

改进 UCT 算法在爱恩斯坦棋中的应用

张小川¹ 李琴¹ 南海¹ 彭丽蓉²

(重庆理工大学计算机科学与工程学院 重庆 400054)¹

(重庆工业职业技术学院科研处 重庆 401120)²

摘要 UCT(Upper Confidence Bound Apply to Tree)算法是蒙特卡罗搜索算法的延展,因其鲁棒性强而受到广泛关注,且被应用于计算机博弈系统。爱恩斯坦棋是近年国内博弈大赛引进的新棋种,在竞赛中投骰子所引发的随机性和娱乐性吸引了广大学者的目光。从全局优化着法角度出发,在爱恩斯坦棋博弈系统中引入 UCT 算法。首先,针对当前计算机多核现状,利用并行计算方法进一步优化 UCT 算法;其次,针对 UCT 算法的最优着法需求,引入当前估值因子(WINK)和次优节点平衡因子(UCTK),以此辅助增加估值的精确度,决策胜率与着法的优先关系,提高算法的收敛效率;最后,构造了爱恩斯坦棋博弈系统,通过与基于极大极小算法、 α - β 算法以及蒙特卡罗算法的爱恩斯坦棋博弈系统进行机-机对弈,其胜率提高了 25%,并在全国计算机博弈大赛中获冠军,这进一步验证了改进算法的有效性。

关键词 UCT 算法,爱恩斯坦棋,并行计算,平衡优化

中图分类号 TP391 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.12.032

Application of Improved UCT Algorithm in EinStein Würfelt Nicht! Computer Game

ZHANG Xiao-chuan¹ LI Qin¹ NAN Hai¹ PENG Li-rong²

(College of Computer Science and Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)¹

(Scientific Research Department, Chongqing Industry Polytechnic College, Chongqing 401120, China)²

Abstract UCT (Upper Confidence Bound Apply to Tree) algorithm, as the extension of Monte Carlo search algorithm, is widely concerned and applied to computer game system because of its strong robustness. EinStein würfelt nicht! game is a new kind of game introduced in the domestic game competition in recent years, and the randomness and entertainment of throwing the dice in the competition attracts the participation of the majority of scholars. From the perspective of global optimization method, UCT algorithm was introduced to apply in EinStein würfelt nicht! game system. Firstly, the UCT algorithm is further optimized by using the parallel computing method based on the current state of multi-core computer. Secondly, the current winning factor (WINK) and the optimal node selection factor (UCTK) are introduced to optimize the optimal relationship between the decision winning percentage and the move. Finally, a complete EinStein würfelt nicht! game system is constructed. The winning percentage is improved by 25% by computer-computer game with the game system based on the Minimax algorithm, α - β algorithm and Monte Carlo algorithm, and it has won the champion in the National Computer Game Contest, which further validates the effectiveness of the algorithm.

Keywords UCT algorithm, EinStein würfelt nicht! game, Parallel computing, Balance optimization

机器博弈,又名计算机博弈,顾名思义就是让计算机能够像人类一样进行对弈^[1]。以 IBM 深蓝、谷歌阿尔法狗两次人机大战为代表的典型事件,不仅促进了人工智能的进步,而且引起了全社会的极大关注,推动了人工智能的发展。机器博弈作为人工智能的一个细分研究领域,其研究核心归结为两个问题:1)在有限时间内实现最大的搜索深度;2)在实时对弈中提高对当前棋局的评估精度。为解决这两个问题,通常的

做法是建立一个搜索算法和构造一个估值函数,其中估值函数是算法的核心,算法的搜索效率直接影响机器博弈的棋力,再加上宏大的博弈空间、有限的博弈活动的时间和计算机资源,搜索深度成为计算机博弈搜索算法的困难所在。

爱恩斯坦棋是由德国耶拿(FSU)弗里德里希·席勒大学应用数学的教授 Ingo Althöer 设计的一种棋盘游戏^[2],于 2012 年出现在我国大学生计算机博弈大赛的比赛项目中。

到稿日期:2017-11-20 返修日期:2018-01-17 本文受国家自然科学基金—青年科学基金项目(61502065),重庆市基础科学与前沿技术研究计划项目(cstc2015jcyjA40041),重庆市重庆理工大学研究生创新基金(YCX2016238)资助。

