在线核选择的对抗式多臂赌博机模型

李峻樊 廖士中
(天津大学智能与计算学部 天津 300350)

摘 要 在线核选择是在线核方法的重要工作,可分为过滤式、包裹式和嵌入式3种类型。已有在线核选择探索了包裹式方法和嵌入式方法,也经验地采用了过滤式方法,但迄今尚没有一个统一的框架来比较、分析并研究各种在线核选择问题。文中提出一种在线核选择的多臂赌博机模型,该模型可作为一个统一框架,同时给出在线核选择的包裹式方法和嵌入式方法。给定候选核集合,候选集中的一个核对应多臂赌博机模型中的一个臂,在线核选择的每回合依据一个概率分布重复地随机选择多个核,并应用指数加权的方法来更新该概率分布。这样,在线核选择问题本质上可归约为一个非遗忘对手环境下的对抗式多臂赌博机问题,并可应用对抗式多臂赌博机模型统一地给出在线核选择的包裹式方法和嵌入式方法。文中进一步提出一个新的在线核选择后悔的概念,理论证明包裹式方法具有关于回合数亚线性的弱期望后悔界,并且嵌入式方法具有关于回合数亚线性的期望后悔界。最后,在标准数据集上通过实验验证了所提统一框架的可行性。

关键词 在线核选择,对抗式多臂赌博机,非遗忘对手,统一框架

中图法分类号 TP181,TP301 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.01.009

Adversarial Multi-armed Bandit Model with Online Kernel Selection

LI Jun-fan LIAO Shi-zhong
(College of Intelligence and Computing,Tianjin University,Tianjin 300350,China)

Abstract Online kernel selection is an important component of online kernel methods,and it can be classified into three categories,that is,the filter,the wrapper and the embedder. Existing online kernel selection explores the wrapper and the embedder categories,and empirically adopts the filter approach. But there have been no unified frameworks yet for comparing,analyzing and investigating online kernel selection problems. This paper proposed a unified framework for online kernel selection researches via multi-armed bandits,which can model the wrapper and the embedder of online kernel selection simultaneously. Giving a set of candidate kernels,this paper corresponds each kernel to an arm in an adversarial bandit model. At each round of online kernel selection,this paper randomly chose multiple kernels according to a probability distribution,and updated the probability distribution via the exponentially weighted average method. In this way,an online kernel selection problem was reduced to an adversarial bandit problem in a non-oblivious adversary setting,and a unified framework was developed for online kernel selection researches,which can model the wrapper and the embedder uniformly. This paper further defined a new regret concept of online kernel selection,and proved that the wrapper within the framework enjoys a sub-linear weak expected regret bound and the embedder within the framework enjoys a sub-linear expected regret bound. Experimental results on benchmark datasets demonstrate the effectiveness of the proposed unified framework.

Keywords Online kernel selection,Adversarial multi-armed bandit,Non-oblivious adversary,Unified framework

1 引言

在线核选择是在线核学习的关键问题。不同于离线核选择可分为训练、验证和测试阶段,在线核选择与在线核学习在每回合必须相混合,同时完成选择、预测和更新工作。由于在线核学习处理的是流式数据,且数据没有固定分布[1-2],因此每回合必须实时完成,且在线核选择和在线核学习均须有理论保证。经典的离线核选择方法(如 k-折交叉验证(k-fold cross validation)[3]和最小化模型泛化误差上界[4])需要划分训练集和验证集,并在训练集和验证集上反复选择核,不仅时间复杂度高,而且不适用于在线核学习和在线核选择[5]。

模型选择方法大体上可分为过滤式、包裹式和嵌入式3种类型[6]。已有在线核选择工作经验地采用过滤式方法,零散地提出了个别嵌入式方法和包裹式方法,Dekel 等[7]以及

到稿日期:2018-06-18 返修日期:2018-09-09 本文受国家自然科学基金项目(61673293)资助。

李峻樊(1992-),男,硕士,主要研究方向为机器学习和模型选择,E-mail:junfli@tju.edu.cn;**廖士中**(1964-),男,博士,教授,CCF会员,主要研究方向为人工智能、机器学习和理论计算机科学,E-mail:szliao@tju.edu.cn(通信作者)。

Zhao 等[8]经验地预设核，采用了一种过滤式方法。该类方法没有理论上的保证，也没有规范的形式。Fan 等[9]和 Chen 等[10]提出自适应的在线核选择，在原始的再生核希尔伯特空间中，应用梯度下降方法最小化每回合的瞬时损失学习核参数。Nguyen 等[11]和 Han 等[12]针对高斯核，利用随机特征映射近似核，将核参数从随机特征映射中分离出来，还应用梯度下降方法最小化每回合的瞬时损失学习核参数。Yang 等[13]针对梯度下降的在线核学习，提出另一种嵌入式在线核选择方法（Online Kernel Selection，OKS），即给定候选核集合，每回合根据一个概率分布随机选择一个核。这种在同一个优化框架下应用梯度下降方法来学习模型并选择核参数的方法属于嵌入式方法，嵌入式方法不适用于任意的在线核学习模型。Foster 等[5]应用专家建议模型提出一种在线模型选择的包裹式方法。包裹式方法适用于任意在线学习模型，给定候选模型类，每个模型类对应一个专家，每回合要得到所有专家的损失。因此，该方法每回合要在所有候选模型类中预测样例并得到损失，时间复杂度线性依赖于候选模型集合的规模。迄今为止，尚没有一个统一的框架来比较、分析并研究各种在线核选择问题。针对这一问题，拟应用对抗式多臂赌博机模型来构建一个在线核选择的统一框架。

考虑非遗忘对手环境下的对抗式多臂赌博机问题，在第 t 回合，学习者从 K 个候选臂中选择一个臂，得到一个损失，该损失由一个对手给出，并且与学习者前 $t-1$ 回合的选择相关。学习者的目的是采用某种策略 $\mathscr{P}$ 来最小化累积损失。现有的“EXP3”多臂赌博机算法可保证 $O(\sqrt{T})$ 的弱期望后悔界[14-15]。对于在线核选择，每回合选择一个核，从而得到预测损失。由于在线核学习处理的是流式数据，该回合的损失可能与之前所选择的核都相关，可被认为是一个非遗忘对手给出的。这样，可应用对抗式多臂赌博机模型构建一个在线核选择的统一框架，基于该框架可系统深入地研究在线核选择的各种问题和各种方法。

