

网络维数：一种度量复杂网络的新方法

刘胜久^{1,2} 李天瑞^{1,2} 刘小伟³

(西南交通大学信息科学与技术学院 成都 611756)¹

(四川省云计算与智能技术高校重点实验室 成都 611756)²

(南昌师范学院数学与计算机科学系 南昌 330032)³

摘要 如何对复杂网络进行刻画与度量,一直是人们关注的热点。在研究自相似复杂网络分形维数的基础上,提出了一种度量复杂网络的新方法——网络维数,即复杂网络边权重和的对数值与节点权重和的对数值的比值,可以将边权重及点权重推广到实数域和复数域;同时给出了不同类型权重对应的网络维数的计算方法;最后以几个代表性的经典复杂网络模型为例,讨论了所提出的网络维数的若干性质。

关键词 复杂网络,自相似网络,分形维数,网络维数

中图分类号 TP391 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.01.008

Network Dimension: A New Measure for Complex Networks

LIU Sheng-jiu^{1,2} LI Tian-rui^{1,2} LIU Xiao-wei³

(School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)¹

(Sichuan Key Lab of Cloud Computing and Intelligent Technique, Chengdu 611756, China)²

(Department of Mathematics and Computer Science, Nanchang Normal University, Nanchang 330032, China)³

Abstract How to measure complex networks has always received much attention. This paper proposed a new method based on the analysis of fractal dimension of self-similarity complex networks, named network dimension, to measure complex networks. Network dimension is expressed as the division of logarithm of the sum of edges' weights and logarithm of the sum of nodes' weights of complex networks. The weights of both edge and node are extended to real and complex number fields. The calculation methods of network dimensions of weighted networks with different types of weights were presented. Finally, several representative classical complex network models were taken as examples to discuss some properties of the proposed network dimension.

Keywords Complex network, Self-similarity network, Fractal dimension, Network dimension

1 相关工作

作为复杂系统的高度抽象,复杂网络因能对复杂系统进行较好的分析、刻画与描述,一直备受人们的关注。对复杂网络的研究最早可以追溯到 18 世纪 Euler 对哥尼斯堡七桥问题的研究,现代意义上的复杂网络研究起源于 20 世纪中叶 Erdos 和 Renyi 提出的 ER 随机网络模型^[1]。ER 随机网络理论奠定了后续近半个世纪对复杂网络进行研究的理论基础。

ER 随机网络的度呈泊松分布,与真实复杂网络的度分布并不相符。经过人们对 ER 随机网络模型的持续改进,WS^[2],NW^[3],BA^[4]等多种网络模型相继出现。WS 网络模型及 NW 网络模型的度呈指数分布,二者揭示了复杂网络的小世界特性;BA 网络模型的度呈幂律分布,揭示了复杂网络

的无标度特性。当前,从邻接矩阵的视角对复杂网络的自相似特性进行研究已经取得了许多进展^[5],从关联矩阵的视角研究超网络也取得了相当的成果^[6]。随机网络、小世界网络、无标度网络、自相似网络等各种网络的度分布各不相同,其特性的差异也较大。度量泊松分布、指数分布、幂律分布等需要不同的参数,如何对复杂网络进行较好的刻画与度量是当前人们关注的重点。

度量复杂网络的方法包括:网络规模、度秩函数、分维指标、分形维数等。网络规模(即网络的节点数目)是最为简单、最为直观的度量复杂网络方法,但其无法辨识节点数相同而边数不同的拓扑结构各异的复杂网络,因此实用性受限。度秩函数^[7]是从统计意义上对复杂网络进行度量的,但在具体的计算中因其计算量过大而复杂程度较高。分维指标^[8]用于

到稿日期:2018-06-29 返修日期:2018-07-24 本文受国家自然科学基金项目(61573292,61262058,61562063),江西省教育厅科技项目(GJJ171109,GJJ161241)资助。

刘胜久(1988—),男,博士后,主要研究方向为复杂网络、自然语言处理等,E-mail:liushengjiu2008@163.com;李天瑞(1969—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为智能信息处理、粗糙集与粒计算等,E-mail:trli@swjtu.edu.cn(通信作者);刘小伟(1978—),男,硕士,副教授,主要研究方向为复杂网络、智能信息处理、粗糙集等。

