

一种新变分方法在图像分割中的应用

罗志宏^{1,2} 冯国灿²

(中山大学信息科学与技术学院 广州 510275)¹ (中山大学数学与计算科学学院 广州 510275)²

摘要 针对传统的水平集方法用于图像分割时速度较慢的现象,提出一种新的变分方法(PDE)。首先修改了 CV 模型的能量函数,然后用凸松弛方法将其转化为凸优化问题,并引入一个辅助变量,再采用高效和无条件稳定的 AOS 算法,测试实验获得了较好的分割效果。实验结果表明,所提出的变分方法(PDE)是可行有效的。

关键词 图像分割,水平集方法,凸松弛方法,辅助变量,AOS 算法

中图分类号 TP391.41 文献标识码 A

New Variational Model for Image Segmentation

LUO Zhi-hong^{1,2} FENG Guo-can²

(School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)¹

(School of Mathematics and Computational Sciences, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)²

Abstract Due to traditional variational level set for image segmentation with slowly computing efficiency, a new variational model(PDE) was proposed. Firstly, the energy function was modified, then the minimization problem was transformed to convex optimization problem via convex relaxation technique, and a new auxiliary variable was introduced, at last, the additive operator splitting(AOS) numerical algorithm was applied. The effective results show that the proposed model for image segmentation is feasible and performs better than conventional variational model.

Keywords Image segmentation, Level set, Convex relaxation technique, Auxiliary variable, AOS algorithm

1 引言

图像分割是按照一定的规则,将图像分成各具特性的区域并把感兴趣的目标提取出来,以对目标进行识别、分析的过程,它对于图像分析、模式识别、计算机视觉有重要的意义^[1,2]。近 30 年来,基于变分和偏微分方程(PDEs, partial differential equations)的图像处理已成为研究的一个热点领域。源于活动轮廓模型的变分 PDEs 方法综合了几何学、力学、逼近论的思想,成为图像处理中的一个重要工具。而活动轮廓模型与水平集理论相结合的图像分割方法,其原理是先将平面上闭合曲线隐含表达为曲面函数的水平集,建立曲线变形的能量函数,用变分法求能量函数的极小解,使闭合曲线逐渐逼近图像的目标边缘。该方法由于能处理曲线拓扑结构的变化,具有稳定的数值解,已广泛应用在图像分割、运动跟踪、3D 重建等领域。

Chan 和 Vese 提出的 CV 模型^[3]是活动轮廓模型的一个著名的分割模型(方法),该模型依据区域分割原理,应用区域内灰度的均值来区分不同的区域,从而得到边界;然而其缺点是迭代次数多,限制了许多具有实时计算要求的应用。如何设计有效的能量函数或相应的演化方程,以达到所需的分割效果,是近年来研究的一个热点。至今已有不少学者对 CV

模型做了有意义的改进,如:将模型的保真项替换为由贝叶斯公式、极大后验估计方法或信息论方法来给出^[4-6];假定图像的不同区域的像素服从某一特定的分布(如高斯分布)^[7]。另外,对模型的求解算法的研究也是一个重要的领域,如:通过引入一个辅助变量,并用全变差范数的对偶公式给出模型的一种整体极小求解方法^[8-10]。根据数值实验可知,现行的变分模型采用传统的水平集方法^[11-13]对较简单的图像进行分割是适合的,但对较复杂的图像分割往往耗时较多。

本文在一些经典的分割模型的基础上,提出一种图像分割的变分模型(PDE),先用凸松弛方法^[8]将其转化为凸优化问题,然后通过引入辅助变量连结一些拟合能量项,并采用高效且无条件稳定的 AOS 算法^[14]对一些图像进行数值实验。实验结果表明,本文提出的方法(PDE)对图像的分割是快速可行的,并在一定程度上比某些方法的分割更准确。

2 现有的图像分割的活动轮廓模型(方法)

