# 粒计算中粒度转换的运算符

陈 光[1] 钟 宁[1,2] 姚一豫[1,3] 黄佳进[1]
(北京工业大学国际 WIC 研究院 北京 100124)[1] (日本前桥工业大学生命科学与信息系 前桥 371-0816)[2]
(加拿大里贾纳大学计算机科学系 里贾纳 S4S 0A2)[3]

**摘 要** 粒计算三元论模型将现有粒计算研究成果的共性抽象出来,为问题求解提供了统一的方法论,而三元论模型是以多层次、多视角的粒结构为基础的。基于图的粒结构首先定义了图上的粒和层次,然后基于半序关系定义了图上的粒结构。在基于图的粒结构基础上,给出了实现不同粒度之间转换的"细化"、"粗化"运算符。"细化"运算处理从粗粒度到细粒度的转换,将粗粒度层次中的粒转换为细粒度层次中的粒,将粗粒度层次转换为细粒度层次。"粗化"运算处理从细粒度到粗粒度的转换,将细粒度层次中的粒转换为粗粒度层次中的粒,将细粒度层次转换为粗粒度层次。通过粒结构和"细化"、"粗化"运算,可以在不同的粒度上分析同一问题并使其在不同粒度之间自由转换。

**关键词** 粒结构,粒度转换,运算符,细化,粗化

## Granularity Transformation Operators for Granular Computing

CHEN Guang[1] ZHONG Ning[1,2] YAO Yi-yu[1,3] HUANG Jia-jin[1]
(International WIC Institute, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)[1]
(Department of Life Science and Informatics, Maebashi Institute of Technology, Maebashi 371-0816, Japan)[2]
(Department of Computer Science, University of Regina, Regina S4S 0A2, Canada)[3]

**Abstract** The triarchic theory of granular computing offers a conceptual framework of granular computing. It emphasized the exploitation of useful structures known as granular structures characterized by multilevel and multiview. The granular structures in graphs were studied, granules and levels in a graph were defined based on the vertices set, and granular structures in the graph were defined based on partial orders. Based on the granular structures in graphs, "zooming-in" and "zooming-out" operators were proposed. The "zooming-in" operator deals with the shift from a fine granularity to a coarse granularity and the "zooming-out" operator deals with the change from a coarse granularity to a fine granularity.

**Keywords** Granular structures, Granularity transformation, Operator, Zooming-in, Zooming-out

## 1 引言

粒计算是人类问题求解所启发的思维方式和计算策略,粒计算的形成和发展积累了多种思想、模型、范式、方法论、技术及工具[1,2,4,7,9,11,13-18]。粒计算三元论模型将现有粒计算研究成果的共性抽象出来,为问题求解提供了统一的方法论[12,14]。以粒结构为基础的三元论模型包括 3 个部分,即结构化思维、结构化问题求解、结构化信息处理。结构化思维强调了对粒计算的哲学思想的研究。结构化问题求解致力于将粒计算哲学思想具体到问题求解的方法、技术和工具的研究和开发中。结构化信息处理强调以计算机为主体的信息处理与以人为主体的信息处理的差别。

粒结构体现了粒计算所倡导的多粒度、多层次、多视角的结构化方法[12,14]。一个实际问题或系统总是由众多关联的部分组成。这种结构反映了两个主要特征:一个整体可以看成是由部分组成的网状结构,任何一个部分都可能同其他部分相连;一个部分也可能是由更小部分组成的网状结构。粒结构能将复杂的网络转化为一个较为简单的多层次结构,这就自然引入了粒度与层次的概念。粒结构的基本组成主要包括粒、层次、不同层次组成的分层结构,而粒结构又是从不同视角出发的多个分层结构的组合。粒计算正是基于这种简化的粒结构的问题求解。第 2 节将详细介绍粒结构的构成。