对煤炭断层的复杂网络进行度量,在实际应用中取得了较好的效果。采用拓扑学^[9]等方法对复杂网络进行度量在实际网络中已经取得了一些进展。真实网络固有的复杂特性,使得上述度量方法均存在一些缺陷与不足,如网络规模过于笼统、度秩函数计算复杂度较高、分维指标泛化性不足等。此外,人们也采用度分布对复杂网络进行度量,如泊松分布的 λ 参数、指数分布的率参数 λ 、幂律分布的标度指数 λ 等。但由于不同网络的度分布各不相同,因此该方法的普适性较差。在实际应用中,需要研究复杂网络的直观、合理且便于计算的度量。

近年来,随着复杂网络分形特性研究的兴起,源于分形几何的分形维数成为度量复杂网络的新研究热点。自相似特性是复杂网络有别于小世界特性及无标度特性的第三大特性,人们提出采用分形维数对复杂网络进行度量。传统意义上,复杂网络分形维数的计算极其复杂,而且受节点序列的选取等多种因素的干扰。目前,复杂网络分形维数的计算只能应用于权重为正实数的网络,而无法有效处理权重为负实数、纯虚数乃至复数的复杂网络。因此,本文提出了一种度量复杂网络的新方法——网络维数,网络维数可以推广和应用于边权重及节点权重为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同类型的复杂网络中。

2 预备知识

2.1 图论

图可以表述为 $G=(V,E)$,其中 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots\}$ ($1 \leq i \leq |V|$)是网络中所有节点的集合, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_j, \dots\}$ ($1 \leq j \leq |E|$)是网络中所有边的集合,且 $E \subseteq V \times V$ 。其中, $|V|$ 表示图 G 中的节点数目, $|E|$ 表示图 G 中的边数目。

定义 1^[10] 图 G 的节点度分布是指图 G 中节点度的概率分布或频率分布(统称分布)。

度分布是对一个图中节点度数的总体描述,对于随机图而言,其度分布是指图中节点度数的概率分布。对于任一非负整数 k ,度数为 k 的节点在图 G 中的所有节点中所占的比例 $p(k)$ 为^[11]:

$$p(k) = \frac{|\bigcup_{d(v_i)=k} \{v_i\}|}{|V|} \quad (1)$$

且:

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}^+} p(k) = 1 \quad (2)$$

其中, $d(v_i)$ 表示节点 v_i 的度, \mathbb{Z}^+ 为正整数,当然,也可以用图 G 中节点度的频数来描述度分布,此时式(1)及式(2)表示为:

$$p(k) = \frac{|\bigcup_{d(v_i)=k} \{v_i\}|}{|V|} \quad (3)$$

$$\sum_{d \in \mathbb{N}^0} p(k) = |V| \quad (4)$$

在描述图 G 的度分布时,式(1)和式(3)与式(2)和式(4)的效果是一样的。

定义 2^[10] 图的密度是指图 G 中的边数与最多可能的边数之比,记为 $Density(G)$ 。由于 G 中任意节点最多可能与除自身之外的其他所有节点相连,因此 $Density(G)$ 可用下式进行计算:

$$Density(G) = \frac{\sum_{k=1}^{|V|-1} kp(k)}{\frac{1}{2}|V|(|V|-1)} = \frac{2 \sum_{k=1}^{|V|-1} kp(k)}{|V|(|V|-1)}$$

$$= \frac{2|E|}{|V|(|V|-1)} \quad (5)$$

对于图而言,可以根据是否存在权重将图分为无权图及带权图。无权图是指图中的节点及边均没有权重的图,而带权图是指图中的节点或边存在权重的图。由于图与其邻接矩阵具有逐一对应的特性,若采用邻接矩阵对无权图及带权图进行描述,则无权图中邻接矩阵的元素非0即1,而带权图中邻接矩阵的元素可以为任意数,包括实数、虚数,甚至复数。显然,无权图是带权图的特例。在实际生活中,一般情况下带权图的权重为正实数。

2.2 分形维数

分形理论是Mandelbrot于20世纪提出的一种处理不规则、不光滑物体的理论^[12]。分形维数是其研究的一个重要内容。在经典的欧氏几何中,物体的维数是整数,如点是0维,线是1维,面是2维,体是3维。但在对一些实际物体进行分析研究时发现,自然界中的一些物体并不能用经典欧氏几何中的整数维进行描述,如起伏的山峦、漂浮的云朵、曲折的海岸等。对这些物体的描述需要采用新的方法,分形维数为刻画这些物体提供了可行的途径。

