可知只需确定 X-树中节点代表的矩形的放置方向即可同时确定 Y-树中节点代表的矩形的放置方向。因此时间复杂度为  $O(2^n(n+1)^{n-1}(n+1)^{n-1})$ 。

因此根据 3.5 节中的算法描述易得到算法  $A_2$  的时间复杂度为  $O(2^n 2^n (n+1)^{n-1} (n+1)^{n-1})$ ,即为  $O(2^{2n} (n+1)^{2n-2})$ 。由其时间复杂度可以发现算法  $A_2$  彻底脱离了容器宽  $W$  和高  $H$  的关系,仅与矩形块数量  $n$  有关。该算法在处理  $W$  和  $H$  很大的问题时在计算时间上会表现出比算法  $A_1$  更好的性能。

**结束语** 基于 Prüfer 编码以及 X-树和 Y-树的模型,本文提出了一种求解二维矩形 Packing 问题的较低复杂度的完备算法。它充分利用左下平移算法所形成的格局的特点,使枚举算法的时间复杂度摆脱了框的长和宽的限制,仅与待放矩形块个数有关。这为设计 Packing 问题的完备算法提供了一种新的思路。

### 参考文献

- [1] Gehring H, Bortfeldt A. A parallel genetic algorithm for solving the container loading problem [J]. International Transactions in Operational Research, 2002, 9(4): 497-511
- [2] Bortfeldt A, Gehring H. A hybrid genetic algorithm for the container loading problem [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 131(1): 143-161
- [3] Bortfeldt A, Gehring H. A tabu search algorithm for weakly heterogeneous container loading problems [J]. OR Spectrum, 1998, 20(4): 237-250

(下转第 89 页)

射匹配描述的是两张关系表中每个属性都可以在对应的关系表中找到对应匹配属性。部分匹配为两张关系表中一部分属性无法匹配对应属性。

### 5.2.1 一对一匹配与满射匹配

每个统计图中横轴为属性个数,纵轴为匹配准确度(单位:%)。其中准确度用  $P$  表示, $c$  为通过条件互信息得到的成果匹配结果, $n$  为两匹配表之间实际正确匹配对数量,则准确匹配度公式为: $P=c/n$ 。

实验中,两张关系表中的属性一样,属性值随机产生。通过多重迭代筛选方法及条件互信息匹配方法得到匹配结果与原先匹配结果准确度情况,如图 2 所示。

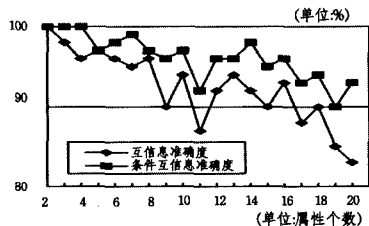


图 2 一对一匹配 & 满射匹配

图 2 中 20 个属性值皆随机取得。由图 2 可知,条件互信息求得值,匹配准确度都在 90% 以上。这样的准确度比互信息准确度都要高。同时,条件互信息匹配准确度在属性数为奇数、偶数的时候,准确度会有所波动。随着属性个数的增多,匹配的精度会略有下降。满射匹配情况在经过实验后可得到的匹配准确度与一对一匹配略有下降。整体的准确度匹配水平与一对一匹配较相似。

### 5.2.2 部分匹配

每个统计图中横轴为属性个数,纵轴为匹配准确度(单位:%)。其中准确度用  $P$  表示, $c$  为通过条件互信息得到的成果匹配结果, $n$  为两匹配表之间实际正确匹配对数量,则准确匹配度公式为: $P=c/n$ 。

实验中,两张关系表中的属性不完全一样,属性值随机产生。通过多重迭代方法及条件互信息匹配方法得到匹配结果与原先匹配结果准确度情况,如图 3 所示。

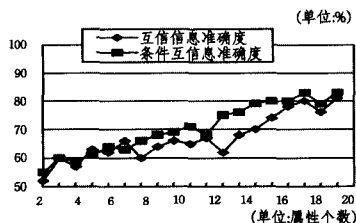


图 3 部分匹配

图 3 为部分匹配准确度情况。由于部分匹配的特殊情况,有一些属性是没有对应匹配属性的。同时,参数  $\theta$  的取值是不确定的。这里,在给定参数  $\theta$  数值的情况下统计条件互