图论是描述和分析许多现实世界问题很好的工具。基于图建立粒结构的模型既是对粒结构很好的表示,又能方便地对粒结构的建立、转换进行操作[2]。在图中,用节点表示粒,节点与节点之间的边来表示粒之间的关系是非常形象和直观的。由于图的节点和边都是通过集合的方式来定义,因此基于图的粒结构可以通过集合理论和图论两种方式对粒结构中的节点和层次进行计算和操作。本文基于图构建图上多层次多粒度的粒结构,并通过粒度转换的运算符实现层次与层次之间、不同层次的粒之间的转换。第 3 节将详细介绍基于图的粒结构。

到稿日期:2011-01-27 返修日期:2011-04-28 本文受国家自然科学基金(60905027),北京市自然科学基金(4102007)资助。
**陈 光**(1983—),男,博士生,主要研究方向为粒计算、网络智能,E-mail:cg@emails.bjut.edu.cn;**钟 宁**(1956—),男,教授,主要研究方向为网络智能、脑信息学;**姚一豫** 男,教授,主要研究方向为网络智能、粒计算、粗糙集;**黄佳进** 男,讲师,主要研究方向为网络智能、复杂网络。

在粒结构中，不同粒度的层次与层次之间、不同层次的粒之间的联系和转换，可以通过粒度转换的运算符来实现。粒度转换运算符至少有两类，一类运算符处理从细粒度到粗粒度的转换，这类运算符将细粒度的层次转换为粗粒度的层次，将细粒度层次中的粒转换为粗粒度层次中的粒，隐藏具体细节，体现共性。许多研究涉及了包含类似功能的操作，例如：抽象、简化、一般化、粗化、缩小等[3,5,6,10]。另一类运算符处理从粗粒度到细粒度的转换，这类运算符将粗粒度层次中的粒转换为细粒度层次中的粒，将粗粒度层次转换为细粒度层次。以往研究中，涉及到类似功能的定义有：扩张、特定化、细分、放大等[3,5,6,10]。此外，粒结构上还可以定义一些具有其他功能的运算符。例如，对于在细粒度层次上某些粒的集合，在粗粒度层次上可能找不到一个确定的粒来表示它们，这就需要对它们进行类似于粗糙集中上下近似的运算。第 4 节将详细介绍粒度转换的几种运算符。

## 2 粒结构

粒计算研究的对象所具有的多层次、多视角的结构称为粒结构，其组成元素包括粒、层次及分层结构[12,14]。

在粒计算中，粒是一个最基本的抽象概念，我们在处理问题时将可以看作一个整体的对象作为一个粒。粒具有双重身份，可以是其他粒的一部分，也可以是多个更小粒组成的整体。粒存在着不同的粒度，相同粒度的粒结合在一起，构成对问题特定粒度层次的描述。我们可以基于特定的视角用较小的粒来观察研究较大的粒。

层次是粒计算的另一个重要概念，一个层由同样粒度或同样性质的粒组成。粒给出局部描述，由一簇粒形成的层给出一个给定粒度的全局描述。人们在不同层次中研究不同粒度的粒，同一层次的粒之间可以是不相交的关系，也可以是交叠的关系。同一层次上所有的粒共同体现了本层次的特性，它们互相补充，互相呼应，完整地表达了在这个层次、这个粒度上对一个问题的描述。

不同的层次可以组织起来形成一个多层次结构。分层结构由若干层次组成，不同层次体现了不同的粒度。层次间的递进反映了由表及里、由抽象到具体、由粗糙到细致、由笼统到具体的变化。通过细化运算，一个高层次的粒可以分解为若干个低层次的粒，从而对问题提供更详细的描述或者更多的信息。通过粗化运算，若干个低层次的粒可以组合成一个高层次的粒，从而将隐藏不相关的细节，体现问题的共性。

一个分层结构只可能给出一个局限性的视角，要达到全面的理解必须采用多个分层结构。对于现实世界的描述，多个分层结构可以给出特定问题的不同视角。一个分层结构中，不同的粒度使我们对问题有多层次的理解，多视角方法将若干个分层结构组合成粒结构。多层次、多视角的粒结构反映了对同一问题理解的多个角度和视点。多层次和多视角是粒结构的核心内容。