张小川(1965—),男,教授,主要研究方向为人工智能、机器博弈、软件工程等,E-mail:zxc@cqut.edu.cn;李琴(1992—),女,硕士生,主要研究方向为人工智能、机器博弈等,E-mail:654704323@qq.com(通信作者);南海(1982—),男,讲师,主要研究方向为人工智能、机器博弈、图像数字水印等,E-mail:cqu.nn@163.com;彭丽蓉(1983—),女,副教授,主要研究方向为计算机网络等。

该棋具有如下特点:1)开局时棋子的初始顺序不定,具有信息不完全的特性;2)博弈过程中,双方需要通过投骰子来确定可以移动的棋子,从而增加了博弈过程中的随机性;3)博弈过程产生的吃子现象,使得合法走步较多,着法数量随之变化,从而极大地增加了博弈树的搜索难度。这些特点虽然加大了博弈研究的难度,但也激发了更多博弈科学家们的深入研究。例如,文献[2]研究了 MCTS 算法在爱恩斯坦棋中的应用;文献[3]对用于爱恩斯坦棋的随机算法、极大极小剪枝算法以及蒙特卡罗模拟树搜索算法进行了对比分析;文献[4]针对爱恩斯坦棋的随机性特点,研究了攻防兼备的期望搜索算法。通过分析,以上文献大多采用的是基本博弈树搜索算法,通过模拟双方的走步预测棋局的走势,并回溯得到最优策略。但随着搜索深度的增加以及节点拓展的增多,其搜索时间呈指数级增长,使博弈程序存在搜索深度欠佳和搜索效率偏低的问题。结合爱恩斯坦棋的博弈特点,本文重点研究如何在随机性走步以及着法数量变化的情况下确定近似最优性的走步。为此,本文引入致力于节点优选策略的 UCT 算法,并针对 UCT 算法,利用并行技术、系统优化技术,从并行和平衡两个方面开展算法优化改进工作,并以爱恩斯坦棋机器博弈为对象进行实践验证。

1 UCT 算法剖析

1.1 算法来源

UCT 算法^[5-6]最初是为了限制围棋博弈树的搜索范围而产生的,是一种由蒙特卡罗树搜索与 UCB 公式相结合的算法,又称为上置信区间算法。UCB 策略产生自老虎机问题,属于多臂匪徒模型^[7],赌徒面对一排老虎机,每台老虎机提供的奖励是随机的,赌徒通过 UCB 策略决定拉动哪台老虎机的手臂以及每个手臂被拉动的次数来获取最好的奖励^[8]。其关键问题是如何获得平均收益的最大值,依据在于某个手臂已有的平均收益值和从模拟走步的试探中获得新的收益值,即“利用-探索”问题。其中,“利用”就是算法根据现有模拟状况选择概率较高的节点;“探索”则是要求算法筛选出概率低而且估值相对较高的节点,以探索其他可能的最优值^[9]。针对老虎机问题,相关研究者提出了相应的上置信(Upper Confidence Bound1,UCB1)算法^[10],其核心计算公式为:

$$UCB_i = V_i + \sqrt{\frac{\log N}{N_i}} \quad (1)$$

其中, V_i 为老虎机的平均收益,表示已有的回报; N 为老虎机所有手臂的总访问次数, N_i 为老虎机某个手臂 i 的访问次数,等号右侧的第二部分表示探索得到的回报。

1.2 UCT 算法

UCT 算法就是利用 UCB1 算法思想,针对计算机博弈搜索过程,计算玩家博弈树的最大收益分支,并做出最终的选择决策^[11-12]。该算法起步于根节点,搜索整棵博弈树^[13-14]并构建一条由若干走步所构成的博弈路径,这些走步是通过概率计算每个候选走步的位置值并统计该位置的作用次数^[15](本文以该位置被访问的次数替代其作用次数)。如果存在未被访问的子节点,那么这些走步将被设置为随机选择。同时,为保持点之间的平衡,避免过早收敛而出现仅能获得局部最优走步的困境,UCT 算法还可以通过最大化地增加目前最好节