不同于经典的对抗式多臂赌博机模型每回合只选择一个臂，为了更快地收敛到好的核，所提统一框架每回合随机选择多个核。进一步地，根据对抗式多臂赌博机的“策略后悔”[16]，提出一种新的在线核选择后悔的概念。理论证明，在该统一框架下，在线核选择的包裹式方法可保证亚线性的弱期望后悔界，在线核选择的嵌入式方法可保证亚线性的期望后悔界。实验结果表明，所提统一框架可同时保证精度和效率。

2 预备知识

下面给出部分符号的定义，并简要介绍在线核学习和多臂赌博机问题。

2.1 符号定义

令 $S=\{x_i,y_i\}_{i=1}^{T}$ 表示大小为 T 的样本序列，其中 $x_i\in\mathbb{R}^d$，$y_i\in\mathbb{R}$。$\mathscr{K}=\{\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2,\cdots,\boldsymbol{\kappa}_K\}$表示 K 个候选核的集合。$\boldsymbol{\kappa}_i(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\rightarrow\mathbb{R}$，其中 $i=1,2,\cdots,K$。$\mathscr{H}=\{f\mid f:\mathbb{R}^d\rightarrow\mathbb{R}\}$表示假设空间，$\ell(f(x),y)$表示 L-Lipschitz 连续的有界凸损失函数，满足$|\ell(f(x),y)|\leqslant B$。$\nabla\ell_f(f(x),y)$ 表示损失函数对 f 的梯度或者次梯度。$i_m=\{i,i,\cdots,i\}$表示 m 维各分量为 $i\in\mathbb{R}$ 的向量。

2.2 在线核学习

给定样本序列 S 以及核 $\boldsymbol{\kappa}(\cdot,\cdot)$，假设空间 $\mathscr{H}$ 是由核 $\boldsymbol{\kappa}(\cdot,\cdot)$ 诱导的再生核希尔伯特空间。学习者应用在线学习算法在假设空间 $\mathscr{H}$ 中学习得到模型序列$\{f_t\}_{t=1}^{T}$。定义如下相对于假设空间 $\mathscr{H}$ 的后悔以度量在线学习算法的性能[1]：

$$\mathscr{R}(\mathscr{H})=\sum_{t=1}^{T}\ell(f_t(x_t),y_t)-\min_{f\in\mathscr{H}}\sum_{t=1}^{T}\ell(f(x_t),y_t)\tag{1}$$

式(1)表示学习者的累积损失与假设空间 $\mathscr{H}$ 中样本序列 S 上最优模型的累积损失之差。学习者的目标是最小化后悔，通常须有 $\mathscr{R}(\mathscr{H})=O(T)$。此时，随着样本序列长度的增加，学习者的平均损失会收敛到假设空间中最优模型的平均损失。

2.3 多臂赌博机问题

多臂赌博机问题是序贯决策的经典问题[15]。令 $\mathscr{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_K\}$ 表示 K-臂赌博机所有臂的集合。在第 t 回合，学习者根据策略 $\mathscr{P}$ 从 A 中选择一个臂 a_{I_t}，并观测到损失 l_{t,I_t}。对于随机多臂赌博机问题，l_{t,I_t} 由某个固定的概率分布 v_{I_t} 随机产生；对于对抗式多臂赌博机问题，l_{t,I_t} 由对手给定。如果 l_{t,I_t} 与学习者前 $t-1$ 回合的选择无关，则对手为遗忘对手；反之，对手为非遗忘对手。学习者的目的是在 T 回合结束后最小化累积损失。

通常用下面的期望后悔来表示策略 $\mathscr{P}$ 的性能：

$$\mathbb{E}[\mathscr{R}]=\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\min_{a_i\in A}\sum_{t=1}^{T}l_{t,i}\tag{2}$$

对于遗忘对手环境下的多臂赌博机问题，“EXP3”算法[14]能够保证关于回合数最优的期望后悔界：

$$\mathbb{E}[\mathscr{R}]=O(\sqrt{K\ln(K)T})$$

对于非遗忘对手环境下的多臂赌博机问题，“EXP3”算法能够保证关于回合数最优的弱期望后悔界：

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{R}}&=\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\min\nolimits_{a_i\in A}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,i}]\\&=O(\sqrt{K\ln(K)T})\end{aligned}\tag{3}$$

其中，期望是针对学习者前 T 回合所选择的核。

下面将应用对抗式多臂赌博机模型，同时给出在线核选择的包裹式方法和嵌入式方法。

3 包裹式方法

在非遗忘对手的对抗式多臂赌博机模型下，基于“EXP3”算法，设计在线核选择的包裹式方法（Online Kennel Selection Wrapper with EXP3，OKSW）。

令 OKL$(\{x,y\},\boldsymbol{\kappa})$ 为一种在线核学习算法，$|\mathscr{K}|=K$，$\mathscr{H}=\{\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2,\cdots,\mathscr{H}_K\}$是假设空间。每个候选核 $\boldsymbol{\kappa}_i\in\mathscr{K}$ 对应多臂赌博机的一个臂 $a_i\in\mathscr{A}$。记 $\omega=\{\omega_{t,1},\omega_{t,2},\cdots,\omega_{t,K}\}$为 K 个候选核的权重向量，$P_t=\{p_{t,1},p_{t,2},\cdots,p_{t,K}\}$为 K 个候选核的概率分布，满足：

$$p_{t,i}=(1-\gamma)\frac{w_{t,i}}{\sum_{j=1}^{K}w_{t,j}}+\gamma\cdot\frac{1}{K}\tag{4}$$

