

基于 laplacian 坐标修正的 $\sqrt{3}$ 细分法

刘文耀¹ 王国胤¹ 龚勋² 胡勇¹

(重庆邮电大学计算机科学与技术研究所 重庆 400065)¹

(西南交通大学信息科学与技术学院 成都 610031)²

摘要 根据原始网格对细分极限曲面的影响分析,提出了基于 laplacian 坐标修正的 $\sqrt{3}$ 插值网格细分方法。通过插值出面片中心点的 laplacian 坐标,来对动态生成的中心点进行修正,达到保持原始网格细节的目的。在非封闭网格的边界面片细分方面,指出了原始 $\sqrt{3}$ 细分法的不足,提出了一种新的边界统一细分模式,它可以很好地控制边界面片的增长,而且具有稳定性和易于操作性。实验结果表明,该方法不仅能够让原始网格的细节在极限曲面上得到表达,而且可以得到一个连续光滑的曲面网格。

关键词 laplacian 坐标, $\sqrt{3}$ 细分法,边界统一细分模式,三维网格结构

中图分类号 TP391 **文献标识码** A

$\sqrt{3}$ Subdivision Based on Laplacian Coordinate

LIU Wen-yao¹ WANG Guo-yin¹ GONG Xun² HU Yong¹

(Institute of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)¹

(School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)²

Abstract According to the influence of the original mesh on the subdivided limited surfaces, we proposed a $\sqrt{3}$ subdivision method based on the laplacian coordinate. In order to preserve the details of the original mesh, the laplacian coordinate of the face's central point was interpolated and was used to modify itself. In side of the boundry face subdivision of the uncloseness mesh, we pointed out the lack of the original $\sqrt{3}$ method and proposed a new unified boundry-subdivided method. It can control the increasement of the faces and has the advantage of the stability, operability. The result of the experiment shows that the method can make the original mesh reveal on the limited surface and a limited smooth surface mesh can also be obtained.

Keywords Laplacian coordinate, $\sqrt{3}$ subdivision, Uniform subdivision of boundry, 3D grid structure

细分技术是 20 世纪 70 年代提出的一种曲线曲面造型技术,但是当时只是作为非均匀有理 B 样条(NUTBS)^[1]的一个子集被研究。随着人们对细分精度的要求不断提高,传统的 NURBS 在处理曲面拼接和裁减时过于麻烦,特别是在处理任意拓扑的网格时,要想得到一个极限可导的曲面,处理不仅费时,而且容易产生裂缝。由于细分技术能够从一个任意的拓扑网格结构构造出一个极限连续的曲面,因此重新受到了研究者的关注。

细分技术根据细分后的极限曲面是否插值初始的控制网格,而分为插值细分和逼近细分。逼近细分的一些经典算法主要有: Catmull-Clark 细分^[2]、Doo-Sabin 细分^[3]和 loop 细分^[4]等。插值细分的一些经典算法主要有:蝶形细分^[5]、4-8 细分^[6]、 $\sqrt{3}$ 细分^[7]等。Doo-Sabin 方法在奇异点处,光滑效果差。Catmull-Clark 方法使用双三次均匀 B 样条,细分有点复

杂。Loop 细分法取得了不错的效果。蝶形细分得到的极限曲面光顺性不太好。4-8 细分虽然面片增长速度慢了下来,但是操作过于复杂,还需要先用 Catmull-Clark 方法把网格处理为四边形,然后把每个四边形变为三角形。 $\sqrt{3}$ 细分法面片的增长速度为 3 倍,复杂度适中,极限曲面光顺性也不错。动态插入的节点为面片三个顶点的中心点。文献[8]提出了双重 $\sqrt{3}$ 细分法,取得了不错的效果,但是由于面片分得过细,操作起来比较复杂。文献[9]研究了初始网格和极限曲面的逼近度问题,根据给定的精度,不用细分网格而得出最少需要的细分次数,并把这一理论用于数控。文献[10]利用 $\sqrt{3}$ 细分法进行了六边形数据处理。文献[11]提出了极限曲面和原始网格的误差界问题,由于使用了初始控制序列的一阶向前极大差分常数,导致误差偏大,尤其在奇异点处。由于三维模型的表面是非平面的,简单的插入面片的中点必然导致面片过