点和次优节点的概率,扩大博弈树的范围,促使全局最优节点的产生^[16-17]。

针对上述分析,利用伪代码来描述 UCT 算法:

```
function UCTSearch(node)
    n_b:=0
    for i:= 0 to node.childNode.size()-1 do
        n_b:=n_b+node.childNode[i].n_b
    end for
    for i:= 0 to node.childNode.size()-1 do
        if node.childNode[i].n_b=0
            do v[i]:=infinite
        else
            v[i]:=-node.childNode[i].value/node.childNode[i].n_b+
                sqrt(log(n_b)/(node.childNode[i].n_b))
        end if
    end for
    index:=argmax(v[i])
    return node.childNode[index]
end function
```

2 改进 UCT 算法

本文应用 UCT 算法在有限时间内循环选择博弈搜索树的不同节点序列,计算每个选中节点序列中每个节点的计算值,实现爱恩斯坦棋博弈的良好走步。由于爱恩斯坦棋博弈走步随机且着法数量变化较大,强烈依赖于搜索深度、模拟次数以及估值准确度,因此在有限的时间与空间限制下,对搜索过程中算法的收敛效率有着更高的要求。本文引入并行计算方法,以提高模拟效率;利用平衡方法,综合考虑当前估值因子和次优节点的平衡因子,以进一步促使博弈树最优走步的产生。

2.1 并行计算

在 UCT 算法中,各个模拟棋局是独立的,具备并行计算条件。在目前硬件计算能力强大的情况下,博弈系统能够同时运行多个独立线程,各线程相对独立地完成棋局模拟,并产生各节点的收益值和被访问次数。

为了在爱恩斯坦棋博弈系统中运用 UCT 算法,首先要创建一棵博弈树,其具体流程如下:

- 1)根据骰子数,以当前局面创建博弈搜索树的根节点。
- 2)创建线程池,最多同时模拟 3 个子节点。
- 3)应用 UCT 公式计算各个分支的收益情况。其中没有任何访问记录的节点,则标记为 0。最后选择最大值节点作为下次继续搜索的起始节点。
- 4)判断步骤 3)所选择的节点,若节点记录的访问次数为 0,则继续重复步骤 3)。
- 5)当搜索至由博弈树的多个树枝构成的底层节点时,计算各树枝的若干子节点并获得相应的收益值;然后对每个线程加锁,依次反馈更新从叶子节点到根节点所经过的所有节点路径,记录叶子节点的最终估值,解锁线程。
- 6)展开新的子节点作为根节点,从步骤 3)开始重复,直到时间结束或者获得相对较优的搜索值,访问次数达到上限值或者时间耗尽时终止。
- 7)判断根节点下所有的合法子节点,计算所有子节点的

平均收益,并以最高收益值作为最终选择的节点方向,即为UCT算法得到的最终决策。

进一步分析并整理形成上述算法过程的伪代码:

```
function: multiThreadUCTSearch (rootNode, time, gNum, moveNum)
//模拟时间、局数限制
while curTime < time or nums < gNum do
rootNodeCopy := rootNode
while rootNode not empty do
curNode := rootNode
if moveNum > 3 do
//模拟3个走法
ThreadPool.setMaxThreads(3,3)
childNode[3] := ThreadPool.QueueUserWorkItem
(UCTSearch(curNode), moveNum)
rootNodeCopy := childNode
else
//模拟 moveNum 个走法
ThreadPool.setMaxThreads(moveNum, moveNum)
childNode[moveNum] := ThreadPool.QueueUserWorkItem
(UCTSearch(curNode), moveNum)
rootNodeCopy := childNode
end if
end while
end function
```

2.2 平衡优化

UCT算法能在树中选择更好的走法,得益于估值函数对候选走步的估值^[18]。本文将式(1)作为候选走步的基础公式,其中的 V_i 值是基于蒙特卡罗抽样计算得到的,显然,抽样次数越多,计算越逼近真实值,从而可信度就越高。利用UCT算法能进一步扩展搜索范围,使算法集中于搜索博弈树的某一树枝时,也能同时兼顾到其他树枝可能存在的次优走步,是提高博弈程序棋力的关键方法之一。