图像分割中的活动轮廓模型分为参数活动轮廓模型和几何活动轮廓模型两大类,其中参数活动轮廓模型(Snake 模型)是 Kass 等人^[1]于 1987 年提出的,它是一条由相应能量函数控制的可形变参数曲线,具有最小能量的闭合曲线即为目标轮廓。然而,Snake 模型有一些明显的缺点,例如:不能处

到稿日期:2011-01-30 返修日期:2011-04-25 本文受国家自然科学基金资助项目(60975083),国家自然科学基金—广东省自然科学基金联合项目(U0835005)资助。

罗志宏(1970—),博士生,讲师,主要研究方向为图像处理、模式识别,E-mail: xyluomail@163.com;冯国灿(1962—),博士,教授,博士生导师,主要研究方向为图像处理、模式识别、计算机视觉。

理形变曲线的拓扑变化;不能同时检测多个目标。针对 Snake 模型的缺点,一些学者提出了几何活动轮廓模型,这类模型基于曲线演化理论和水平集数值方法,可处理曲线演化过程中的模型分裂与融合的拓扑结构变化,如 Caselles 等人^[15,16]提出的测地活动轮廓模型,Mumford 和 Shah^[17]提出的 MS 模型;但是,它们在实际计算时都比较困难。2001 年,Chan 和 Vese^[3]针对 MS 模型的不足提出一种简化的 MS 模型,即 CV 模型,它适用于边缘很平滑或边缘不连续的图像分割,同时结合水平集演化方法,仅用一条初始闭合轮廓线便能检测出含有内部空洞的目标的内、外部边缘,应用起来大为简便。

CV 模型中,设待分割的图像 I 的定义域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界开集, $\partial\Omega$ 是它的边界,图像 $I: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ 被活动轮廓线 C 划分为目标 ω_0 和背景 ω_b 两个区域,各区域的平均密度分别为 $c_1, c_2; \lambda_1, \lambda_2, \mu \geq 0, \nu$ 都是常数; $\varphi(x, y)$ 为内正外负的水平集函数; $H(z)$ 是 Heaviside 特征函数, $\delta(z)$ 是 Dirac 函数, $\delta'(z) = H'(z)$ 是 $H(z)$ 在分布意义下的导数。它的能量函数以水平集方式表达为:

$$E(\varphi, c_1, c_2) = \mu \int_{\Omega} \delta(\varphi) |\nabla \varphi| dx dy + \nu \int_{\Omega} H(\varphi) dx dy + \lambda_1 \int_{\Omega} |I - c_1|^2 H(\varphi) dx dy + \lambda_2 \int_{\Omega} |I - c_2|^2 (1 - H(\varphi)) dx dy \quad (1)$$

右端第一项(活动轮廓线 C 的长度)是正则化项,第二项(C 的内部区域面积)由参数 ν 的符号选择不同可控制轮廓线向内收缩或向外膨胀,最后两项是保真项。

要寻找最优分割 C ,即最小化方程(1),可以利用梯度下降法,得到对应的演化方程组为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \delta(\varphi) \left\{ \mu \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) - \nu - \lambda_1 (I - c_1)^2 + \lambda_2 (I - c_2)^2 \right\} \\ &\quad \text{in } (0, \infty) \times \Omega \\ \frac{\delta(\varphi)}{|\nabla \varphi|} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\int_{\Omega} I(x, y) H(\varphi) dx dy}{\int_{\Omega} H(\varphi) dx dy} \\ c_2 &= \frac{\int_{\Omega} I(x, y) [1 - H(\varphi)] dx dy}{\int_{\Omega} [1 - H(\varphi)] dx dy} \end{aligned} \quad (3)$$

但是,包括 CV 模型^[3]在内的大多数分割模型都采用水平集方法,由于 $H(\varphi)$ 取值在非凸集 $\{0, 1\}$ 上,往往容易收敛到局部极小,且计算速度相对较慢。近年来, Bresson 等^[8-10]先对 $H(\varphi)$ 松弛到 $[0, 1]$,并通过引入一个辅助变量等方法,使数值求解效率优于以往的经典方法。

3 本文提出的一种变分分割模型(PDE)