## 3 基于图的粒结构

### 3.1 图中的粒

**定义 1** 一个图 $G$ 定义为一个偶对 $(V,E)$，记作 $G=(V,E)$，其中，$V$ 是顶点的集合，$E$ 是边的集合。

在一个无向图中，一条边是一个无序对 $(v,w)$，在一个有向图中，一条边是一个有序对。顶点 $v,w$ 称为边的顶点。在有权图中，每条边都有一个由赋权函数赋给的权值。图 1 是一个无向图的例子。

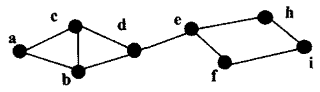


图 1 无向图 $G$

**定义 2** 设集合 $V$ 为图 $G$ 上所有顶点的集合，$V$ 的幂集 $2^V$ 中的一个元素 $g$ 称为图 $G$ 上的一个粒。

一个粒 $g$ 是图上所有顶点的集合 $V$ 的一个子集，它是这个子集中所有顶点的整体。在处理问题时，如果一些顶点可以看作是不可区分的，那它们就被作为一个粒，这个粒可以看作是这些顶点的概括和抽象。顶点集 $V$ 的幂集 $2^V$ 包含了图 $G$ 上所有可能的粒，其中，最大的粒是顶点的全集 $V$，空集可以看作是图上最小的粒。

**定义 3** 如果一个粒 $g_1$ 中的任意一个元素同时也是粒 $g_2$ 中的元素，也就是，$g_1 \in g_2$，则称 $g_1$ 是 $g_2$ 的子粒，$g_2$ 是 $g_1$ 的父粒。

粒具有双重身份，其既可以是某个整体的相对独立的一个部分，又可以被看作是由其他的一些粒组成的整体。集合上的包含关系$\sqsubseteq$定义了集合 $2^V$ 上的部分序，通过包含关系，可以得到粒之间的父粒-子粒关系。考虑顶点集合 $V$ 的一系列子集 $H$ 和 $H$ 上的半序关系，可以构建图上的粒结构。

一般地，可以根据图中节点的度、边的权值、图的连通性、图的密度来建立图的粒化标准和具体粒化算法，关于将图粒化的具体标准和算法在文献[2]中有详细讨论。

### 3.2 图中的粒结构

**定义 4** 当图 $G$ 上的顶点按照给定的粒化标准分别归纳为粒，也就是图 $G$ 按照给定的粒化标准完成了一次粒化，我们称一次粒化后得到所有粒的集合为图 $G$ 的一个层次。

根据不同的粒化标准，可以对图进行不同程度的粒化，得到不同的层次。每个层次对应一个特定的粒度，它可以被看作问题的一个特定的理解。

**定义 5** 考虑图 $G$ 的两个层次 $l_1$ 和 $l_2$，对于 $l_1$ 中的任意一个粒 $g_1$，如果存在一个 $l_2$ 中的粒 $g_2$，使得 $g_1 \in g_2$，也就是说，对于 $l_1$ 中的任意一个粒 $g_1$，都能够在 $l_2$ 中找到它的父粒 $g_2$，则称层次 $l_1$ 的粒度比层次 $l_2$ 更精细，层次 $l_2$ 的粒度比 $l_1$ 更粗糙。

较细粒度的层次相对较粗粒度的层次是对问题的一个更具体的理解、观点和描述；较粗粒度的层次是对问题比较抽象的理解和描述。通过在不同粒度的层次之间转换，可以得到对问题的由具体到抽象，由精细到粗糙的理解。

例 1 图 2 和图 3 分别是将图 1 中的图 $G$ 经过不同程度的粒化后得到的层次。图 2 所示的层次将图 $G$ 粒化为两个粒，图 3 所示的层次将图 $G$ 粒化为 5 个粒，图 2 所示层次的粒度比图 3 所示的层次更加粗糙，图 3 所示层次的粒度更为精细。