到稿日期:2011-01-27 返修日期:2011-04-23 本文受国家自然科学基金项目(61073146),重庆市杰出青年科学基金项目(2008BA2041),重庆市高等教育教学改革研究项目(09-1-004)资助。

刘文耀(1985-),男,硕士,主要研究方向为智能信息处理、图形图像处理,E-mail:liuwenyao345@126.com;王国胤(1970-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为 Rough 集理论、粒计算、数据挖掘、知识技术等;龚勋(1980-),男,博士,讲师,主要研究方向为图像处理、模式识别与人工智能;胡勇(1986-),男,硕士,主要研究方向为智能信息处理、模式识别、情感计算、图形图像处理。

于光滑,会丢失一些局部的细节。对于非封闭的网格,原始 $\sqrt{3}$ 细分法完成一次边界细分需要两次细操作,原始面片被9个面片代替,但是操作不便。文献[12]改进了含有一个边界边的面片的插值系数,对于含有两个边界边的面片,通过虚拟一个外界顶点来进行细分,取得了不错的效果,但是同样是边界面片,却被分成了两种不同的类别进行细分,导致细分复杂化。针对上述问题,本文提出了一种基于 laplacian 坐标修正的方法,在边界细分方面,提出了一种统一的细分模式。

1 $\sqrt{3}$ 细分法

原始细分法的细分过程详述如下。

(1) $\sqrt{3}$ 细分法内部面片的细分原理如图1所示。

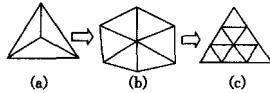


图1 $\sqrt{3}$ 细分法

设原始面片图1(a)的三个顶点分别为: V_1, V_2, V_3 ,则新插入的中心点可由式(1)求得:

$$V_{123} = \frac{1}{3}(V_1 + V_2 + V_3) \quad (1)$$

对于原始顶点 V 用 V' 代替, V' 可由式(2)求得:

$$V' = (1 - \alpha_n)V + \frac{\alpha_n}{n} \sum_{i=1}^n V_i \quad (2)$$

式中, n 为顶点 V 的1-ring^[13]顶点个数, V_i 为顶点 V 一领域内的顶点。 α_n 可由式(3)求得:

$$\alpha_n = \frac{1}{9}(4 - 2\cos(\frac{2\pi}{n})) \quad (3)$$

这里的 n 值和式(2)的 n 值一样。

(2)对于边界面片的细分,第一次细分时不做处理,第二次细分时直接将面片细分为9个面片。然后对顶点进行修正,修正公式如式(4)所示:

$$\begin{aligned} p_{3i-1}^{k+1} &= \frac{1}{27}(10p_{i-1}^k + 16p_i^k + p_{i+1}^k) \\ p_{3i}^{k+1} &= \frac{1}{27}(4p_{i-1}^k + 19p_i^k + 4p_{i+1}^k) \\ p_{3i+1}^{k+1} &= \frac{1}{27}(p_{i-1}^k + 16p_i^k + 4p_{i+1}^k) \end{aligned} \quad (4)$$

原始方法利用式(1)虽然可以简单地求出面片的中心插值点,但是三维模型的表面应该是非平面的,简单的插值必然导致面片丧失一些细节。本文随后用 laplacian 坐标对其进行修正,避免一些细节的丢失。对边界面片直接一分为九,尤其是利用式(4)进行光滑,操作复杂,不易控制。文献[12]对式(3)的 α_n 进行了修正,根据 n 的不同得到不同的值,效果虽然略有提高,但是求解起来更加复杂。对于边界边,在第二次细分时插入两个顶点。插值示意图如图2所示,其中 $p_{i-2}^k, p_{i-1}^k, p_i^k, p_{i+1}^k, p_{i+2}^k$ 为已知点, p 表示顶点。