式(1)中,前两项是计算活动轮廓线的长度和活动轮廓线所围内部区域面积的总和,它们的主要作用是保持轮廓线在演化过程中的光滑性而后两项(保真项)中的 c_1 和 c_2 是计算轮廓线的内部区域和外部区域总的密度均值,是背景和目标的区域信息,它们在该能量泛函中起主导作用,是轮廓线演化的主要驱动力。在这里我们考虑将保真项修改为同时计算轮

廓线的内部密度均值和外部密度均值与待分割图像的密度方差,这在一定程度上能缩短时间,即采用如下的能量泛函作为新模型的保真项:

$$E(\varphi, c_1, c_2) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} [I - c_1 H(\varphi) - c_2 (1 - H(\varphi))]^2 dx dy \quad (4)$$

固定 φ ,求能量(4)关于 c_1, c_2 的极小,则有:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [I - c_1 H(\varphi) - c_2 (1 - H(\varphi))] H(\varphi) dx dy &= 0 \\ \int_{\Omega} [I - c_1 H(\varphi) - c_2 (1 - H(\varphi))] (1 - H(\varphi)) dx dy &= 0 \end{aligned}$$

注意到 $H^2 = H, (1 - H)^2 = 1 - H, H(1 - H) = 0$, 于是,可推得式(4)中 c_1, c_2 的表达式与前面的式(3)相同。

固定 c_1, c_2 ,求能量(4)关于 φ 的极小,使用梯度下降法,同时考虑到 $\delta(\varphi) \geq 0$,在不影响演化方向的前提下,可得其对应的演化方程为:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda (c_1 - c_2) [I - c_1 H(\varphi) - c_2 (1 - H(\varphi))] \quad (5)$$

这样,我们提出的新变分分割模型如下:

$$\min_{\varphi} \int_{\Omega} |\nabla H(\varphi)| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (I - c_1 H(\varphi) - c_2 (1 - H(\varphi)))^2 dx dy \quad (6)$$

式中, c_1, c_2 的表达式与前面的式(3)相同。

如果对问题(6)采用传统的水平集方法求解,数值计算时速度比较慢,受文献[8]的启发,为了克服这个缺点,我们先将取值于非凸集合 $\{0, 1\}$ 上的 $H(\varphi)$ 凸松弛处理为 $[0, 1]$, (这里将记号 $H(\varphi)$ 改为 u ,以免与水平集的表达式符号混淆),即考虑:

$$\min_{0 \leq u \leq 1} \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (I - c_1 u - c_2 (1 - u))^2 dx dy \quad (7)$$

为了使分割的轮廓线更准确地接近目标边缘,我们引进一个辅助变量 v ,以连结一些拟合能量项:

$$\begin{aligned} Rv &= \alpha \|I - v\|_{L^1}^2 + \frac{\beta}{2} \|I - v\|_{L^2}^2 + \\ &\quad \gamma \int_{\Omega} (v - I \ln v) dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

即将式(7)修改成:

$$\min_{u, v \in [0, 1]} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (I - c_1 u - c_2 (1 - u))^2 dx dy + \frac{1}{2\vartheta} \|u - v\|_{L^2}^2 + Rv \right\} \quad (9)$$

式中,参数 ϑ 尽量取小,以使 (u, v) 在 L^2 范数下尽可能接近。

在式(9)中固定 u ,可求出其关于 v 的演化方程为:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \operatorname{sign}(I - v) + \beta (I - v) + \gamma (I - v) / v + (u - v) / \vartheta \quad (10)$$

而固定 v ,则可求出其关于 u 的演化方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda (c_1 - c_2) (I - c_1 u - c_2 (1 - u)) - (u - \\ &\quad v) / \vartheta \end{aligned} \quad (11)$$

另外,考虑到待分割图像的密度分布不均匀的情况,轮廓线内、外区域的图像密度均值 c_1, c_2 与图像密度的接近程度是随具体图像而异的,所以适当选取参数 λ_1, λ_2 ,用带权均值 $\lambda_1 c_1, \lambda_2 c_2$ 替换均值 c_1, c_2 效果往往会更好。鉴于此,本文在