计算分形维数的方法众多,如豪斯道夫维数、信息维数、盒维数等。应用较广的是豪斯道夫维数,用公式表示为:

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\frac{1}{\epsilon})} \quad (6)$$

其中, ϵ 是小立方体的边长, $N(\epsilon)$ 是覆盖被测形体所需要的小立方体数目。维数公式意味着用边长为 ϵ 的小立方体覆盖被测形体,以确定形体的维数。一般情况下,对于任意物体 X ,其拓扑维数 $dim_t X$ 及豪斯道夫维数 $dim_H H$ 存在以下关系^[13]:

$$dim_t X \leq dim_H H \quad (7)$$

不同物体分形维数的计算有对应的理论与方法,其中拓扑维数为2的物体分形维数的计算已较为成熟并得到了广泛应用,如Koch雪花等。对于高维物体分形维数的计算,可以先将其降到低维,再计算低维物体的分形维数,最后根据余维相加定律还原得到原始高维物体的分形维数^[14]。

由于实际情况中分形物体往往极为复杂,采用单一的分形维数进行描述并不能全面刻画分形物体的各项特性。人们尝试采用多个不同的分形维数对分形物体进行描述,这就是多重分形^[15]。多重分形目前并没有公认的严格定义,在理论及应用等诸多方面还需要进一步的完善。

2.3 自相似网络

自相似特性是复杂网络继小世界特性及无标度特性之后的第三大特性^[16],对复杂网络自相似特性的研究是复杂网络研究的重点,其中分形维数的计算是其研究的主要内容之一。分形维数也是复杂网络的一种度量方法。显然,分形维数越大的复杂网络越复杂。对复杂网络分形维数的计算可以采用盒维数的方法^[17],也可以采用基于盒维数改进而得到的随机盒覆盖维数^[18]、边覆盖维数^[19]、球覆盖维数^[20]等其他方法。

以盒维数为代表的复杂网络分形维数的计算结果与理论值的吻合情况较好,但其计算复杂,且算法结果依赖于节点序列的选择。人们也将时间序列中分形维数的计算方法引入到

自相似网络的分形维数计算中,并得到了较为广泛的应用^[21]。此外,对加权网络分形维数的研究也引起了人们较大的关注^[22]。

我们从矩阵的视角来研究自相似网络。自相似矩阵对应的网络必然也是自相似的,进而二者的分形维数是相等的。于是,通过对邻接矩阵分形维数的研究可以间接得到自相似网络的分形维数。基于矩阵运算,我们分别构建了自相似复杂网络^[5]及自相似超网络^[6],并计算了其分形维数。余维相加定律等理论与方法也被应用到自相似网络中来计算分形维数^[23]。

现有的对自相似网络的研究及分形维数的计算虽然解决了网络中的一些问题,但仍有进一步推广应用的空间。针对复杂网络的研究已从无权图逐步推广并应用到带权图。一般情况下,对带权图的研究只是对边含有权重的图进行研究,忽略了对节点含有权重的图的研究,而且一般要求权重为正实数,对负实数或其他类型的权重则无法很好地进行处理。为此,我们从自相似网络分形维数出发,提出了一种度量复杂网络的新方法——网络维数,并对其特性进行了分析。

3 网络维数

3.1 无权图的网络维数

我们从邻接矩阵的视角对复杂网络进行了分析,分别构建了自相似复杂网络和随机复杂网络,并针对自相似复杂网络给出了其分形维数^[5]。由无向图构成的自相似复杂网络的分形维数可以表述为边数两倍的的对数值与节点数对数值的比值,即:

$$FD(G) = \frac{\log 2|E|}{\log |V|} \quad (8)$$

可以将无向图中的任一无向边视为两条有向边。因此,对于有向图而言,式(8)可以改写为如下形式:

$$FD(G) = \frac{\log |\vec{E}|}{\log |V|} \quad (9)$$

若图中既含有有向边,又含有无向边,则可以先将图中所有的无向边替换成两条有向边,再利用式(9)进行计算。显然,一般情况下,式(9)比式(8)更适用。式(9)即为无权图的网络维数的计算公式。特别地,当无权图为无向图时,也可以用式(8)计算图的网络维数。