针对上述问题,本文在UCT算法选择扩展节点时,引入次优节点平衡因子(UCTK)和当前估值因子(WINK)2个参数,其物理含义就是当WINK的值大于WINK时,算法倾向于深度搜索;当UCTK较大时,算法偏向于广度搜索。借助这2个参数,实现探索广度与深度的平衡性选择。在引入两个因子后,式(1)被改进为:

$$UCTValue_i = Win_i * WINK + \sqrt{\frac{\log N}{N_i}} * UCTK \quad (2)$$

其中, Win_i 为当前节点的平均估值; $WINK$ 表示当前估值因子。等号右侧的第一部分表示估计值。 N 表示所有节点的访问次数; N_i 表示某个节点的访问次数; $UCTK$ 表示次优节点的平衡因子。等号右侧的第二部分表示试探得到的额外估计值。

通过实验发现(实验搜索时间为20s,UCTK和WINK的初值区间为[0.1,100]),2个参数在[0.1,1]区间取值时效果较好。通过进一步的参数调优发现(见图1):当2个参数都为0.5时,收益值表现最差;当WINK为1时,收益值在搜索初期表现得较好,但后期表现不足;当UCTK为1时,综合表现较好;当UCTK=1,WINK=0.4时,结果最好。在后续博弈系统的实际对弈中,也发现1和0.4的参数组合的稳定性最好。

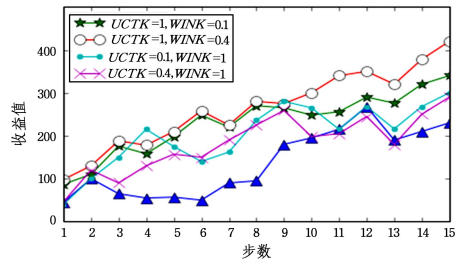


图1 不同因子组合的收益值统计

Fig.1 Profit statistics of different factor combinations

3 实验结果与分析

3.1 系统实现

基于以上算法的研究,本文采用C#语言,实现了爱恩斯坦棋博弈系统——KnighTeam-AN。

如图2所示,KnighTeam-AN主要包括3个模块:1)棋盘控制模块,包括棋盘显示、棋局计时、棋谱保存等功能;2)信息处理模块,主要是为后台信息的交互提供支撑、计算;3)搜索评估模块,包括搜索算法、走法生成器、估值函数等核心部分。

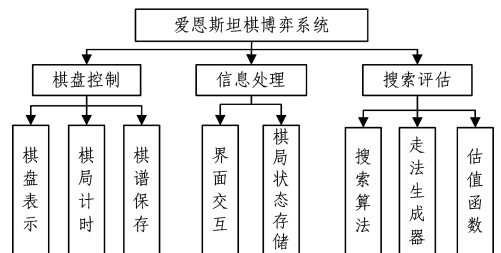


图2 爱恩斯坦棋博弈程序模块图

Fig.2 Module statistics of EWN game program

图3给出了该程序的控制界面。KnighTeam-AN模拟对局的棋步是随机产生的,其过程延续到棋局结束,最后计算各棋步的收益值。在系统预定时间内,该系统能自动模拟大量棋局并统计相应信息,同时自动产生最优走步。

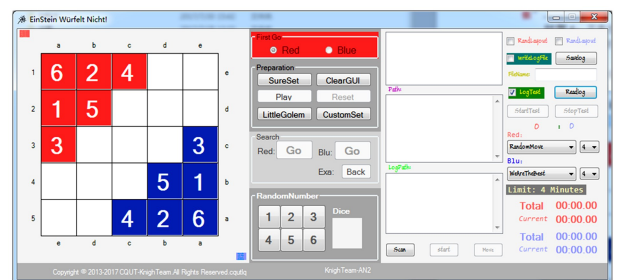


图3 爱恩斯坦棋博弈系统的控制界面

Fig.3 Control interface of EWN game system

3.2 实验分析

本文实验采用直方图展示UCT算法的应用效果。在同等硬件及软件环境下,KnighTeam-AN的UCT算法分别与3种不同算法对弈1000次,如图4、图5所示。图4中,选取的对比算法为随机算法(Random)、极大极小算法(Minimax)、 α - β 算法以及蒙特卡罗搜索算法(MC)。实验结果表明,UCT算法优于上述3种对比算法。图5中利用改进的UCT算法再次进行对比实验,可以发现改进后的UCT算法明显比改