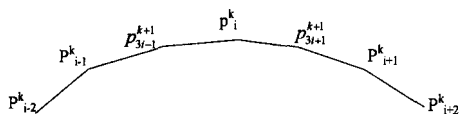


图2 含有一个边界边的面片细分

插值公式如式(5)所示:

$$p_{3i-1}^{k+1} = -\frac{4}{81}p_{i-2}^k + \frac{10}{27}p_{i-1}^k + \frac{20}{27}p_i^k - \frac{5}{81}p_{i+1}^k$$

$$p_{3i}^{k+1} = p_i^k \quad (5)$$

$$p_{3i+1}^{k+1} = -\frac{5}{81}p_{i-1}^k + \frac{20}{27}p_i^k + \frac{10}{27}p_{i+1}^k - \frac{4}{81}p_{i+2}^k$$

对于含有两个边界边的面片,需要计算一个虚拟的外界顶点来辅助,辅助顶点示意图如图3所示。

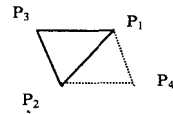


图3 虚拟顶点示意图

在图3中, P_1P_2, P_2P_3 为边界边, P_4 为虚拟出来的顶点,其求解公式如下:

$$P_4 = (P_1 + P_2) - P_3 \quad (6)$$

文献[12]改进后,取得了不错的效果,但是同样是边界面片,却采用了不同的细分方法,这必然导致细分复杂化,难以控制,也破坏了细分的简单性。对此,本文提出了一个统一的边界细分模式,使细分规范化。

2 laplacian 坐标修正的细分法

2.1 laplacian 坐标

在三维几何领域,laplacian 坐标能够反映三维网格模型顶点的局部细节^[14],在三维网格变形领域经常被应用于控制局部细节。图上的 laplacian 算子^[15]和三角网格上的 laplacian 算子^[16]相似,而某一个顶点的 laplacian 坐标可由 laplacian 算子乘以自身求得,在三维网格领域,一般情况下只用其简化形式,如式(7)所示:

$$\delta_i = L_i^G v_i = v_i - w_i \sum_{j \in N(i)} v_j \quad (7)$$

式中, δ_i 为顶点 v_i 的 laplacian 坐标, L_i^G 为顶点的 laplacian 算子, $N(i)$ 表示顶点 v_i 的一领域的顶点个数, v_j 表示邻域内的顶点, w_i 是一个权值,一般情况下采用均匀加权的策略^[17],即 $w_i = 1/N(i)$ 。

2.2 封闭网格上的细分

laplacian 坐标具有保持局部细节的特点,可以根据面片中心点的 laplacian 坐标来修正根据式(1)计算得出的原始中心点。修正后的效果如图4所示。

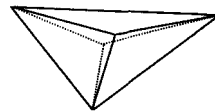


图4 修正后面片中心点对比图

图中虚线所示为原始的中心点,实线所示为修正后的中心点。具体修正方法为:先利用式(7)计算出面片三个顶点的 laplacian 坐标,再对面片中心点的 laplacian 坐标 δ_i 进行插值求解,一般情况下取平均值即可。然后求出面片 $V_1V_2V_3$ 的法向量 N_{face} ,对式(1)改进后得到式(8):

$$V_{123} = \frac{1}{3}(V_1 + V_2 + V_3) + \alpha \delta_i N_{face} \quad (8)$$

式中, α 为一个修正系数,用于控制顶点外移的幅度。此时修正以后,原始顶点已经基本上趋于光滑,为了修正模型上的奇异点,还必须对原始的顶点进行均值修正,修正方法如式(9)所示:

$$V' = \frac{1}{n} \sum_{k \in N(i)} V_k \quad (9)$$

式中, n 为原始顶点 V 的1-ring^[13]顶点个数, V_k 为顶点 V 的

1-ring 三角形面片的中心点。

2.3 非封闭网格统一细分模式

对于非封闭的网格内部的面片,是按照封闭网格进行细分的。对于网格边界面片的细分,本文提出了一个统一的细分模式,细分示意图如图 5、图 6 所示。

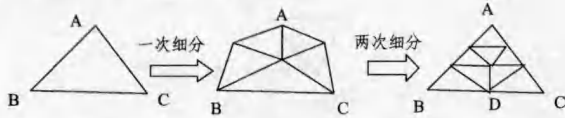


图 5 含一个边界边 BC 的面片细分

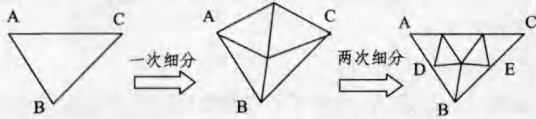


图 6 含两个边界边 AB、BC 的面片细分

由图 5、图 6 可以看出,两种面片是按照同一种模式进行细分的,此细分算法如下:

(1)第一次细分时,所有的面片都按照式(8)、式(9)进行细分,一分为三,对于细分后的边界面片,做一个标记,以备第二次细分使用。

(2)第二次细分时,对于内部的面片,都是一分为三;对于边界面片,求出边界边的中点,连接边界边的中点和其对应的顶点,使面片一分为二。

对于边界边上中点 V' 的计算问题,可以用下式求得:

$$V' = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) + \alpha \delta_i N_{face} \quad (10)$$

式中, V_1, V_2 为其所在边界边的两个顶点, α 为一控制系数,用来控制修正的幅度, δ_i 为顶点 V' 的 laplacian 坐标。 N_{face} 为 V' 所在面片的法向量,顶点 V' 的 δ_i 可由下式求得:

$$\delta_i = \frac{1}{2}(\delta_{v_1} + \delta_{v_2}) \quad (11)$$

式中, δ_{v_1} 和 δ_{v_2} 为 V' 所在边的两个顶点的 laplacian 坐标, δ_{v_1} 和 δ_{v_2} 可由式(7)求得。对于原始顶点的修正用式(9)来完成,只不过对于边界顶点的修正, n 取值为 2,分别是其所在边界边的中点。

3 实验结果及分析

为了验证本文改进后的算法确实能够保持局部细节、边界进行统一细分,从斯坦福大学网页上下载了 bunny 模型^[18],并在本试验组的基础上对三维人脸模型进行了实验^[19]。该实验基于 VC6.0 平台和 opengl 开源库。

图 7 为封闭网格实验对比图,左图为原始的网格模型,中间为原始方法,右图为修正后的方法。可以看出原始网格红线圈住的部分被原始方法基本给平滑了,没有了凹凸,本文方法在保证光滑的情况下,可以表现原始的网格细节。

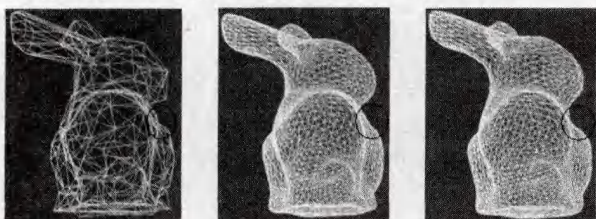
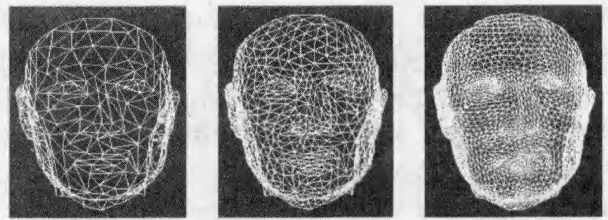