3.2 权重为正实数的图的网络维数

式(9)的缺陷在于只能度量无权图的分形维数,若将图由无权图推广到权重为正实数的带权图,则式(9)可以改写为:

$$FD(G) = \frac{\log \sum_{e \in E} w_e}{\log \sum_{v \in V} w_v} = \frac{\log \sum_{e \in E} f(e)}{\log \sum_{v \in V} f(v)} = \frac{\log \sum_{1 \leq j \leq |E|} |e_j|}{\log \sum_{1 \leq i \leq |V|} |v_i|} = \frac{\log \sum_{1 \leq j, k \leq |V|} |C_{jk}|}{\log \sum_{1 \leq i \leq |V|} |v_i|} \quad (10)$$

其中, V 为图中节点的集合, E 为图中边的集合, $f(e)$ 为图的边权重函数, $f(v)$ 为图的节点权重函数, C 为图的邻接矩阵, $|v_i|$ 为第*i*个节点的权重, $|e_j|$ 为第*j*条边的权重。

显然,对于无权图而言,式(10)与式(9)是等价的,其网络维数即为其分形维数。式(10)即为权重为正实数的图的网络

维数的计算方法。由于式(10)中节点权重和边权重可以取任意正实数,因此可以将式(10)推广并应用于任意权重为正实数的图。

对于无权图及带权图而言,根据边权重及点权重的取值,可以得出其网络维数之间的关系,如图 1 所示。

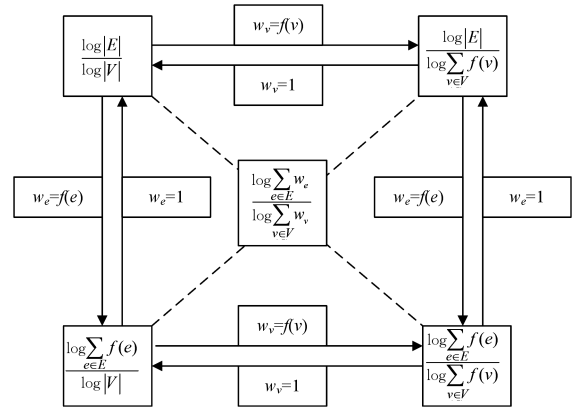


图 1 无权图与带权图的网络维数的关系

Fig. 1 Relationships between network dimensions of unweighted graph and weighted graph

从图 1 中可以看出,通过对无权图中的节点或边赋予不同的正实数权重,可以实现从无权图向带权图的拓展与推广。为带权图中的节点或边赋予不同的权重函数,可以具体分析带权图的各项特性。

3.3 权重为负实数的图的网络维数

图 1 只能处理节点权重或边权重为正实数的带权图;对权重为负实数的带权图,需要考虑真数为负实数的对数,我们通过欧拉公式解决此问题。

欧拉公式表述为:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (11)$$

由于正弦函数及余弦函数均为周期函数,因此式(11)实际上是一个周期多值函数。一般情况下,我们只对其一个周期内的数据进行分析即可,即对其主值或主支进行分析。显然,对于式(11)而言,当 $x = \pi$ 时,即有:

$$e^{i\pi} = -1 \quad (12)$$

对式(12)中等号的左右两部分同时取对数,即有:

$$\log e^{i\pi} = \log(-1) \quad (13)$$

对正实数形式的节点权重函数 $f(v)$ 及边权重函数 $f(e)$ 而言,则有:

$$\begin{cases} \log(-f(v)) = \log f(v) e^{i\pi} \\ \log(-f(e)) = \log f(e) e^{i\pi} \end{cases} \quad (14)$$

于是,我们实现了将节点权重及边权重由正实数推广到负实数。图 2 是权重为正实数及负实数的带权图网络维数关系图。

式(11)间接说明了权重为 0 的带权图没有实际意义。因为只有当 $\sin x$ 及 $\cos x$ 同时取 0 时才可能使式(11)中等号的右部分取 0,而 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,所以式(11)中等号的右部分不可能为 0。即严格意义上讲,在实数域内, $f(v)$ 及 $f(w)$ 的定义域为:

$$\begin{cases} f(v) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ f(e) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases} \quad (15)$$