进前的 UCT 算法的胜率高。

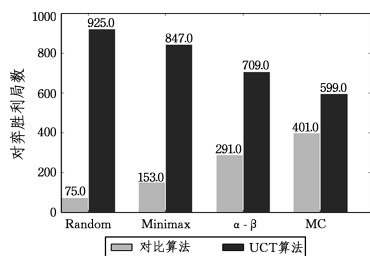


图 4 基于 UCT 算法与对比算法的程序对弈数据统计

Fig. 4 Data statistics of program games based on UCT algorithm and contrast algorithm

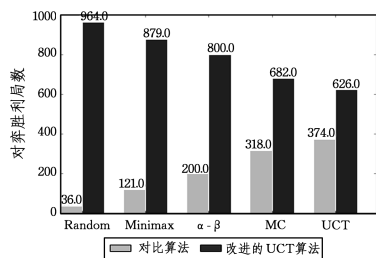


图 5 基于改进的 UCT 算法与对比算法的程序对弈数据统计

Fig. 5 Data statistics of program games based on modified UCT algorithm and contrast algorithm

作者所在的计算机博弈团队,在 2012 年、2013 年采用非 UCT 算法对阵全国其他高校的计算机博弈队伍的胜率大致维持在 50%左右;2014 年、2015 年使用 UCT 算法后,胜率达到 80.9%,均获得了当年的全国冠军,这体现了 UCT 算法的高效性。作者进入该团队后,提出了本文改进的 UCT 算法,并携带 KnighTeam-AN 参加了 2016 年、2017 年的全国比赛,打败了之前的冠军程序,并均获得了当年的全国冠军,而且在对战全国其他高校的博弈程序时,保持了 90%以上的胜率,如图 6 所示。

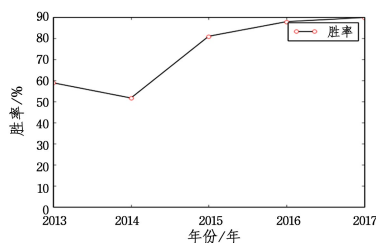


图 6 全国博弈大赛爱因斯坦棋的胜率图

Fig. 6 Winning rate statistics of EWN in national computer game contest

结束语 利用 UCT 算法,能显著提高计算机博弈程序的搜索效率,提升博弈程序的棋力。基于爱因斯坦棋博弈的特点,即随机既是其观赏点,也是其博弈决策的难点,本文采用并行计算方法加快了博弈程序的模拟运算速度,而且建立了 UCTK 和 WINK 2 个参数,改进了 UCT 算法,在搜索深度与搜索广度上建立了动态平衡方法。实验证明,所提方法显著提高了搜索效率和搜索准确性,并显著提升了博弈程序的棋力。