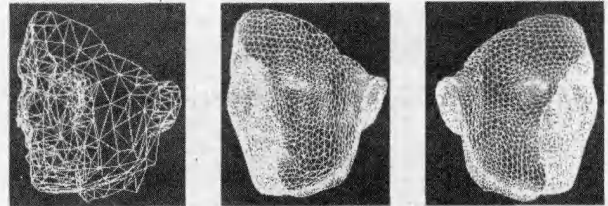
图 7 bunny 效果对比图

图 8 为非封闭网格细分效果图。对于非封闭网格原始顶

点的修正,是在完成一次完整的细分以后进行的,一次完整的细分包含两次细分。本文方法细分后,有两个优点。



(a)原始人脸网格 (b) 细分一次以后 (c) 细分两次以后



(d)原始人脸侧面图 (e) 细分两次以后右侧 (f) 细分两次以后左侧

图 8 三维人脸细分效果图

(1)面片的总数目小于原始 $\sqrt{3}$ 细分法。

证明:设非封闭网格的初始总面片数为 $m(m > 3)$, 初始边界面片为 $k(k > 3)$, 则完成一次完整的细分后,原始 $\sqrt{3}$ 细分法的面片数为 $9m$, 含有两个边界边的面片完成一次完整的细分后,面片变成了 7 个,含一个边界边面片完成一次完整的细分后面片变成了 8 个,设本文细分后的面片个数为 m_1 , 则 m_1 满足式(12):

$$m_1 \leq 9(m-k) + 8k \leq 9m - k < 9m \quad (12)$$

由本文得出的面片个数小于 $9m - k$, 很显然, $(9m - k)$ 小于 $9m$, 所以经过一次完整的细分后本文方法面片的增长速度慢于原始的 $\sqrt{3}$ 细分法。

(2)相对于原始 $\sqrt{3}$ 细分法,本方法不用对边界面片再进行分别细分,本文的统一细分模式可以保证细分过程的统一进行,使细分规范化。

结束语 本文从细分时原始控制网格对细分后网格影响的角度,在原始方法基础上给出了一个基于 laplacian 坐标的修正公式,通过这个公式的应用,在保证光滑的同时,还可以很好地使原始网格的细节在极限曲面上得到表达。同时还提出了一个非封闭网格的统一细分模式,使边界的细分变得易于控制和规范化。

参考文献

- [1] Blinn J F. A generalization of algebraic surface drawing [J]. ACM Transaction on Graphics, 1982, 1(3): 23-25
- [2] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes[J]. Computer Aided Design, 1978, 10(6): 350-355
- [3] Doo D, Sabin M. Behavior of recursive division surfaces near extraordinary point [J]. Computer Aided Design, 1978, 10(6): 356-360
- [4] Loop C. Smooth Subdivision Based on Triangles[D]. University of Utah, 1987
- [5] Dyn N, Levin D, Gregory J A. A butterfly subdivision schemes for surface interpolatory with tension control[J]. ACM transactions on Graphics, 1990, 2(9): 160-169

(下转第 220 页)

B,故 $DN(NL)=\{a\}$,因此 NL 存在回答集 $\{a\}$,因而 P 也存在回答集。

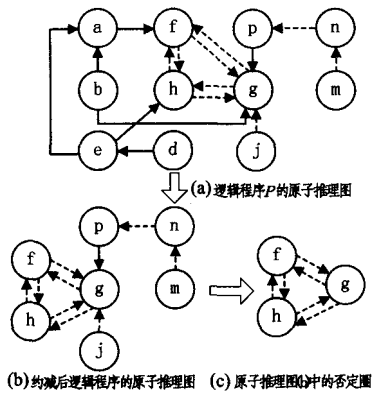


图 9

由 $DLV^{[13]}$ 求解知逻辑程序 P 的回答集为 $\{a, n\}, \{b, n\}, \{c, n\}$ 。即该程序存在回答集,算法结论正确。

结束语 本文给出了一种判定正规逻辑程序存在性的方法框架。该方法首先对正规逻辑程序进行约简,然后将约简后的正规逻辑程序分为 3 类,从而将正规逻辑程序的判定问题转化为对正规逻辑程序类别的判定。给出了逻辑程序的分类算法并证明了算法的正确性。未来的工作包括:本文方法的时空效率和其他性能分析,利用本文方法构建回答集求解器,以及把该方法应用于判断正规逻辑程序回答集个数的下限。