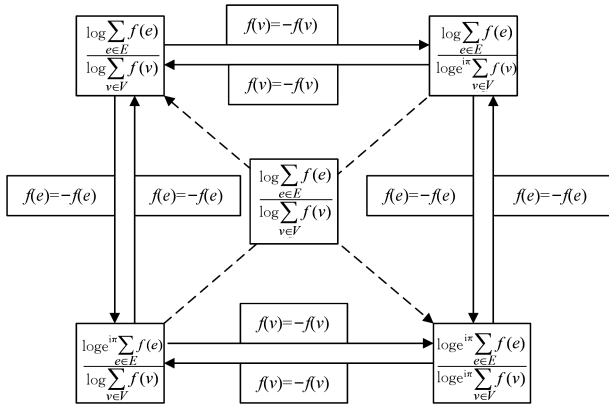


图2 权重为正实数及负实数的带权图网络维数的关系

Fig. 2 Relationships between network dimensions of weighted graphs with weights of both positive and negative real number

重及边权重可能由同时包含实数部分及虚数部分的复数组成,我们可以将节点权重及边权重进一步推广到复数。

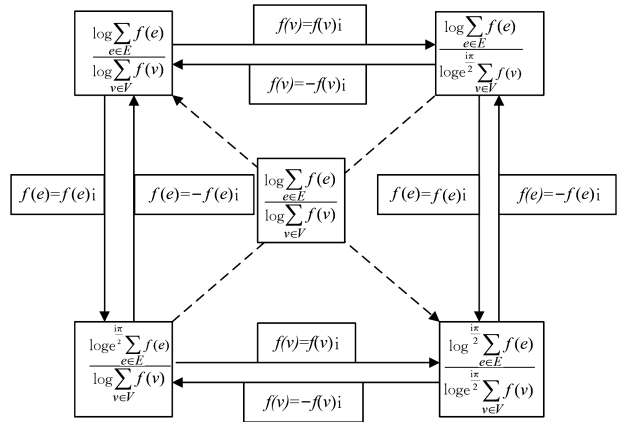


图3 权重为正实数及纯虚数的带权图网络维数的关系

Fig. 3 Relationships between network dimensions of weighted graphs with weights of positive real number and pure imaginary number

3.4 权重为纯虚数的图的网络维数

同理,借助于欧拉公式,我们也可以将节点权重及边权重由实数推广到纯虚数。

对于式(11)而言,当 $x = \pi/2$ 时,即有:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad (16)$$

对式(16)中等号的左右两部分同时取对数,即有:

$$\log e^{i\frac{\pi}{2}} = \log i \quad (17)$$

对于正实数形式的节点权重函数 $f(v)$ 及边权重函数 $f(e)$ 而言,则有:

$$\begin{cases} \log f(v)i = \log f(v) e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \log f(e)i = \log f(e) e^{i\frac{\pi}{2}} \end{cases} \quad (18)$$

图3是权重为正实数及纯虚数的带权图网络维数关系图。在图2及图3中,分别将带权图中的节点权重及边权重从正实数推广并应用到负实数及纯虚数。在实际中,节点权

3.5 权重为复数的图的网络维数

根据欧拉公式,对任意实数部分为 a 、虚数部分为 bi 的复数 z 而言,其对数为:

$$\begin{aligned} \log z &= \log(a + bi) \\ &= \log \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{bi}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ &= \log \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} \end{aligned} \quad (19)$$

借助于式(11),我们可以将带权图中的节点权重及边权重从实数及虚数推广并应用到复数。对正实数形式的节点权重函数 $f(v)$ 及边权重函数 $f(e)$ 而言,则有:

$$\begin{cases} \log(a + bi) f(v) = \log \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} f(v) \\ \log(a + bi) f(e) = \log \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \tan^{-1} \frac{b}{a}} f(e) \end{cases} \quad (20)$$