信息与互信息的准确度。图 3 便是参数  $\theta$  取 1.0 时,条件互信息与互信息匹配的情况。由图可知,条件互信息的准确度仍然比互信息的准确度要高。在属性个数越来越多的情况下,匹配准确度在 80% 左右徘徊。属性个数少与属性个数多的准确率区别明显。此外, $\theta$  参数取值的异同也会影响最后的匹配结果。如果参数  $\theta$  越大,则相对距离就越小,匹配效果也就越好。相反,如果参数  $\theta$  取值越小,距离值便越大。匹配效果越差。这里参数  $A$  取值的大小是依照不同匹配效果而定的。如果匹配结果需要数量不多但匹配可靠度高的结果,那么参数  $\theta$  则应相应取大一些。相反,参数  $\theta$  取值应相应小一些。

**结束语** 本文针对模式匹配不准确问题,提出了两步解决方法,即多重迭代筛选方法及条件互信息匹配方法,解决了模式匹配不准确的问题,并提高了匹配的效率和。

下一步研究工作是研究多对最优匹配属性对匹配结果的影响及效率,并需要对部分匹配距离公式模型进行优化,使得匹配的准确度能更高,并简化算法。此外,今后需进一步研究不确定模式匹配中,同一表属性值相似度分布相同情况下的特殊模式匹配问题。

## 参考文献

- [1] 翁年凤,刁兴春,曹建军,等. 不确定模式匹配研究综述[J]. 计算机科学, 2011,38(12):1-5
- [2] Doan A H, Halevy A Y. Semantic integration research in the database community: A brief survey [J]. AI magazine, 2005, 26(1):83
- [3] Kang J, Naughton J F. On schema matching with opaque column names and data values[J]. International Conference on Management of Data; Proceedings of the 2003 ACM SIGMOD international conference on Management of data, 2003, 9(12): 205-216
- [4] Jaiswal A, Miller D J, Mitra P. Schema matching and embedded value mapping for databases with opaque column names and mixed continuous and discrete-valued data fields [J]. ACM Transactions on Database Systems (TODS), 2013, 38(1):2
- [5] Rabinovich B, Last M. Uninterpreted Semi-Automatic Schema Matching Approach Using Inter-Attribute Dependencies[C]// NATO Workshop on Semantic Interoperability Framework. Oslo, Norway. 2011
- [6] 吕锋,王虹,刘皓春. 信息理论与编码[M]. 北京:人民邮电出版社, 2004:1-200
- [7] 王萼芳,石生明. 高等数学(第三版)[M]. 北京:高等教育出版社, 2003
- [8] Chen W, Guo H, Zhang F, et al. Mining schema matching between heterogeneous databases[C]// 2012 2nd International Conference on Consumer Electronics, Communications and Networks (CECNet). IEEE, 2012:1128-1131

(上接第 59 页)

- [4] 张德富,彭煜,朱文兴,等. 求解三维装箱问题的混合模拟退火算法[J]. 计算机学报, 2009, 32(11):2147-2156
- [5] He Kun, Huang Wen-qi. An efficient placement heuristic for three-dimensional rectangular packing[J]. Computers & Operations Research, 2011, 38(1):227-233
- [6] 何琨,黄文奇. 三维矩形 Packing 问题的拟人求解算法[J]. 中国

科学(F 辑), 2010, 40(12):1586-1595

- [7] Ford L R, Fulkerson D R. Maximal flow through a network [J]. Canadian Journal of Mathematics, 1956, 8: 399-404
- [8] Andrew V G, Robert E T. A new approach to the maximum flow problem [J]. Journal of the ACM, 1988, 35(4):921-940
- [9] Prüfer H. Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen [J]. Archiv für. Mathematik und Physik, 1918, 27:742-744