参考文献

[1] Lin F Z, Zhao X S. On Odd and Even Cycles in Normal Logic Programs[C]//Proceedings of the 19th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI2004). 2004;80-85
 [2] Gelfond M, Lifschitz V. The stable model semantics for logic programming[C]//Proceedings of 5th International Conference on Logic Programming (ICLP'1988). 1988;1070-1080
 [3] Lifschitz V, Turner H. Splitting a Logic Program [C]// Proce-

dings of 11th International Conference on Logic Programming (ICLP'1994). 1994;23-37
 [4] 钟勇,郭伟刚,钟昌乐,等. Datalog 逻辑程序调用语义及其应用研究[J]. 计算机科学,2010,37(1):170-175
 [5] You J H, Yuan L. A Three-Valued Semantics for Deductive Database and Logic Programs[J]. Computer and System Science, 1999,49(2),334-361
 [6] Kunen K. Signed Data Dependencies in Logic Programs [J]. Logic Programming,1987,7(3):231-245
 [7] Lin F Z, Zhao Y T. ASSAT: computing answer sets of a logic program by SAT solvers[C]//Proceedings of the 18th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI2002). 2002,157(1/2);115-137
 [8] Pontelli E. Answer Set Programming in 2010: A Personal Perspective[C]// Proceedings of 12th International Symposium on Practical Aspects of Declarative Languages (PADL' 2010). 2010;1-3
 [9] Chen Xiao-ping, Ji Jian-min, Lin Fang-zhen. Computing Loops with at Most One External Support Rule for Disjunctive Logic Programs[C]//Proceedings of 25th International Conference on Logic Programming (ICLP'2009). 2009;130-144
 [10] Baral C. Knowledge representation, reasoning, and declarative problem solving[M]. New York: Cambridge University Press, 2003
 [11] 沈榆平,赵希顺. 一个带破圈启发方法的回答集编程系统[J]. 软件学报,2008,19(4):69-78
 [12] Gelfond M, Przymusinska H, Teodor Przymusinski On the Relationship Between CWA, Minimal Model and Minimal Herbrand Model Semantics[J]. International Journal of Intelligent Systems,1990,5(5):549-564
 [13] Leone N, Pfeifer G, et al. The DLV system for knowledge representation and reasoning[J]. ACM TOCL,2006,7(3): 499-562

(上接第 208 页)

[6] Velho L. Quasi 4-8 subdivision[J]. Computer Aided Geometric Design,2001,5(18):345-357
 [7] Kobbelt L. $\sqrt{3}$ -subdivision [C]// Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, 2000; 103-112
 [8] Oswald P, Schroder P. Composite primal/dual-subdivision schemes[J]. Comput. Aided Geom. Design,2003,20(3):135-164
 [9] 吴剑煌,刘伟军,王天然. $\sqrt{3}$ 细分曲面的误差分析[J]. 机械工程学报,2007,43(2)
 [10] Jiang Qing-tang. Orthogonal and Biorthogonal $\sqrt{3}$ -refinement Wavelets for Hexagonal Data Processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2009,57(11)
 [11] Ghulam M, Sadiq H, Faheem K. $\sqrt{3}$ 细分曲面的误差界[J]. 中国科学技术大学学报,2009,39(6)
 [12] Labsik U, Greiner G. Interpolatory $\sqrt{3}$ -subdivision[J]. EUROGRAPHICS 2000/M. Gross F. R. A. Hopgood,2000,19
 [13] 彭育辉,高诚辉. 基于形状修正的三角网格模型顶点法失估算方

法[J]. 中国图象图形学报,2010,15(1)
 [14] Zhou Kun, Huang Jin, Snyder J, et al. Large mesh deformation using the volumetric graph Laplacian [J]. ACM SIGGRAPH, ACM Transactions on Graphics (TOG), 2005,24(3):496-503
 [15] Chung F R K. Spectral Graph Theory [C]// Volume 92 of Regional Conference Series in Mathematics. AMS, Prov, 1997
 [16] Desbrun M, Meyer M, Peter Schroder et al. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow [C]// SIGGRAPH 99: Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. New York, NY, USA, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co, 1999; 317-324
 [17] Sorkine O, Lipman Y, Daniel C-O, et al. Laplacian surface editing [C]//Proceedings of the Eurographics symposium on Geometry processing. Eurographics Association, 2004; 179-188
 [18] The digital michelangelo project, the stanford university [EB]. <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>
 [19] 龚勋. 基于单张二维图片的三维人脸建模[D]. 成都:西南交通大学,2008