图4是权重为正实数及复数的带权图网络维数关系图。

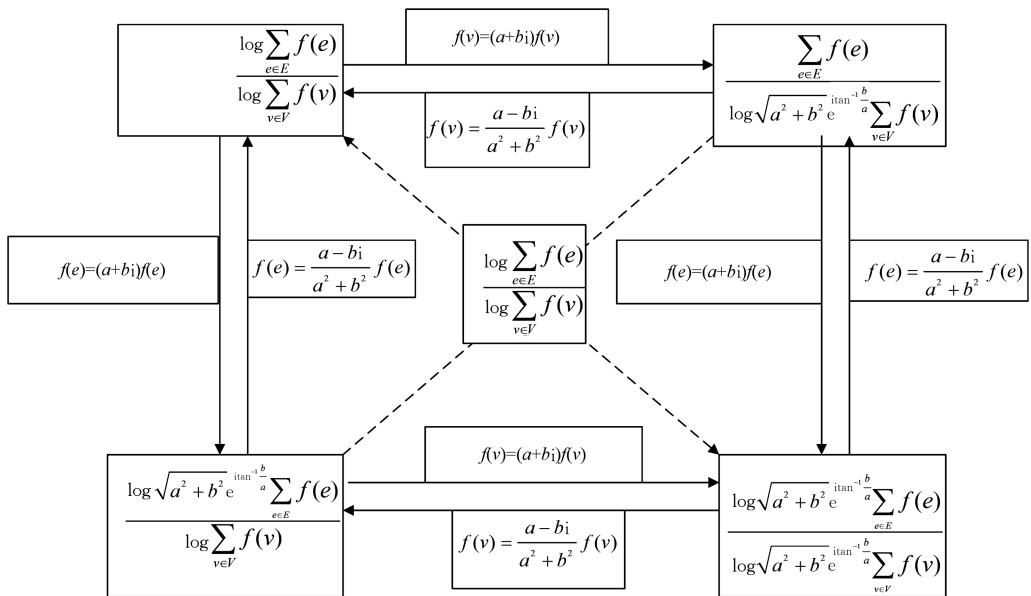


图4 权重为正实数及复数的带权图网络维数的关系

Fig. 4 Relationships between network dimensions of weighted graphs with weights of positive real number and pure complex number

与式(15)类似,在复数域中,图中节点的权重及边的权重也不能为 0,即 a 和 b 不能同时为 0。

从图 4 可以明显看出,当 $a=-1, b=0$ 时,图 4 退化为图 2;当 $a=0, b=1$ 时,图 4 退化为图 3,即图 2 与图 3 分别是图 4 在极端情况下的特例。

4 网络维数的若干性质研究

我们分别对图的节点权重及边权重分别为 0-1 形式的无权图、正实数的带权图、负实数的带权图、纯虚数的带权图、复数的带权图等进行了研究,对每一种图均给出了其网络维数的计算方法,并给出了它们与通常意义上权重为正实数的带权图之间的关系。由于权重越复杂的图,其特性也越复杂,因此现阶段应用较广的几个经典的网络模型实际上均是 0-1 形式的无权图。对复杂网络各项特性的研究均是从 0-1 形式的无权图开始的,于是我们选取最简单的权重为 0-1 形式的无权图进行分析研究,来讨论其网络维数的性质,进而将其推广并应用到其他类型的复杂网络。

定理 1 任意网络的网络维数不小于 0。

证明:根据网络维数的定义,对式(9)进行分析,则有:

$$ND(G) = \frac{\log|\vec{E}|}{\log|V|} \geq \frac{\log 1}{\log|V|} = 0 \quad (21)$$

因此,定理 1 显然成立。

由不同网络得到的 Kronecker 积图进行分析,可以得出如下定理。

定理 2 对于 n 个图 $G_{(i)} (1 \leq i \leq n)$ 的 Kronecker 积图 $G^{(n)}$ 而言, $G^{(n)}$ 的网络维数是所有构成此 Kronecker 积图的 $G_{(i)} (1 \leq i \leq n)$ 的边数对数值之和与节点数对数值之和的比值,用公式表示为:

若

$$G^{(n)} = \bigotimes_{i=1}^n G_{(i)} \quad (22)$$

则:

$$ND(G^{(n)}) = \frac{\sum_{i=1}^n \log|\vec{E}_{(i)}|}{\sum_{i=1}^n \log|V_{(i)}|} \quad (23)$$

证明:由式(22)可知:

$$\begin{cases} |\vec{E}^{(n)}| = \prod_{i=1}^n |\vec{E}_{(i)}| \\ |V^{(n)}| = \prod_{i=1}^n |V_{(i)}| \end{cases} \quad (24)$$