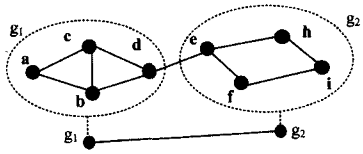


图 2 图 $G$ 经过粒化得到比较粗糙的层次

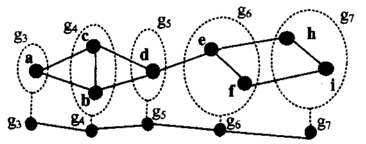


图 3　图 $G$ 经过粒化后得到比较精细的层次

**定义 6**　设 $H$ 是图 $G$ 的一个层次上的所有粒的集合，偏序集 $(H,\subseteq)$ 称为一个粒结构，其中 $\subseteq$ 是包含关系。

通过半序关系，各个不同的层次可以结合成一个多层次的粒结构，不同层次中的粒也被关联到一起。在粒结构中，不同层次是对图的不同粒度的描述，整个粒结构提供了对问题的多粒度的理解。包含关系 $\subseteq$ 是半序关系的一个特例，更一般地，我们可以考虑用任意其他的半序关系来构建对应的粒结构。

例 2　图 4 所示为对图 $G$ 建立的粒结构，粒结构中包含两个层次，分别为图 2 所示较粗糙的层次和图 3 所示较精细的层次，包含关系将这两个层次联系在一起，形成一个偏序集，即为图 $G$ 的粒结构。

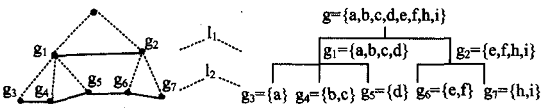


图 4　由图 $G$ 经过两次粒化得到的两个层次组成的粒结构

## 4　“细化”和“粗化”运算符

在基于图的粒结构中，不同粒度的层次与层次之间、不同层次的粒之间的联系和转换，可以通过“细化”和“粗化”运算符来实现。细化运算符处理从粗粒度到细粒度的转换，粗化运算符处理从细粒度到粗粒度的转换。

### 4.1　“细化”运算符

细化运算符实现从粗粒度层次到细粒度层次的转换，这种转换反映了由抽象到具体、由粗糙到细致的变化。细化运算将一个高层次的粒分解为若干个低层次的粒，当高层次的所有粒全部被分解为低层次中的粒后，就完成了从粗粒度层次到细粒度层次的转换。细化运算符可以根据需要为问题求解提供更详细的描述或者更多的细节。下面在基于图的粒结构基础上，给出“细化”运算符的定义。

**定义 7**　设 $l_1,l_2$ 为图 $G$ 的两个层次，$l_1$ 的粒度比 $l_2$ 粗糙，$g_1$ 为 $l_1$ 中的粒，对 $g_1$ 的运算：

$$\omega(g_1)_{l_1\to l_2}=\{g\mid g_1\subseteq g,g\in l_2\}$$

称为将 $g_1$ 细化到 $l_2$ 层次，$\omega$ 称为细化运算符。

**定义 8**　设 $l_1,l_2$ 为图 $G$ 的两个层次，$l_1$ 的粒度比 $l_2$ 粗糙，对 $l_1$ 的运算：

$$\omega(l_1)_{l_1\to l_2}=\bigcup\omega(g)_{l_1\to l_2},g\in l_1$$

称为将 $l_1$ 层次细化为 $l_2$ 层次，$\omega$ 为细化运算符。

例 3　如图 5 所示，对图 4 的粒结构的层次 Level1 中的粒 $g_1=\{a,b,c,d\}$ 进行细化运算，有：

$$\omega(g_1)=\{g_3,g_4,g_5\}=\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$$