尽管改进后的 UCT 算法的应用效果显著,但在后续的工作中,可否利用深度学习^[19]等其他计算智能方法来进一步提高博弈程序的棋力,也是值得研究的。

参考文献

- [1] WANG Y J, QIU H K, WU Y Y, et al. Research and development of computer games[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2016, 11(2): 788-798. (in Chinese)
王亚杰,邱虹坤,吴海燕,等. 计算机博弈的研究与发展[J]. 智能系统学报, 2016, 11(6): 788-798.
- [2] LORENTZ R J. An MCTS Program to Play Einstein Würfelt nicht! [M] // Advances in Computer Games. Springer Berlin Heidelberg, 2011: 52-59.
- [3] GULATI V. Gaming algorithms applied to EinStein würfelt nicht! [D]. Los Angeles: California State University, Northridge, 2013.
- [4] LI X J, GUANG Y, ZHANG Y W. An Offensive and Defensive EXpect Minimax Algorithm in EinStein Würfelt Nicht! [C] // Control and Decision Conference. IEEE, 2015: 5814-5817.
- [5] ALTHÖFER I, VOIGT R. EinStein würfelt nicht! [M] // Spiele, Rätsel, Zahlen. Springer Berlin Heidelberg, 2014: 41-47.
- [6] LI Z Y, LI S Q, GU L, et al. EinStein Chess Algorithm Design and Analysis[J]. Information Technology and Informatization, 2014(1): 111-114. (in Chinese)
李占宇,李淑琴,顾磊,等. 爱因斯坦棋算法设计与分析[J]. 信息技术与信息化, 2014(1): 111-114.
- [7] ZHOU W M, LI S Q. The Research on Static Algorithms in WTN Chess [J]. Computer Knowledge and Technology, 2014 (5): 161-165. (in Chinese)
周文敏,李淑琴. 爱因斯坦棋静态攻防策略的研究[J]. 电脑知识与技术, 2014(5): 161-165.
- [8] RUI X X, WANG Y L. Application of UVT-RAVE algorithm in multi-player games with imperfect information [J]. Computer Engineering and Design, 2012, 33(3): 1136-1139. (in Chinese)
芮雄星,王一莉. UCT. RAVE 算法在多人非完备信息博弈中的应用[J]. 计算机工程与设计, 2012, 33(3): 1136-1139.
- [9] ZHANG J, WANG X, WU S, et al. Modified UCT Algorithm with Risk Dominance Methods in Imperfect Information Game [C] // Applied Mechanics and Materials. Trans Tech Publications, 2014: 367-376.
- [10] ZHANG J J, WANG X. Study of the risk analysis of machine game and its estimation method. [J]. High Technology Letters, 2013, 23(9): 965-972. (in Chinese)
张加佳,王轩. 机器博弈风险分析及其估算方法的研究[J]. 高技术通讯, 2013, 23(9): 965-972.
- [11] TOM D, MÜLLER M. A Study of UCT and Its Enhancements in an Artificial Game [M] // Advances in Computer Games. Springer Berlin Heidelberg, 2009: 55-64.
- [12] WANG Y, HUANG S, XIONG R, et al. A framework for multi-session RGBD SLAM in low dynamic workspace environment [J]. CAAI Transactions on Intelligence Technology, 2016, 1(1): 90-103.
- [13] ZHOU Y, DENG L, XIE Y. Analysis of a Game Playing Algorithm for Five-in-a-Row [J]. Modern Computer, 2017(10): 8-10. (in Chinese)
周洋,邓莉,谢煜. 一种五子棋博弈算法的分析[J]. 现代计算机, 2017(10): 8-10.

- [14] ZHU L M. Strategy research on artificial intelligence heuristic search[J]. *Electronic Design Engineering*, 2013, 21(16): 61-64. (in Chinese)
朱龙梅. 浅论人工智能启发式搜索策略的研究[J]. *电子设计工程*, 2013, 21(16): 61-64.
- [15] BAUDRY G, MACHARIS C, VALLÉE T. Range-based Multi-Actor Multi-Criteria Analysis; A combined method of Multi-Actor Multi-Criteria Analysis and Monte Carlo simulation to support participatory decision making under uncertainty[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, 264(1): 257-269.
- [16] WANG Y J, WANG X Y, QIU H K, et al. A Case Design of Program Design Course based on Enstein[J]. *Computer Education*, 2012(18): 75-77. (in Chinese)
王亚杰, 王晓岩, 邱虹坤, 等. 基于爱恩斯坦棋的程序设计课程教学案例设计[J]. *计算机教育*, 2012(18): 75-77.
- [17] ZHANG J J, WANG X, YAO L, et al. Modified UCT Algorithm with Risk Dominance Methods in Imperfect Information Game [C]//International Conference on Intelligent Manufacturing and Computational Technology. Hong Kong: AMM Press, 2013: 367-376.
- [18] LI X J, WANG X L, WU L, et al. Game tree generation algorithm based on local-road scanning method for connect 6[J]. *CAAI Transactions on Intelligent Systems*, 2015, 10(2): 267-272. (in Chinese)
李学俊, 王小龙, 吴蕾, 等. 六子棋中基于局部“路”扫描方式的博弈树生成算法[J]. *智能系统学报*, 2015(2): 267-272.
- [19] GUO X Y, LI C, MEI Q Z. Deep Learning Applied to Game[J]. *ACTA Automatica Sinica*, 2016, 42(5): 676-684. (in Chinese)
郭潇道, 李程, 梅俏竹. 深度学习在游戏中的应用[J]. *自动化学报*, 2016, 42(5): 676-684.