其中，$t=1,2,\cdots,T$，$i=1,2,\cdots,K$。P_t 可以看作是每个核的权重之比再加上一个均匀分布。这样，可保证每个核至少有

γ/K 的概率被选中,以探索到所有的核。γ 称为探索因子。

经典的对抗式多臂赌博机问题每回合随机选择一个臂。为快速探索出好的核,每回合可随机选择多个核。具体地,在第 t 回合,学习者以相同的概率分布 P_t 有放回地进行至多 m 次采样。记 $\kappa_{I_{ti}}$ 表示学习者第 i 次采样的核,$S_{t,i-1}$ 表示前 $i-1$ 次采样到的核的集合。若第 i 次采样到的核 $\kappa_{I_{ti}} \notin S_{t,i-1}$,则将 $\kappa_{I_{ti}}$ 加入到集合 $S_{t,i-1}$ 中,否则停止采样。采样结束后,令 $S_t=\{\kappa_{I_{t1}},\kappa_{I_{t2}},\cdots,\kappa_{I_{t|S_t|}}\}$ 表示采样到的 $|S_t|$ 个核的集合。以相同的概率从 S_t 中随机选择一个核 κ_{I_t}。学习者调用 $\mathrm{OKL}(\{x_t,y_t\},\kappa_{I_t})$ 给出本回合对样例 $\{x_t,y_t\}$ 的预测 $\hat{y}_{t,I_t}$,得到损失 $l_{t,I_t}=\ell(\hat{y}_{t,I_t},y_t)$。对于任意 $\kappa_j\in S_t-\{\kappa_{I_t}\}$,学习者调用 $\mathrm{OKL}(\{x_t,y_t\},\kappa_j)$ 给出对样例 $\{x_t,y_t\}$ 的预测 $\hat{y}_{t,j}$,并得到损失 $l_{t,j}=\ell(\hat{y}_{t,j},y_t)$。

对于在线二分类问题,令损失 $l_{t,j}=\mathbb{I}\{\mathrm{sign}(\hat{y}_{t,j})\neq y_t\}$。由于每回合只能得到所选核对样例预测的损失,因此对所有候选核的损失给出一个估计量:

$$\hat{l}_{t,i}=\frac{\beta l_{t,i}}{|S_t|\cdot p_{t,i}}\mathbb{I}(\kappa_i\in S_t),i=1,2,\cdots,K \tag{5}$$

利用对每一个候选核估计的损失 $\hat{l}_{t,i}$,应用指数加权的方法更新每个核对应的权重:

$$\omega_{t+1,i}=\omega_{t,i}\cdot\exp(-\frac{\gamma}{K}\hat{l}_{t,i}) \tag{6}$$

进而用其来更新第 $t+1$ 回合的概率分布 P_{t+1}。

定义如下在线核选择的后悔来度量在线核选择方法的性能:

$$\mathcal{R}_{\mathrm{OKS}}=\sum_{t=1}^{T}l_{t,I_t}-\min_{\kappa_i\in\mathcal{K}}\sum_{t=1}^{T}l_{t,i} \tag{7}$$

其中,$\sum_{t=1}^{T}l_{t,i}$ 表示固定选择核 κ_i 时,在假设空间 $\mathcal{H}_i$ 中学到的模型序列而得到的累积损失。

下面给出在非遗忘对手环境下 OKSW 的理论结果。

定理 1 对于任意 $\kappa_j\in\mathcal{K}$,$l_{t,j}\in[0,B]$,$j=1,2,\cdots,K$,令:

$\beta=m\in\{1,2,\cdots,K\}$

$$\gamma=\sqrt{\frac{2K\ln(K)}{m(2+mB)BT}}$$

则 OKSW 可保证如下在线核选择的弱期望后悔界:

$$\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,j}]\leqslant\sqrt{\frac{2(2+mB)BK\ln(K)T}{m}}$$

在非遗忘对手环境下,$l_{t,j}$ 与学习者前 $t-1$ 回合的选择相关。当 $m=1$ 时,OKSW 退化为经典的多臂赌博机问题,每回合选择一个臂。Arora 等[16] 指出,若对手在第 t 回合给出的损失与学习者前 $t-1$ 回合的选择相关,则式(7)无法保证亚线性的期望后悔。定理 1 给出的是弱期望后悔,比较的是期望意义下表现最好的核。

证明:对于任意回合 t,应用"EXP3"算法的分析过程[14],给出定理证明的关键步骤。首先给出下面两个式子:

$$\sum_{i=1}^{K}p_{t,i}\hat{l}_{t,i}=\sum_{\kappa_i\in S_t}\frac{\beta l_{t,i}}{|S_t|}$$

$$\sum_{i=1}^{K}p_{t,i}\hat{l}_{t,i}^{2}\leqslant\beta B\sum_{i=1}^{K}\hat{l}_{t,i}$$

令 $W_t=\sum_{j=1}^{K}w_{t,j}$,可得:

$$\frac{W_{t+1}}{W_t}\leqslant 1-\frac{\gamma}{(1-\gamma)K}\sum_{\kappa_i\in S_t}l_{t,i}+\frac{(2+\beta B)\gamma^2}{2K^2(1-\gamma)}\sum_{i=1}^{K}\hat{l}_{t,i}$$

以上不等式由 $\exp(-x)\leqslant 1-x+0.5x^2$ 在 $x>0$ 时得到。

又由于 $x\in\mathbb{R}$ 时 $1+x\leqslant\exp(x)$,因此:

$$\ln\frac{W_{t+1}}{W_t}\leqslant\frac{-\gamma\beta}{(1-\gamma)K}\sum_{\kappa_i\in S_t}\frac{l_{t,i}}{|S_t|}+\frac{(2+B)\gamma^2}{2K^2(1-\gamma)}\sum_{i=1}^{K}\hat{l}_{t,i}$$

上述不等式两边均对 t 求和:

$$\ln\frac{W_{T+1}}{W_1}\leqslant\frac{-\gamma}{(1-\gamma)K}\sum_{t=1}^{T}\Big[\sum_{\kappa_i\in S_t}\frac{\beta l_{t,i}}{|S_t|}-\frac{(2+B)\gamma}{2K}\sum_{i=1}^{K}\hat{l}_{t,i}\Big]$$

另一方面,对于任意的 $\kappa_j\in\mathcal{K}$,都有:

$$\ln\frac{W_{T+1}}{W_1}\geqslant-\frac{\gamma}{K}\sum_{t=1}^{T}\hat{l}_{t,j}-\ln K$$

由以上两个不等式可得:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{\kappa_i\in S_t}\frac{l_{t,i}}{|S_t|}\leqslant(1-\gamma)\sum_{t=1}^{T}\frac{\hat{l}_{t,j}}{\beta}+\frac{K\ln(K)}{\beta\gamma}+\frac{(2+\beta B)\gamma}{2K\beta}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{K}\hat{l}_{t,i} \tag{8}$$