图 6 所示为对图 4 的粒结构中的层次 Level1 的细化运算：

$$\omega(l_1)=\omega\{g_1,g_2\}=\{g_3,g_4,g_5,g_6,g_7\}=l_2$$

下面的定理反映了细化运算的性质。

**定理 1**

$$\omega(\emptyset)=\emptyset$$

$$\omega(X^c)=(\omega(X))^c$$

$$\omega(X\cap Y)=\omega(X)\cap\omega(Y)$$

$$\omega(X\cup Y)=\omega(X)\cup\omega(Y)$$

$$X\subseteq Y\Leftrightarrow\omega(X)\subseteq\omega(Y)$$

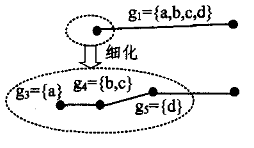


图 5　对一个粒 $g$ 的细化

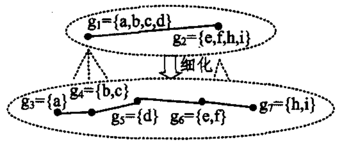


图 6　对一个层次的细化

### 4.2　“粗化”运算符

粗化运算符实现从细粒度层次到粗粒度层次的转换，这种转换反映了由细致到抽象，由具体到笼统的变化。粗化运算将在处理问题时区别不大的对象合成为一个整体，将细粒度层次中的粒转换为粗粒度层次中的粒，将细粒度的层次转换为粗粒度的层次。粗化运算符在问题求解时忽略掉不相关的细节，提供抽象的描述。

**定义 9**　设 $l_1,l_2$ 为图 $G$ 的两个层次，$l_1$ 的粒度比 $l_2$ 粗糙，$g$ 为 $l_1$ 中的粒，对 $g$ 的细化运算将 $g$ 细化为 $l_2$ 中的粒 $g_1..g_n$，即

$$\omega(g)_{l_1\to l_2}=g_1..g_n$$

则对 $g_1..g_n$ 的运算：

$$\sigma(g_1..g_n)_{l_2\to l_1}=g$$

称为将 $g_1..g_n$ 粗化到 $l_1$ 层次，$\sigma$ 称为粗化运算符。

**定义 10**　设 $l_1,l_2$ 为图 $G$ 的两个层次，$l_1$ 的粒度比 $l_2$ 粗糙，且有：

$$\omega(l_1)_{l_1\to l_2}=l_2$$

则对 $l_2$ 的运算：

$$\sigma(l_2)_{l_2\to l_1}=l_1$$

称为对 $l_2$ 层次的粗化运算，$\sigma$ 为粗化运算符。

例 4　对图 4 的粒结构中层次 Level2 的粒 $g_4,g_5$ 进行粗化运算，有：

$$\sigma(g_3,g_4,g_5)=g_1$$

对图 4 的粒结构中的层次 Level2 的粗化运算：

$$\sigma(l_2)=\sigma\{g_3,g_4,g_5,g_6,g_7\}=\{g_1,g_2\}=l_1$$

下面的定理反映了粗化运算的性质。

**定理 2**

$$\sigma(V)=V$$

$$\sigma(X^c)=(\sigma(X))^c$$

### 4.3　“粗化”运算符的近似运算：“内粗化”和“外粗化”

当对 $l_2$ 层次中的一些粒做粗化到 $l_1$ 层次的运算时，如果这些粒不能正好粗化为 $l_1$ 层次中的粒，也就是说这些粒并不正好是 $l_1$ 中某些粒经过细化得到的粒的集合，就需要粗化运算的近似运算。类似于粗糙集中的上下近似概念，我们给出粗化运算符的两个近似运算。

**定义 11**　设 $l_1,l_2$ 为图 $G$ 的两个层次，$l_1$ 的粒度比 $l_2$ 粗糙，$H$ 为 $l_2$ 的一个子集，对 $H$ 的运算：

$$\underline{\sigma}(H)_{l_2\to l_1}=\{g\mid g\in l_1,\omega(g)_{l_1\to l_2}\subseteq H\}$$