则有:

$$\begin{aligned} ND(G^{(n)}) &= \frac{\log|\vec{E}^{(n)}|}{\log|V^{(n)}|} = \frac{\log\prod_{i=1}^n |\vec{E}_{(i)}|}{\log\prod_{i=1}^n |V_{(i)}|} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \log|\vec{E}_{(i)}|}{\sum_{i=1}^n \log|V_{(i)}|} \end{aligned} \quad (25)$$

定理 2 得证。

若由一个图进行 n 次迭代 Kronecker 积运算得到的 Kronecker 积图的网络维数都相等,都等于初始图的网络维数,则可以得出如下引理。

引理 1 迭代 Kronecker 积图的网络维数都相等,且都等于初始图的网络维数。

证明:对式(25)进行分析,则有:

$$\begin{aligned} ND(G^{(n)}) &= \frac{\sum_{i=1}^n \log|\vec{E}_{(i)}|}{\sum_{i=1}^n \log|V_{(i)}|} = \frac{n \log|\vec{E}_{(1)}|}{n \log|V_{(1)}|} = \frac{\log|\vec{E}_{(1)}|}{\log|V_{(1)}|} \\ &= ND(G_{(1)}) \end{aligned} \quad (26)$$

引理 1 得证。

定理 3 当网络规模足够大,即网络节点数 n 趋近无穷时,有:

$$ND(G) \approx 2 + \log_n \text{Density}(G) \quad (27)$$

证明:当节点数目 n 趋近无穷时,有:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \log_n \text{Density}(G)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \log_n \frac{|\vec{E}|}{n(n-1)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_n n^2 + \log_n \frac{|\vec{E}|}{n(n-1)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_n \frac{|\vec{E}| n^2}{n(n-1)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_n \frac{|\vec{E}| n}{(n-1)}) \\ &= \log_n |\vec{E}| \\ &= \frac{\log|\vec{E}|}{\log|V|} \end{aligned} \quad (28)$$

定理 3 得证。

定理 3 说明了对一个特定的网络而言,其网络密度越大,对应的网络维数就越大,这与通常意义上网络越稠密则网络越复杂的认知是吻合的。

对 ER 随机网络进行分析,可以得出如下引理。

引理 2 对于随机连接概率为 p 的 ER 随机网络而言,在网络规模足够大,即网络节点数 n 趋近无穷时,有:

$$ND(G) \approx 2 + \log_n p \quad (29)$$

证明:不失一般性,我们对简单无向图进行分析。对于随机连接概率为 p 的 ER 随机网络而言,在网络规模足够大,即网络节点数 n 趋近无穷时,其边数为:

$$|\vec{E}| = 2|E| = pn(n-1) \quad (30)$$

将式(30)代入式(27),有:

$$\begin{aligned} ND(G) &\approx 2 + \log_n \text{Density}(G) = 2 + \log_n \frac{pn(n-1)}{n(n-1)} \\ &= 2 + \log_n p \end{aligned} \quad (31)$$

引理 2 得证。

结束语 复杂网络为复杂系统的分析研究提供了一种较为便捷的方法,受到了人们极大的关注。对于自相似网络而言,其分形维数是复杂网络的一种度量方法。本文对分形网络的分形维数进行拓展,提出了一种度量复杂网络的新指标——网络维数,网络维数即为网络边权重和的对数值与节点权重和的对数值的比值;同时将网络维数应用于节点权重及边权重为正实数、负实数、纯虚数、复数等多种不同类型的带权图,并给出了其网络维数的计算方法;最后,将网络维数