令 $S_t=\{\kappa_{i_1},\kappa_{i_2},\cdots,\kappa_{i_{|S_t|}}\}$,满足:$i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{|S_t|}$。若 $|S_t|<m$,可得 $p(\forall\kappa_j\in S_t)=p_{t,j}\delta_{t,j}$,其中 $\delta_{t,j}=|S_t|\sum_{i_2\neq j}\cdots\sum_{i_{|S_t|}\neq j}\prod_{i\in S_t,i\neq j}p_{t,i}\sum_{r\in S_t}p_{t,r}$;若 $|S_t|=m$,可得 $p(\forall\kappa_j\in S_t)=p_{t,j}\delta_{t,j}$,其中 $\delta_{t,j}=|S_t|\sum_{i_2\neq j}\cdots\sum_{i_{|S_t|}\neq j}\prod_{i\in S_t,i\neq j}p_{t,i}$。

可以证明 $\delta_{t,j}\leqslant|S_t|$。

给定 $S_1,S_2,\cdots,S_{t-1}$,式(8)中两边分别对 S_t 求期望,可得:

$$\mathbb{E}[l_{t,I_t}]=\frac{1}{|S_t|}\sum_{\kappa_i\in S_t}\mathbb{E}[l_{t,i}],\mathbb{E}[\hat{l}_{t,j}|\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2,\cdots,\mathcal{K}_{t-1}]\leqslant\beta\mathbb{E}[l_{t,j}]$$

则有:

$$\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,j}]\leqslant\frac{K\ln(K)}{\beta\gamma}+\frac{(2+\beta B)\gamma BT}{2}$$

令:

$$\gamma=\sqrt{\frac{2K\ln(K)}{\beta(2+\beta B)BT}}$$

可得:

$$\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,j}]\leqslant\sqrt{\frac{2(2+\beta B)BK\ln(K)T}{\beta}}$$

证毕。

4 嵌入式方法

在线核选择的包裹式方法在非遗忘对手环境下无法保证亚线性的期望后悔。基于"EXP3"算法,文中提出在线核选择的嵌入式方法(Online Kennel Selection Embedder with EXP3,OKSE)。OKSE 面向应用梯度下降方法的在线核学习,理论上能够保证式(7)得到亚线性的期望后悔。

令 $\mathrm{OKL}(\{x,y\},\kappa)$ 是一种基于梯度下降的在线核学习算法。在第 t 回合,学习者首先根据式(4)的概率分布 P_t 采样至多 m 次,得到集合 S_t;以相同的概率从 S_t 中随机选择一个

核κ_{I_t}，调用OKL($\{x_t,y_t\},\kappa_{I_t}$)对样例$\{x_t,y_t\}$进行预测，并得到损失$l_{t,I_t}=\ell(\hat{y}_{t,I_t},y_t)$。针对在线二分类问题，损失$l_{t,I_t}=\mathbb{I}\{\mathrm{sign}(\hat{y}_{t,I_t}\neq y_t\}$。令$f_{t,I_t}\in\mathscr{H}_{I_t}$表示第$t$回合OKL($\{x_t,y_t\},\kappa_{I_t}$)对样例$\{x_t,y_t\}$进行预测的模型，应用梯度下降方法来更新模型：

$$f_{t+1,I_t}=f_{t,I_t}-\frac{\beta\eta\nabla\ell_{f_{t,I_t}}(f_{t,I_t}(x_t),y_t)}{|S_t|\cdot p_{t,I_t}} \tag{9}$$

此处应用损失函数对模型f_{t,I_t}的梯度或次梯度的估计量来更新模型[13,17]，该估计量作为该核没有被选中时的更新补偿。引入更新补偿机制可以保证亚线性的期望后悔。对于任意$\kappa_j\in S_t-\{\kappa_{I_t}\}$，调用OKL($\{x_t,y_t\},\kappa_j$)对样例$\{x_t,y_t\}$进行预测，得到损失$l_{t,j}=\ell(\hat{y}_{t,j},y_t)$，并根据式(9)来更新模型，$j=1,2,\cdots,K$。

然后根据式(5)对所有候选核的损失给出一个估计量，利用估计的损失$\hat{l}_{t,i}$，再根据式(6)来更新每个核对应的权重$\omega_{t+1,i}$，并更新第$t+1$回合的概率分布P_{t+1}。

下面给出在非遗忘对手环境下OKSE的理论结果。

引理1 对于任意有界的凸损失函数$\ell(f(x),y)\in[0,B]$，令梯度下降的步长$\eta=\mathrm{O}(1/\sqrt{T})$，$\beta=m$，且

$$\gamma=(\|f\|^2KL^2)^{\frac{1}{3}}((2+mB)B)^{-\frac{2}{3}}T^{-\frac{1}{3}} \tag{10}$$

对于任意的$\kappa_j\in\mathscr{K}$，$j=1,2,\cdots,K$，有：

$$\sum_{t=1}^T\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\min_{f\in\mathscr{H}_j}\sum_{t=1}^T\ell(f)=\mathrm{O}(T^{\frac{2}{3}})$$

证明：令$q=\mathbb{I}(\kappa_j\in S_t)$，$\forall f\in\mathscr{H}_j$，由在线凸优化的标准分析过程可得：

$$\begin{aligned}&\nabla\ell_{f_{t,j}}\cdot(f_{t,j}-f)q=\\&|S_t|p_{t,j}\frac{\|f_{t,j}-f\|^2-\|f_{t+1,j}-f\|^2}{2\beta\eta}+\frac{\beta\eta\nabla\ell^2_{f_{t,j}}}{2p_{t,j}|S_t|}q\end{aligned}$$

将$\sum_{t=1}^T\frac{\hat{l}_{t,j}}{\beta}$重写为$\sum_{t=1}^T\frac{\ell(f_{t,j})}{|S_t|p_{t,j}}\cdot q$，则有：