称为对 $H$ 的内粗化运算。

**定义 12**　设 $l_1,l_2$ 为图 $G$ 的两个层次，$l_1$ 的粒度比 $l_2$ 粗糙，$H$ 为 $l_2$ 的一个子集，对 $H$ 的运算：

$$\bar{\sigma}(H)_{l_2\to l_1}=\{g\mid g\in l_1,\omega(g)_{l_1\to l_2}\cap H\neq\emptyset\}$$

称为对 $H$ 的外粗化运算。

例 5　对图 4 的粒结构中层次 Level2 中的粒 $g_5,g_6,g_7$ 无法直接进行粗化运算，对它们进行内粗化和外粗化运算有：

$$\underline{\sigma}(\{g_5,g_6,g_7\})=g_2$$

$$\bar{\sigma}(\{g_5,g_6,g_7\})=\{g_1,g_2\}$$

下面的定理反映了内外粗化运算的性质。

**定理 3**　设 $l_1,l_2$ 为两个层次，$l_1$ 的粒度比 $l_2$ 粗糙，$A\subseteq l_1,B\subseteq l_2$，那么，

$$\omega(A)\subseteq B\Leftrightarrow A\subseteq\underline{\sigma}(B)$$

$$B\subseteq\omega(A)\Leftrightarrow\bar{\sigma}(B)\subseteq A$$

**定理 4**　设 $l_1,l_2$ 为两个层次，$l_1$ 的粒度比 $l_2$ 粗糙，$\forall A,B\subseteq l_2$，$\omega$ 是从 $l_1$ 到 $l_2$ 的细化运算，$\underline{\sigma},\bar{\sigma}$ 分别是 $l_2$ 到 $l_1$ 的内外粗化运算，则，

$$\underline{\sigma}(\emptyset)=\bar{\sigma}(\emptyset)=\emptyset$$

$$\underline{\sigma}(l_2)=\bar{\sigma}(l_2)=l_1$$

$$\underline{\sigma}(A)\subseteq\bar{\sigma}(A)$$

$$\underline{\sigma}(A)=(\bar{\sigma}(A^c))^c$$

$$\bar{\sigma}(A)=(\underline{\sigma}(A^c))^c$$

$$\underline{\sigma}(\omega(A))=\bar{\sigma}(\omega(A))=A$$

$$\omega(\underline{\sigma}(A))\subseteq A$$

$$A\subseteq\omega(\bar{\sigma}(A))$$

$$A\subseteq B\Rightarrow\underline{\sigma}(A)\subseteq\underline{\sigma}(B)$$

$$A\subseteq B\Rightarrow\bar{\sigma}(A)\subseteq\bar{\sigma}(B)$$

$$\underline{\sigma}(A\cap B)=\underline{\sigma}(A)\cap\underline{\sigma}(B)$$

$$\bar{\sigma}(A\cap B)\subseteq\bar{\sigma}(A)\cap\bar{\sigma}(B)$$

$$\underline{\sigma}(A)\cup\underline{\sigma}(B)\subseteq\underline{\sigma}(A\cup B)$$

$$\bar{\sigma}(A\cup B)=\bar{\sigma}(A)\cup\bar{\sigma}(B)$$

**结束语**　粒计算的三元论模型以粒结构为基础，包括 3 个部分，即哲学思想（结构化思维）、方法论（结构化问题求解）、计算模式（结构化信息处理），其将现有粒计算研究成果的共性抽象出来，为问题求解提供了统一的方法论。粒计算研究的对象所具有的结构称为粒结构，其组成元素包括粒、层次及分层结构。多层次和多视角是粒结构的核心内容。本文基于图定义了图上的粒、层次，然后基于包含关系定义了粒结构。在基于图的粒结构的基础上，给出了粒结构中的细化、粗化运算符。粗化运算符能够实现从细粒度到粗粒度的转换，将细粒度的层次转换为粗粒度的层次，或者将细粒度层次中的粒转换为粗粒度层次中的粒。细化运算符实现从粗粒度到细粒度的转换，将粗粒度层次转换为细粒度层次，或者将粗粒度层次中的粒转换为细粒度层次中的粒。通过两个运算符，我们可以在不同的粒度间自由转换，从而能够模仿人类问题的求解方式来更好地处理问题。