应用于几个经典的网络模型中,并分析网络维数的若干性质。后续研究的重点在于结合真实复杂网络的各项特性对网络维数进行深入的分析,并针对其给出可信的物理解释。

参考文献

- [1] ERDOS P, RENYI A. On random graphs[J]. *Publications Mathematicae*, 1959, 6(4): 290-297.
- [2] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks[J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440-442.
- [3] NEWMAN M E J, WATTS D J. Renormalization group analysis of the small-world network model[J]. *Physics Letter A*, 1999, 263(4-6): 341-346.
- [4] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509-512.
- [5] LIU S J, LI T R, HONG X J, et al. Complex network construction based on matrix operation[J]. *Scientia Sinica Informationis*, 2016, 46(5): 610-626. (in Chinese)
刘胜久, 李天瑞, 洪西进, 等. 基于矩阵运算的复杂网络构建方法研究[J]. *中国科学: 信息科学*, 2016, 46(5): 610-626.
- [6] LIU S J, LI T R, HONG X J, et al. Hypernetwork model and its properties[J]. *Journal of Frontiers of Computer Science and Technology*, 2017, 11(2): 194-211. (in Chinese)
刘胜久, 李天瑞, 洪西进, 等. 超网络模型构建及特性分析[J]. *计算机科学与探索*, 2017, 11(2): 194-211.
- [7] ZHU D Z, WU J, TAN Y J, et al. Degree-Rank function: A new statistic characteristic of complex network[J]. *Complex System and Complex Science*, 2006, 3(4): 28-34. (in Chinese)
朱大智, 吴俊, 谭跃进, 等. 度秩函数——一个新的复杂网络统计特征[J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2006, 3(4): 28-34.
- [8] XU Z B, WANG J Y, ZHANG D S, et al. Fractal Dimension Description of Complexity of fault network in coal mines[J]. *Journal of China Coal Society*, 1996, 21(4): 358-363. (in Chinese)
徐志斌, 王继尧, 张大顺, 等. 煤矿断层网络复杂程度的分维描述[J]. *煤炭学报*, 1996, 21(4): 358-363.
- [9] ZHENG X, CHEN J P, SHAO J L, et al. Analysis on topological properties of Beijing urban public transit based on complex network theory[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(19): 95-105. (in Chinese)
郑啸, 陈建平, 邵佳丽, 等. 基于复杂网络理论的北京公交网络拓扑性质分析[J]. *物理学报*, 2012, 61(19): 95-105.
- [10] 张先迪, 李正良. 图论及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [11] NEWMAN M E J. The structure and function of complex networks[J]. *SIAM Review*, 2003, 45(2): 167-256.
- [12] MANDELBROT B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension [J]. *Science*, 1967, 156(3775): 636-638.
- [13] BALK A R, BUCZOLICH Z, ELEKES M. A new fractal dimension: The topological Hausdorff dimension [J]. *Advances in Mathematics*, 2015, 274(1): 881-927.
- [14] SREENIVASAN K R, MENEVEAU C. The fractal facets of turbulence[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, 173(173): 357-386.
- [15] HARTE D. *Multifractals: Theory and Applications*[M]. Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [16] SONG C M, HAVLIN S, MAKSE H A. Self-similarity of complex networks[J]. *Nature*, 2005, 433(7024): 392-395.
- [17] SONG C M, GALLOS L K, HAVLIN S, et al. How to calculate the fractal dimension of a complex network; the box covering algorithm[J]. *Journal of Statistical Mechanics Theory & Experiment*, 2007, 2007(3): 297-316.
- [18] KIM J S, GOH K I, SALVI G, et al. Fractality in complex networks: critical and supercritical skeletons[J]. *Physical Review E*, 2007, 75(2): 016110.
- [19] ZHOU W X, JIANG Z Q, SORNETTE D. Exploring self-similarity of complex cellular networks; The edge-covering method with simulated annealing and log-periodic sampling[J]. *Physica a Statistical Mechanics & Its Applications*, 2006, 375(2): 741-752.
- [20] GAO L, HU Y, DI Z. Accuracy of the ball-covering approach for fractal dimensions of complex networks and a rank-driven algorithm[J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2008, 78(4 Pt 2): 046109.
- [21] LIU J L, YU Z G, ANH V. Topological properties and fractal analysis of a recurrence network constructed from fractional Brownian motions[J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2014, 89(3): 032814.
- [22] WEI D J, LIU Q, ZHANG H X, et al. Box-covering algorithm for fractal dimension of weighted networks[J]. *Scientific Report*, 2013, 3(6157): 3049.
- [23] LIU S J, LI T R, HONG X J, et al. Supernetwork based on matrix operation and its properties [J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2018, 13(3): 359-365. (in Chinese)
刘胜久, 李天瑞, 洪西进, 等. 基于矩阵运算的超网络构建方法研究及特性分析[J]. *智能系统学报*, 2018, 13(3): 359-365.