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^T\frac{1}{|S_t|p_{t,j}}(\ell(f_{t,j})-\ell(f))\cdot q\\&\quad\leqslant\sum_{t=1}^T\frac{1}{|S_t|p_{t,j}}\nabla\ell_{f_{t,j}}\cdot(f_{t,j}-f)\cdot q\\&\quad\leqslant\sum_{t=1}^T\frac{\|f_{t,j}-f\|^2-\|f_{t+1,j}-f\|^2}{2\beta\eta}+\sum_{t=1}^T\frac{\beta\eta\nabla\ell^2_{f_{t,j}}q}{2p^2_{t,j}|S_t|^2}\end{aligned}$$

给定$S_1,S_2,\cdots,S_{t-1}$，对S_t求期望：

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^T\mathbb{E}\left[\frac{\ell(f_{t,j})-\ell(f)}{|S_t|p_{t,j}}q\right]&\leqslant\frac{\|f\|^2}{2\beta\eta}+\sum_{t=1}^T\frac{\delta_{t,j}\beta\eta\nabla\ell^2_{f_{t,j}}}{2p_{t,j}|S_t|^2}\\&\leqslant\frac{\|f\|^2}{2\beta\eta}+\frac{K\beta\eta L^2T}{2\gamma}\end{aligned}$$

其中，$p_{t,j}>\frac{\gamma}{K}$，$\delta_{t,j}\leqslant|S_t|$。进而可得：

$$\sum_{t=1}^T\mathbb{E}\left[\frac{\ell(f_{t,j})q}{|S_t|p_{t,j}}\right]\leqslant\sum_{t=1}^T\ell(f)+\frac{\|f\|^2}{2\beta\eta}+\frac{K\beta\eta L^2T}{2\gamma} \tag{11}$$

其中：

$$\sum_{t=1}^T\mathbb{E}\left[\frac{\ell(f)}{|S_t|p_{t,j}}q\right]=\sum_{t=1}^T\mathbb{E}\left[\frac{p_{t,j}\delta_{t,j}\ell(f)}{|S_t|p_{t,j}}\right]\leqslant\sum_{t=1}^T\ell(f)$$

给定$S_1,S_2,\cdots,S_{t-1}$，对S_t求期望：

$$\mathbb{E}[l_{t,I_t}]=\frac{1}{|S_t|}\sum_{\kappa_i\in S_t}\mathbb{E}[l_{t,i}] \tag{12}$$

由式(10)－式(12)可得：

$$\begin{aligned}&\sum_{t=1}^T\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\sum_{t=1}^T\ell(f)\\&\quad\leqslant\frac{\|f\|^2}{2\beta\eta}+\frac{K\beta\eta L^2T}{2\gamma}+\frac{K\ln(K)}{\beta\gamma}+\frac{(2+\beta B)BT\gamma}{2}\\&\quad\leqslant\sqrt{\frac{\|f\|^2KL^2T}{\gamma}}+\frac{K\ln(K)}{\beta\gamma}+\frac{(2+\beta B)BT\gamma}{2}\end{aligned}$$

其中：

$$\eta=\sqrt{\frac{\|f\|^2\gamma}{K\beta^2L^2T}}$$

令$\gamma=\Theta(T^{-\alpha})$，则有：

$$\sum_{t=1}^T\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\sum_{t=1}^T\ell(f_j^*)=\mathrm{O}(T^{\frac{1+\alpha}{2}})+\mathrm{O}(T^{\alpha})+\mathrm{O}(T^{1-\alpha})$$

若要最小化后悔界，则令$\frac{(1+\alpha)}{2}=1-\alpha$，$\sum_{t=1}^T\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\sum_{t=1}^T\ell(f)=\mathrm{O}(T^{\frac{2}{3}})$，故$\alpha=1/3$。

下面只需分析：

$$\sqrt{\frac{\|f\|^2KL^2T}{\gamma}}+\frac{(2+\beta B)BT\gamma}{2}$$

令：

$$\gamma=a^{\frac{1}{3}}(2b)^{-\frac{2}{3}}T^{-\frac{1}{3}}$$

$$a=\|f\|^2KL^2$$

$$b=\frac{(2+\beta B)B}{2}$$

则有：

$$\sum_{t=1}^T\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\sum_{t=1}^T\ell(f)\leqslant2(ab)^{\frac{1}{3}}T^{\frac{2}{3}}+\frac{a_1^{-\frac{1}{3}}(2b)^{\frac{2}{3}}K\ln(K)T^{\frac{1}{3}}}{\beta}$$

证毕。

由引理1可给出在线核选择嵌入式方法OKSE在非遗忘对手环境下的期望后悔界。

定理2 对于任意有界的凸损失函数$\ell(f(x),y)\in[0,B]$，令梯度下降的步长$\eta=\mathrm{O}(1/\sqrt{T})$，$\beta=m$，设置$\gamma$如式(10)所示。则OKSE保证如下在线核选择的期望后悔界：

$$\sum_{t=1}^T\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\min_{\kappa_j\in\mathscr{K}}\sum_{t=1}^Tl_{t,j}=\mathrm{O}(T^{\frac{2}{3}})$$

定理2成立，因为$\sum_{t=1}^Tl_{t,j}>\min_{f\in\mathscr{H}_j}\sum_{t=1}^T\ell(f)$。

虽然Arora等[16]证明了在非遗忘对手环境下一般不存在亚线性的后悔界且所提出的OKSE方法在非遗忘对手环境下的期望后悔界为$\mathrm{O}(\sqrt[3]{T^2})$，比遗忘对手环境下的最优期望后悔界$\mathrm{O}(\sqrt{K\ln(K)T})$差[14-15]，但由于在模型更新过程中使用一个估计量来补偿没有选中的核，因此其仍是一个亚线性的期望后悔界。

对于一般的凸损失函数，应用梯度下降方法的在线核学习的最优后悔界是$\mathrm{O}(\sqrt{T})$。OKSE由于是在线核选择的嵌入式方法，不是在线核学习方法，样本序列被随机分配给不同的核，因此得到了较差的期望后悔界$\mathrm{O}(\sqrt[3]{T^2})$。虽然Yang