(上接第 169 页)

结束语 本文从评估等级的语义出发,分析了语义关联对信息融合的影响,以证据推理方法为基础提出了一种考虑等级语义关联的证据分组融合方法,并依此构建了一个改进的多属性决策框架,提出了一种新的多属性决策方法。文中通过一个案例演示了该方法的决策过程,算例结果表明了新方法不但可以有效集结分布式评估信息,而且能够减少融合过程中的信息流失。对比两种方法在本文算例中的应用结果可以发现,新方法可得到一个与经典方法完全不同的决策结果,在管理决策领域具有一定的研究价值。后续的研究工作将进一步探索新方法的融合机制,设计一个更为高效和简洁的决策信息融合算法,并提出一个更合理、完善的多属性决策方法。

参 考 文 献

- [1] WALCAZAK D, RUTKOWSKA A. Project rankings for participatory budget based on the fuzzy TOPSIS method[J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 260(2): 706-714.
- [2] REN P, XU Z, HAO Z. Hesitant Fuzzy Thermodynamic Method for Emergency Decision Making Based on Prospect Theory[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, 47(9): 2531-2543.
- [3] YU X, ZHANG S, LIAO X, et al. ELECTRE Methods in Prioritized MCDM Environment[J]. *Information Sciences*, 2018, 424: 301-316.
- [4] AHN B S. The analytic hierarchy process with interval preference statements[J]. *Omega*, 2016, 67: 177-185.
- [5] YANG J B, SINGH M G. An evidential reasoning approach for multiple attribute decision making with uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics*, 1994, 24(1): 1-18.
- [6] ZHANG M J, WANG Y M, LI L H, CHEN S Q. A general evidential reasoning algorithm for multi-attribute decision analysis under interval uncertainty[J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 257(3): 1005-1015.
- [7] WANG Y M, YANG J B, XU D L. Environmental impact assessment using the evidential reasoning approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 174(3): 1885-1913.
- [8] CHEN S Q, WANG Y M. Grouping method for combining evidence[J]. *Control and Decision*, 2013, 8(4): 574-578. (in Chinese)
陈圣群, 王应明. 证据的分组合成法[J]. *控制与决策*, 2013, 8(4): 574-578.
- [9] FU Y G, YANG L H, WU Y J. Evidential Reasoning Approach for Solving Complex Evaluation Models[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2014, 27(4): 313-326. (in Chinese)
傅仰秋, 杨隆浩, 吴英杰. 面向复杂评价模型的证据推理方法[J]. *模式识别与人工智能*, 2014, 27(4): 313-326.
- [10] XU D L, YANG J B, WANG Y M. The evidential reasoning approach for multi-attribute decision analysis under interval uncertainty[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 174(3): 1914-1943.
- [11] WANG Y M, YANG J B, XU D L, et al. The evidential reasoning approach for multiple attribute decision analysis using interval belief degrees[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 175(1): 35-66.
- [12] KE X L, MA L Y, LI Z Y, et al. Property Research and Approach Modification of Evidential Reasoning Rule[J]. *Information and Control*, 2016, 45(2): 165-170. (in Chinese)
柯小路, 马荔瑶, 李子懿, 等. 证据推理规则的性质研究及方法修正[J]. *信息与控制*, 2016, 45(2): 165-170.
- [13] DU Y W, WANG Y M. Evidence combination rule with contrary support in the evidential reasoning approach[J]. *Expert Systems with Applications*, 2017, 88: 193-204.
- [14] CHEN S Q, WANG Y, SHI H L, et al. Evidential reasoning with discrete belief structures[J]. *Information Fusion*, 2018, 41: 91-104.
- [15] 段新生. 证据决策[M]. 北京: 经济科学出版社, 1996.
- [16] WANG Y M, YANG J B, XU D L, et al. On the combination and normalization of interval-valued belief structures[J]. *Information Sciences*, 2007, 177(5): 1230-1247.
- [17] CHEN P, HE K, YU X S. Non-Subjective Approximation Algorithm Based on Evidential Levels [J]. *Journal of Chongqing Institute of Technology (Natural Science)*, 2018, 32(9): 137-143, 156. (in Chinese)
陈鹏, 何凯, 余肖生. 基于证据等级的非主观近似算法[J]. *重庆理工大学学报(自然科学)*, 2018, 32(9): 137-143, 156.