## 参 考 文 献


[1] Bargiela A, Pedrycz W. Granular computing: an introduction [M]. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002

[2] Chen G, Zhong N, Yao Y Y. Hypergraph model of granular computing [C]// Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Granular Computing. 2008: 80-85

[3] Giunchglia F, Walsh T. A theory of abstraction [J]. Artificial Intelligence, 1992, 56: 323-390

[4] Hobbs J R. Granularity [C]// Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence. 1985: 432-435

[5] Hornsby K. Temporal zooming[J]. Transactions in GIS, 2001, 5: 255-272

[6] McCalla G, Greer J, Barrie J, et al. Granularity hierarchies [J]. Computers and Mathematics with Applications, 1992, 23: 363-375

[7] 苗多谦，王国胤，刘清，等. 粒计算：过去现在与展望[M]. 北京：科学出版社，2007: 1-20

[8] 苗夺谦，范世栋. 知识的粒度计算及其应用 [J]. 系统工程理论与实践，2002, 22(1): 49-57

[9] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356

[10] Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence [M]. Princeton University Press, Princeton, 1976

[11] Yager R R, Filev D. Operations for granular computing: mixing words with num- bers [C]// Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 1998: 123-128

[12] Yao Y Y. A partition model of granular computing [C]// LNCS Transactions on Rough Sets, 1, LNCS 3100. 2004: 232-253

[13] Yao Y Y, Zhong N. Granular computing [J]. Wiley Encyclopedia of Computer Science and Engineering, 2009, 3: 1446-1453

[14] Yao Y Y. The art of granular computing [C]// Proceeding of the International Conference on Rough Sets and Emerging Intelligent Systems Paradigms. LNAI 4585. 2007: 101-112

[15] Yao Y Y, Miao D Q, Zhan N, et al. Set-theoretic models of granular structures [C]// Proceedings of the 5th International Conference on Rough Set and Knowledge Technology. LNAI 6401. 2010: 94-101

[16] Zadeh L A. Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 90: 111-127

[17] 张铃，张钹. 问题求解理论及应用——商空间粒度计算理论及应用(第 2 版)[M]. 北京：清华大学出版社，2007

[18] 张燕平，罗斌，姚一豫，等. 商空间与粒计算——结构化问题求解理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2010: 115-143


（上接第 193 页）


[12] 宋余庆，朱玉全，孙志挥. 基于 FP-Tree 的最大频繁项目集挖掘及更新算法[J]. 软件学报，2003, 14(9): 1586-1592

[13] Brin S, Motwani R, Silverstein C. Beyond Market Baskets: Generalizing AssociationRules to Correlations[C]// Procedings of the ACM SIGMOD Conference. 1997: 265-276

[14] Savasere A, Omiecinski E, Navathe S. Mining for strong negative associations in a largedatabase of customer transactions[C]// Proceedings of International Conference on DataEngineering. February 1998

[15] Wu Xin-dong, Zhang Cheng-qi, Zhang Shi-chao. Mining both positive and negative association rules[C]// Proceedings of the 19th international conference on machine learning. SanMateo: Morgan Kaufmann Publishers, 2002: 658-665

[16] Teng Wei-guang, Hsieh M-J, Chen M-S. On the mining of substitution rules for statistically dependent items, Data Mining, 2002. ICDM 2002[C]// Proceedings. 2002 IEEE International Conference. Dec 2002

[17] 董祥军，王淑静，宋瀚涛，等. 负关联规则的研究[J]. 北京理工大学学报，2004, 24(11): 978-981