等[13]提出的 OKS 具有 $O(\sqrt{T})$ 的后悔界，但是 OKS 给出的并不是在线核选择的期望后悔界。

下面给出 OKSE 对在线二分类问题的误差界。

定理 3　令凸损失函数 $\ell(f(x),y)$ 为合页损失函数，对任意的 $\kappa_j\in\mathscr{K}$，$l_{t,j}\in\{0,1\}$，$j=1,2,\cdots,K$，令梯度下降的步长 $\eta=O(1/\sqrt{T})$，$\beta=m$，$\gamma=(\|f\|^2KL^2)^{\frac{1}{3}}(2+m)^{-\frac{2}{3}}T^{-\frac{1}{3}}$，则 OKSE 可保证如下的期望误差界：$\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[l_{t,I_t}]-\min_{f\in\mathscr{H}_j}\sum_{t=1}^{T}\ell(f)=O(T^{\frac{2}{3}})$。

对于在线二分类问题，算法 1 在所提出的统一框架下同时给出在线核选择的包裹式方法 OKSW 和嵌入式方法 OKSE。

算法 1　在线核选择算法 OKSW/OKSE

输入：K 个候选核，γ,η,β

初始化：$\omega_1=1_K$，$S_1=\varnothing$

For $t=1:T$

　$\forall\kappa_i\in\mathscr{K}$，$p_{t,i}=(1-\gamma)\dfrac{w_{t,i}}{\sum_{j=1}^{K}w_{t,j}}+\gamma\cdot\dfrac{1}{K}$；

　接收样例 $\{x_t,y_t\}$；

　根据概率分布 P_t 采样一个核 κ；

　WHILE $\kappa\notin S_t$ 且 $|S_t|<m$

　　$S_t=S_t\cup\kappa$；

　　根据概率分布 P_t 采样一个核 κ；

　ENDWHILE

　以相同的概率从 S_t 中选择一个核 κ_{I_t}；

　预测 $\hat{y}_{t,I_t}=OKL(\{x_t,y_t\},\kappa_{I_t})$；

　$l_{t,I_t}=\mathbb{I}(\mathrm{sign}(\hat{y}_{t,I_t})\neq y_t)$；

　$\ell_{t,I_t}=\max(0,1-y_tf_{t,I_t}(x_t))$[: OKSE]；

　$f_{t+1,I_t}=f_{t,I_t}-\dfrac{\beta\eta\nabla\ell_{f_{t,I_t}}}{|S_t|p_{t,I_t}}$[: OKSE]；

　FOR $\kappa_i\in S_t-\{\kappa_{I_t}\}$

　　预测 $\hat{y}_{t,i}=OKL(\{x_t,y_t\},\kappa_i)$；

　　$l_{t,i}=\mathbb{I}(\mathrm{sign}(\hat{y}_{t,i})\neq y_t)$；

　　$\ell_{t,i}=\max(0,1-y_tf_{t,i}(x_t))$ [: OKSE]；

　　$f_{t+1,i}=f_{t,i}-\dfrac{\beta\eta\nabla\ell_{f_{t,i}}}{|S_t|p_{t,i}}$ [: OKSE]；

　ENDFOR

　估计损失 $\hat{l}_{t,i}=\dfrac{\beta l_{t,i}}{|S_t|p_{t,i}}\mathbb{I}(\kappa_i\in S_t)$，$\forall\kappa_i\in\mathscr{K}$；

　更新权重 $\omega_{t+1,i}=\omega_{t,i}\cdot exp(-\gamma/K\,\hat{l}_{t,i})$；

　$S_t=\varnothing$；

ENDFOR

5　实验结果与分析

本节在标准数据集上评价统一框架下的在线核选择方法 OKSW 和 OKSE。

5.1　实验设置

选择高斯核 $\kappa(x,x')=\exp(-\dfrac{\|x-x'\|^2}{2\sigma^2})$，设计 3 组不同的实验来验证所提出的统一框架下的在线核选择方法的性能。

实验 1　验证提出的包裹式方法 OKSW 的性能。采用两种已有的在线核学习算法：1）Forgetron，即预算保持的核感知机算法[7]；2）BOGD，即预算保持梯度下降的在线核学习[8]。

OKSW 分别调用上述两种在线核学习算法，记为 OKSW-Forgetron 和 OKSW-BOGD。实验比较 OKSW 与两个在线核学习算法的平均错误率。

实验 2　将提出的 OKSW 和 OKSE 嵌入应用梯度下降方法的在线核学习算法 FOGD[18]中，得到 OKSW-FOGD 和 OKSE-FOGD，并与下面 3 种嵌入式在线核选择算法进行均错误率和运行时间的比较：

1）RFF-Hinge：即重参数化的大规模在线核学习[11]；

2）OKS-RFF，即随机特征空间中的随机在线核选择[12]；

3）OKS-FODG，即 OKS[13]结合傅里叶梯度下降。

实验 3　分别比较 OKSW-FOGD 和 OKSE-FOGD 在不同 m 值下的平均错误率以及运行时间。

高斯核对应的傅里叶逆变换得到的概率分布 $p(n)=\mathcal{N}(0,\sigma^{-2}I_{d\times d})$ 是一个 d 维的正态分布[19]。实验数据为 LIBSVM[20]以及 UCI[21]机器学习库中的标准二分类数据集，所有数据集均合并了训练集与测试集，如表 1 所列。其中，“SUSY”通过采样原数据集的部分数据形成。RFF-Hinge 和 OKS-RFF 均是应用梯度下降的方法来学习核参数，初始核参数从集合$\{2^{-8},2^{-6},2^{-4},2^{-2}\}$中均匀地随机选择。对于 OKSW，OKSE 以及 OKS，候选核集合为 $2^{[-5:1:6]}$。对于在线二分类问题，$B=1$。对于 OKSW，根据定理 1 的理论结果，设置 $\beta=m$，近似设置 $\gamma=\sqrt{K\ln K}/\sqrt{T}$。对于 OKSE，根据定理 3 的理论结果，设置 $\beta=m$，近似设置 $\gamma=\sqrt[3]{K}/\sqrt[3]{T3^2}$。对于 OKS-FOGD，根据 Yang 等[13]设置参数 $\delta=0.2$，在“covtyper”数据上，重新设置 $\delta=0.02$，以保证算法的正常运行。所有算法的步长 η 从 $2\times10^{[-5:1:0]}$ 中择优选择。算法在 RStudio 上执行，实验机器是 core i7 个人 PC 机，12GB RAM。每项实验执行 20 次，每次对数据重新随机排列，最后的结果取 20 次的平均值。