实验时将式(11)修改为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g \frac{\nabla u}{|\nabla u|}) + (\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2) (I - \lambda_1 c_1 u - \lambda_2 c_2 (1 - u)) - (u - v) / \vartheta \quad (12)$$

记

$$F(u, v) = (\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2) (I - \lambda_1 c_1 u - \lambda_2 c_2 (1 - u)) - (u - v) / \vartheta$$

采用 AOS 算法, 得式(12)的数值计算迭代格式:

$$u^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (E - 2dt \cdot A_i(u^k))^{-1} (u^k + dt \cdot F(u^k, v^k)) \quad (13)$$

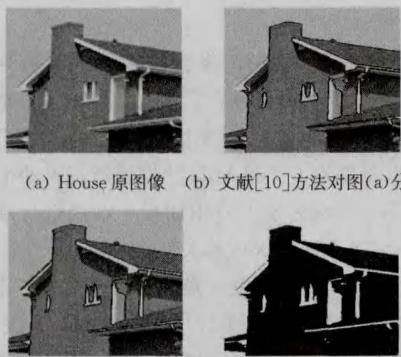
式中, E 为单位矩阵, $A_1(u^k) = \partial_x(g \partial_x u^k)$, $A_2(u^k) = \partial_y(g \partial_y u^k)$; 本文实验时取 $g=1$ 。

4 数值实验结果

我们的实验环境是 CPU 为 P4:2.8G, 内存为 2G, 操作系统为 Windows XP。

在实验中, “本文方法”是指使用式(10)和式(12)结合 AOS 算法进行分割, 原图像转化为密度 $I \in [0, 256]$, 初值 $u^0 = v^0 = I / \max(I(:))$; “文献[10]方法”是指由文献[10]提供的对活动轮廓模型的快速极小化算法。下面给出几幅使用文献[10]方法和本文方法进行分割的图像的实验结果。

图 1 是使用两种方法对一幅 House 图像(256×256)分割的结果。图 1(a)是 House 原图像。图 1(b)是对图 1(a)使用文献[10]方法进行分割的结果。图 1(c)是对图 1(a)使用本文方法迭代 1 次分割的结果(其中取 $\alpha=10^{-4}$, $\beta=10^{-4}$, $\gamma=3 \times 10^{-4}$, $\vartheta=10^{-3}$, $\lambda_1=1.11$, $\lambda_2=1$, $dt=0.1$)。图 1(d)是对图 1(a)使用本文方法获取的 u 图像。从图可见, 使用本文方法得到的图 1(c)比使用文献[10]方法得到的图 1(b)更准确, 例如: 图 1(c)能比图 1(b)多分割出该 House 左边瓦面的边缘和中部的白色窗缘。



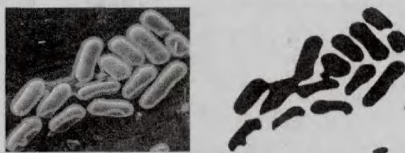
(c) 本文方法对图(a)分割的结果 (d) 本文方法所获的 u 图

图 1 用两种方法对房屋图像的分割结果

图 2 是使用两种方法对一幅 Bacteria 图像(256×233)分割的结果。图 2(a)是 Bacteria 原图像。图 2(b)是使用文献[10]方法对图 2(a)分割的结果。图 2(c)是对图 2(a)使用本文方法(其中取 $\alpha=10^{-4}$, $\beta=10^{-4}$, $\gamma=3 \times 10^{-4}$, $\vartheta=10^{-3}$, $\lambda_1=0.01$, $\lambda_2=2.22$, $dt=0.25$)分割 4 次的结果。图 2(d)是对图 2(a)使用本文方法获取的 u 图像。从图可以看到, 使用本文方法得到的图 2(c)比使用文献[10]方法得到的图 2(b)更准确, 例如: 图 2(c)的右上方和下方的轮廓线比图 2(b)更接近目标的边缘。