表 1　实验使用的标准数据集

Table 1　Standard datasets used in experiments

Datasets	#Instance	#Features
splice	3175	60
spambase	4601	57
mushrooms	8124	112
phishing	11055	68
magic04	19020	10
a9a	48842	123
SUSY	100000	18
ijcnn1	141691	22
covtype	581012	54

5.2　实验结果

实验 1 包括两组独立的对比实验：Forgetron vs. OKSW-Forgetron 和 BODG vs. OKSW-BODG。对于 OKSW，设置 $m=2$。两种在线核学习算法经验地采用过滤式在线核选择方法，预先设置核参数。对于 Forgetron，根据 Dekel 等[7]设

置核参数 $\sigma=2^0$；对于 BOGD，根据 Zhao 等[8]设置核参数 $\sigma=2^3$。表 2 比较了不同算法的平均预测错误率。实验结果显示，在多数数据集上，所提出的在线核选择包裹式算法 OKSW 的平均预测错误率显著低于预先设置核参数的在线核学习算法的错误率，因为在线核学习算法预先设置的核参数并不适用于所有的数据集。

表 2 OKSW 以及不同在线核学习算法的错误率比较

Table 2 Error rate comparison among OKSW and different online kernel learning algorithms

（单位：%）

Algorithm	mushrooms ($B=100$)	phishing ($B=200$)	magic04 ($B=200$)	a9a ($B=200$)	SUSY ($B=400$)	ijcnn1 ($B=400$)
Forgetron	**3.37±0.28**	43.86±0.51	41.68±0.25	**29.57±0.19**	39.97±0.16	17.01±0.07
OKSW-Forgetron	4.65±0.21	**21.15±0.66**	**35.59±0.27**	29.98±0.21	**38.06±0.19**	**14.94±0.16**
BOGD	14.28±0.44	44.88±0.29	**28.69±0.40**	24.47±0.07	35.91±0.11	**9.57±0.00**
OKSW-BOGD	**6.12±0.39**	**17.79±0.89**	29.29±0.60	**22.85±0.63**	**28.56±0.58**	9.72±0.02

实验 2 应用随机特征空间中梯度下降的在线学习模型，将提出的 OKSW-FOGD，OKSE-FOGD 与已有的 3 种嵌入式方法做比较。其中，RFF-Hinge 采用的是各向异性高斯核，即 $\kappa(x,x')=\exp(-\frac{1}{2}(x-x')^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\sigma)(x-x'))$，其中，$\sigma\in\mathbb{R}^d$，每回合更新 d 个核参数。OKS-RFF 针对各向同性高斯核，每回合更新一个核参数。

OKS 每回合根据一个概率分布来随机选择一个核。对于提出的 OKSW 与 OKSE，设置 $m=3$。所有算法的平均预测错误率与运行时间的比较如表 3 所列。可以发现，相比于现有的在线核选择方法，所提出的 OKSW 和 OKSE 在所有数据集上有最低的平均预测错误率，且 OKSW 与 OKSE 的平均错误率与运行时间相似。特别地，在“splice”和“magic04”两个数据集上，RFF-Hinge 和 OKS-RFF 的平均预测错误率有较大的标准差，表明这两种方法对初始核参数的设置是敏感的。OKS-FOGD 有最短的运行时间，因为 OKS 每回合只选择一个核，且只在预测错误时更新模型，这也导致 OKS 在所有数据集上都有较高的预测错误率。此外，在高维数据上，所提方法在运行时间上较 RFF-Hinge 和 OKS-RFF 更短。表 3 的结果表明：相对于已有的嵌入式方法，所提方法在预测精度与运行时间两方面均有较好的表现。

表 3 OKSW，OKSE 以及已有嵌入式在线核选择方法的错误率和运行时间的比较

Table 3 Error rate and running time comparison among OKSW，OKSE and existing embedders

Algorithm	splice ($D=200$)		spambase ($D=200$)		magic04 ($D=100$)	
	Error/%	Time/s	Error/%	Time/s	Error/%	Time/s
RFF-Hinge	28.21±1.51	0.66±0.06	33.61±1.39	0.96±0.02	36.11±6.23	1.24±0.04
OKS-RFF	38.53±7.41	0.57±0.03	33.95±1.33	0.76±0.07	36.52±5.61	1.22±0.03
OKS-FOGD	37.31±2.55	0.28±0.01	38.34±1.14	0.40±0.03	32.19±1.67	1.01±0.07
OKSW-FOGD	27.91±1.12	0.44±0.03	**32.18±0.54**	0.78±0.04	**22.81±0.70**	1.31±0.10
OKSE-FOGD	28.03±1.45	0.47±0.04	32.59±1.32	0.77±0.07	23.21±0.48	1.32±0.10

Algorithm	a9a ($D=200$)		SUSY ($D=100$)		covtype ($D=200$)	
	Error/%	Time/s	Error/%	Time/s	Error/%	Time/s
RFF-Hinge	17.66±0.17	13.34±0.61	23.12±0.20	5.57±0.05	23.91±0.36	85.34±2.63
OKS-RFF	23.93±0.00	8.59±0.42	28.36±0.60	5.79±0.09	31.20±0.42	76.22±3.81
OKS-FOGD	24.88±0.43	5.49±0.16	31.97±0.41	5.40±0.51	30.08±0.56	49.95±1.00
OKSW-FOGD	17.54±0.16	8.03±0.60	22.95±0.09	7.14±0.48	**23.15±0.23**	60.71±4.44
OKSE-FOGD	17.66±0.20	7.84±0.43	**22.78±0.20**	6.81±0.47	23.31±0.32	55.26±3.18

表 4 列出了在不同 m 取值下，所提出的两种在线核选择方法 OKSW 与 OKSE 的平均预测错误率以及运行时间比较。可以发现，$m>1$ 时的平均预测错误率显著低于 $m=1$ 时的平均预测错误率。$m=1$ 对应经典的赌博机模型，每回合只选择一个臂；$m>1$ 对应每回合选择多个臂的赌博机模型。实验结果表明：每回合随机选择多个核能够更快地收敛到好的核；同时，随着 m 的增大，运行时间也增加，选择较小的 m 可以平衡精度与效率。

表 4 OKSW 以及 OKSE 在不同 m 取值下的错误率和运行时间的比较

Table 4 Error rate and running time comparison between OKSW and OKSE with respect to different m

Algorithm		splice($D=200$)		mushrooms($D=200$)		phishing($D=200$)		ijcnn1	
		Error/%	Time/s	Error/%	Time/s	Error/%	Time/s	Error/%	Time/s
OKSW-FOGD	$m=1$	0.26±0.01	38.63±2.68	0.76±0.03	8.76±0.35	0.87±0.03	15.14±0.41	6.39±0.13	8.11±0.34
	$m=2$	0.42±0.04	31.52±1.49	1.21±0.03	5.45±0.23	1.34±0.08	11.85±0.31	9.43±0.63	6.76±0.37
	$m=3$	0.44±0.03	**27.91±1.12**	1.29±0.06	**4.56±0.26**	1.40±0.10	**10.67±0.26**	9.34±0.31	**6.29±0.30**
OKSE-FOGD	$m=1$	0.27±0.02	39.74±1.76	0.77±0.03	9.22±0.26	0.89±0.05	14.66±0.33	6.37±0.10	7.23±0.26
	$m=2$	0.45±0.02	33.17±1.33	1.20±0.03	5.98±0.28	1.35±0.07	11.65±0.25	8.62±0.19	5.92±0.29
	$m=3$	0.47±0.05	**28.26±1.46**	1.30±0.06	**4.82±0.21**	1.33±0.15	**10.66±0.33**	8.70±0.41	**5.65±0.39**

结束语 文中提出了一个在线核选择的统一框架，将在线核选择问题归约为非遗忘对手环境下的对抗式多臂赌博机

问题。应用该框架同时给出了在线核选择的包裹式方法和嵌入式方法，通过理论证明了包裹式方法具有 $O(\sqrt{T})$ 的弱期望后悔界，并且嵌入式方法具有 $O(\sqrt[3]{T^2})$ 的期望后悔界。所提出的统一框架为深入、系统地研究在线核选择问题提供了新的途径。

在线核选择的过滤式方法过去大都是经验的或先验的，没有理论的模型或规范的形式。未来拟进一步应用所提出的统一框架给出在线核选择的过滤式方法，进而发展离线/在线的核选择的基本理论和统一框架。

参 考 文 献

[1] SHALEV-SHWARTZ S. Online Learning and Online Convex Optimization [J]. Foundations & Trends® in Machine Learning，2012，4(2)：107-194.

[2] NGUYEN K. Nonparametric online machine learning with kernels [C]// Proceedings of the Twenty-Sixth International Joint Conference on Artificial Intelligence. Morgan Kaufmann，2017：5197-5198.

[3] STONE M. Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions [J]. Journal of the Royal Statistical Society，Series B (Statistical Methodology)，1974，36(2)：111-147.

[4] BARTLETT P L，BOUCHERON S，LUGOSI G. Model Selection and Error Estimation [J]. Machine Learning，2002，48(1)：85-113.

[5] FOSTER D J，KALE S，MOHRI M，et al. Parameter-free Online Learning via Model Selection [J]. Advances in Neural Information Processing Systems，2017，30：6022-6032.

[6] GUYON I，SAFFARI A，DROR G，et al. Model Selection：Beyond the Bayesian/Frequentist Divide [J]. Journal of Machine Learning Research，2010，11(1)：61-87.

[7] DEKEL O，SHALEV-SHWARTZ S，SINGER Y. The Forgetron：A Kernel-Based Perceptron On A Budget[J]. Siam Journal on Computing，2008，37(5)：1342-1372.

[8] ZHAO P，WANG J，WU P，et al. Fast Bounded Online Gradient Descent Algorithms for Scalable Kernel-based Online Learning [C]// Proceedings of the 29th International Conference on Machine Learning. ACM，2012：1075-1082.

[9] FAN H，SONG Q，SHRESTHA S B. Kernel Online Learning with Adaptive Kernel Width [J]. Neurocomputing，2016，175：233-242.

[10] CHEN B，LIANG J，ZHENG N，et al. Kernel Least Mean Square with Adaptive Kernel Size [J]. Neurocomputing，2016，191：95-106.

[11] NGUYEN T D，LE T，BUI H，et al. Large-scale Online Kernel Learning with Random Feature Reparameterization [C]// Proceedings of the Twenty-Sixth International Joint Conference on Artificial Intelligence. Morgan Kaufmann，2017：2543-2549.

[12] HAN Z，LIAO S. Stochastic Online Kernel Selection with Instantaneous Loss in Random Feature Space [C]// Proceedings of the 24th International Conference on Neural Information Processing. Springer，2017：33-42.

[13] YANG T，MAHDAVI M，JIN R，et al. Online Kernel Selection：Algorithms and Evaluations [C]// Proceedings of the Twenty-Sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence. AAAI，2012：1197-1202.

[14] AUER P，CESA-BIANCHI N，FREUND Y，et al. The Nonstochastic Multi-armed Bandit Problem [J]. SIAM Journal on Computing，2002，32(1)：48-77.

[15] BUBECK S，CESA-BIANCHI N. Regret Analysis of Stochastic and Nonstochastic Multi-armed Bandit Problems [J]. Foundations & Trends® in Machine Learning，2012，5(1)：1-122.

[16] ARORA R，DEKEL O，TEWARI A. Online Dandit Learning Against an Adaptive Adversary：From Regret to Policy Regret [C]// Proceedings of the 29th International Conference on Machine Learning. ACM，2012：1503-1510.

[17] JIN R，HOI S C H，YANG T. Online Multiple Kernel Learning：Algorithms and Mistake Bounds [C]// Proceedings of the 21st International Conference on Algorithmic Learning Theory. Springer，2010：390-404.

[18] LU J，HOI S C H，WANG J，et al. Large Scale Online Kernel Learning [J]. Journal of Machine Learning Research，2016，17(47)：1-43.

[19] RAHIMI A，RECHT B. Random Features for Large-scale Kernel Machines [J]. Advances in Neural Information Processing Systems，2007，20：1177-1184.

[20] CHANG C C，LIN C J. LIBSVM：A Library for Support Vector Machines [J]. ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology，2011，2(3)：1-27.

[21] LICHMAN M. UCI Machine Learning Repository[EB/OL]. http://archive.ics.uci.edu/ml/index.php.