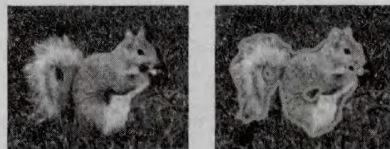
(a) Bacteria 原图像 (b) 文献[10]方法对图(a)分割的结果



(c) 本文方法对图(a)分割的结果 (d) 本文方法得到的 u 图像

图 2 用两种方法对 Bacteria 图像的分割结果

图 3 是对一幅 Squirrel 图像(288×209)使用两种方法分割的结果。图 3(a)是 Squirrel 原图像。图 3(b)是对图 3(a)使用文献[10]方法分割的结果。图 3(c)是对图 3(a)使用本文方法(其中取 $\alpha=10^{-4}$, $\beta=10^{-4}$, $\gamma=3 \times 10^{-4}$, $\vartheta=10^{-3}$, $\lambda_1=0.6$, $\lambda_2=1.35$, $dt=2.5$)分割 2 次的结果。图 3(d)是对图 3(a)使用本文方法获取的 u 图像。从图可以看到, 使用本文方法得到的图 3(c)中的轮廓线比使用文献[10]方法得到的图 3(b)更接近 Squirrel 背部和胸腹部的边缘。



(a) Squirrel 原图像 (b) 文献[10]方法对图(a)分割的结果



(c) 本文方法对图(a)分割的结果 (d) 本文方法得到的 u 图像

图 3 用两种方法对 Squirrel 图像的分割结果

结束语 根据数值实验知道, 现行的变分模型采用传统的水平集方法对较简单的图像进行分割是适合的, 但对较复杂的图像进行分割往往耗时较多。本文在经典的图像分割的变分模型的基础上, 提出一种图像分割的变分模型(PDE), 先用凸松弛方法将其转化为凸优化问题, 然后引入辅助变量连结一些拟合能量项, 并在实验中采用高效且无条件稳定的 AOS 算法对一些图像进行分割。实验结果显示, 本文提出的分割方法能有效地进行图像的分割。

参考文献

- [1] Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. Snakes: Active contour models[J]. International Journal of Computer Vision, 1987, 1(4): 321-331
- [2] Zhu S, Yuille A. Region competition: Unifying Snakes, region growing, and Bayes /MDL for multiband image segmentation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, 18(9): 884-900
- [3] Chan T F, Vese L A. Active contour model without edges[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266-277

(下转第 283 页)

的型心坐标。

3. 确定长短轴。型心确定后,长轴即是边缘点到型心的距离。边缘点的确定与圆环着色有关。要确定一个点是否是一个圆环的边界点,只需判断:1)这个点是否是某一层的点的像素值;2)这个点的8向点中,是否存在一个点,是其外层圆的像素值。求得一个边缘的长轴和短轴之值后,可求得一个角度,然后累加,再求平均值,以提高精度。

4. 计算偏角。偏角计算的公式为:

$$\text{angle} = \arccos(\text{ShotAxe}/\text{LongAxe})$$

4 实验结果与对比

对采集到的 2000 余张图片做了测算。这些图片包含从 15°到 75°之间多种光照条件下的图片,其中定位准确率 95.8%。由于定位失败的图片无法测算角度,表 1 的统计数据仅包含定位成功的图片。

表 1 一些典型角度的测算结果

实际角度	测算结果	偏差
15	13.893	7.380%
30	29.164	2.79%
45	44.638	0.804%
60	60.021	0.035%

图 6 展示了这种差异的变化趋势。

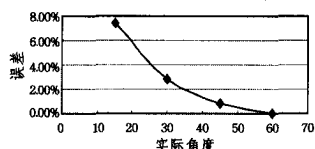


图 6

从图 6 中可以看出,随着实际角度的增大,误差越来越小,但是角度越小,误差会难以接受。在实际应用中可以调整测试角度,尽可能地使用大角度进行测算,从而减小误差。

另外从性能上进行分析。该算法的时间主要消耗在区域分割与染色上。由于每个像素均会有一次 visit 操作,因此时

间复杂度为 $O(n)$ 。

表 2 展示了不同像素(有效圆环部分)的图片时间消耗的情况。

表 2 不同像素图片测算时间消耗

图片圆环像素	时间消耗(ms)
129684	396.8
148919	454.5
159301	485.7
386522	1167.4
456695	1377.9

结束语 本文所描述的角度计算方法,具有简单易行、成本低廉、测算比较准确的特点。以计算机图形学的方法进行角度测算,是一种新的思路。在角度接近 0°的时候,精度下降严重,原因是角度测算采用了三角函数,三角函数固有的斜率变化决定了测算的准确性。因此改进测算的方法以及计算模型是提高精度的有效途径。

参考文献

- [1] 鲁珂,赵继东,叶娅兰,等.一种用于图像检索的新型半监督学习算法[J].电子科技大学学报,2005,34(5):669-671
- [2] Coetzee C,Botha C,Weber D. PC Based Number Plate Recognition System[J]. IEEE,1998:605-610
- [3] 王晓雪,苏杏丽.数字图像处理在车牌识别中的应用[J].自动化仪表,2010(7):22-25,28
- [4] 潘振敏,龚声蓉.浅谈数字图像处理技术的基本原理[J].电脑知识与技术,2010(6):1452-1453
- [5] Setchell C J. Applications of computer vision to road-traffic monitoring[D]. England: University of Bristol, Faculty of Engineering, Department of Electrical and Electronic Engineering, 1997
- [6] 曹刚,游志胜,赵树龙.基于小波隐性马尔可夫树模型的车牌定位[J].电子科技大学学报,2004,33(5):515-518
- [7] 梁枫,王平.基于角点特征的高精度图像配准算法[J].重庆理工大学学报:自然科学版,2010,24(2):87-90

(上接第 265 页)

- [4] Guo W, Chen Y. Using non-parametric kernel to segment and smooth images simultaneously[C]//ICIP. Atlanta, GA, USA: IEEE,2006:217-220
- [5] Herbulot A, Jehan B S, Barlaud M, et al. Shape gradient for image segmentation using information theory[C]//ICASSP. New York, USA: IEEE,2004,3:21-24
- [6] Kim J, Fisher J W, Yezzi A, et al. A nonparametric statistical method for image segmentation using information theory and curve evolution[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005,14(10):1486-1502
- [7] Paragios N, Deriche R. Geodesic active regions: a new paradigm to deal with frame partition problems in computer vision[J]. J. Visual Commun. Image. Representation, 2002,13(1/2):249-268
- [8] Bresson X, Esedoglu S, Vanderghyest P, et al. Fast global minimization of the active contour/snake model[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007,28(2):151-167
- [9] Houhou N, Thiran J-P, Bresson X. Fast texture segmentation based on semi-local region descriptor and active contour[J]. Numer. Math. Theor. Meth. Appl., 2009,2(4):445-468

- [10] Bresson X. A short guide on a fast global minimization algorithm for active contour models[OL]. <http://www.math.ucla.edu/~xbresson>, 2009
- [11] 杨新,李俊,杜啸晓.图像偏微分方程的原理与应用[M].上海:上海交通大学出版社,2003:80-103
- [12] Paragios N, Deriche R. Geodesic active regions and level set methods for motion estimation and tracking[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2005,3:259-282
- [13] 陈波,赖剑煌.用于图像分割的活动轮廓模型综述[J].中国图象图形学报,2007,12(1):11-22
- [14] Weickert J, Romeny B M T H, Viergever M A. Efficient and reliable scheme for nonlinear diffusion and filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998,7(3):398-410
- [15] Casselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours[C]//Proceedings of International Conference on Computer Vision. Boston, MA, USA, 1995:694-699
- [16] Casselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours[J]. Int. Journal of Computer Vision, 1997,22(1):61-79
- [17] Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989,42(5):577-685