两类动态信息模型及其应用

张 凌[1] 任雪芳[1] 史开泉[2]
(龙岩学院数学与信息工程学院 福建 龙岩 364012)[1] (山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)[2]

摘 要 P-集合(P-sets)是一类具有动态特征的集合模型,在 P-集合中,元素的属性满足数理逻辑中的合取范式。P-集合是把动态特性引入到有限普通元素集合(有限 Cantor set)X 内,来改进有限普通元素集合 X 而提出的。逆 P-集合(Inverse P-sets)是另一类具有动态特征的集合模型,在逆 P-集合中元素的属性满足数理逻辑中的析取范式。逆 P-集合是把动态特性引入到有限普通元素集合 X 内,来改进有限普通元素集合 X 而提出的。逆 P-集合是 P-集合的对偶形式。定义 P-集合是一类动态信息模型,定义逆 P-集合是另一类动态信息模型。文中主要介绍 P-集合与逆 P-集合的结构、生成与动态特征;给出 P-集合、逆 P-集合存在的事实;利用 P-集合,给出具有属性合取范式的信息的递推-搜索发现与应用;利用逆 P-集合,给出具有属性析取范式的信息的挖掘-获取与应用。P-集合、逆 P-集合是研究动态信息(动态数据)应用的新模型、新方法。

关键词 P-集合,逆 P-集合,合取范式,析取范式,递推搜索-发现,挖掘-获取
中图法分类号 O144 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.11.037

Two Types of Dynamic Information Models and Their Applications

ZHANG Ling[1] REN Xue-fang[1] SHI Kai-quan[2]
(School of Mathematics and Information Engineering, Longyan University, Longyan, Fujian 364012, China)[1]
(School of Mathematics and Systems Science, Shandong University, Jinan 250100, China)[2]

Abstract P-set is a type of set model with dynamic characteristics, in which the elements' attribute satisfies the conjunctive normal form in mathematical logic. P-set is proposed by introducing dynamic characteristics into finite ordinary element set (finite Cantor set) X and improving it. Inverse P-set is another type of set model with dynamic characteristics, in which the elements' attribute satisfies the disjunctive normal form in mathematical logic. Inverse P-set is also proposed by introducing dynamic characteristics into finite ordinary element set X and improving it. Inverse P-set is the dual form of P-set. Here P-set is defined as a type of dynamic information model, while inverse P-set is defined as another type of dynamic information model. In this paper, the structures, generations and dynamic characteristics of P-sets and inverse P-sets were introduced. The existence facts of P-sets and inverse P-sets were presented. By employing P-sets, the recursive searching-finding and application of information with attribute conjunctive normal form were given. By using inverse P-sets, the the mining-acquisition and application of information with attribute disjunctive normal form were given. P-sets and inverse P-sets are the new models and new methods for the application research of dynamic information or dynamic data.

Keywords P-sets, Inverse P-sets, Conjunctive normal form, Disjunctive normal form, Recursive searching-finding, Mining-acquisition

1 引言

任何一个集合 X 都具有属性集合 α,属性集合 α 的变化(α 内属性 α_i 的个数变化)引起 X 的变化(X 内信息元 x_i 的个数变化)。给出以下两个事实。

事实 1 X 是 5 个苹果 x_i 构成的苹果集合,$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$;$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是 X 的特征集合,α_1=红色,α_2=甜味,α_3=产自中国山东烟台。显然,$\forall x_i\in X$,x_i 同时具有 α_1,α_2与 α_3,$i=1,2,\cdots,5$。用数理逻辑中的合取范式表示这个事实,得到 $x_i\in X$ 的特征 $\alpha_{(i)}=\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3$。

(1)若在 α 内补充特征 α_4=重量 200 克,α 变成 $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_4\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$,$\alpha\subseteq\alpha^F$;则 X 变成 $X^{\overline{F}}=X-\{x_4,$

到稿日期:2017-08-29 返修日期:2018-01-04 本文受福建省中青年教师教育科研项目(JA15495,JA15503),龙岩学院重点学科资助项目,大数据挖掘与应用福建省高校重点实验室(龙岩学院)资助。

张 凌(1963-),男,教授,主要研究方向为信息系统理论与应用,E-mail:zl79024@163.com;**任雪芳**(1981-),女,硕士,副教授,主要研究方向为系统理论与应用,E-mail:renxf0311@163.com;**史开泉**(1945-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为系统理论与应用,E-mail:shikq@sdu.edu.cn(通信作者)。

$x_5\}=\{x_1,x_2,x_3\}$，$X^{\overline{F}}\subseteq X$。显然，$\forall x_i\in X^{\overline{F}}$，$x_i$ 同时具有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 α_4，$i=1,2,3$；用数理逻辑中的合取范式表示这个事实，得到：$x_i\in X^{\overline{F}}$ 的特征 $\alpha_{(i)}=(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)\wedge\alpha_4=\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3\wedge\alpha_4$。

(2)若在 α 内删除特征 α_3，α 变成 $\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\alpha_3\}=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$\alpha^{\overline{F}}\subseteq\alpha$；则 X 变成 $X^F=X\cup\{x_6,x_7,x_8\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$，$X\subseteq X^F$。显然，$\forall x_i\in X^F$，$x_i$ 同时具有 α_1,α_2，$i=1,2,\cdots,8$；用数理逻辑中的合取范式表示这个事实，得到：$x_i\in X^F$ 的特征 $\alpha_{(i)}=(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)-\alpha_3=\alpha_1\wedge\alpha_2$。

(3)若在 α 内补充一些特征的同时删除 α 内的另一些特征，α 具有扩展为 α^F 的趋势，同时 α 也有收缩为 $\alpha^{\overline{F}}$ 的趋势，$\alpha^{\overline{F}}\subseteq\alpha\subseteq\alpha^F$；相应地，$X$ 具有收缩为 $X^{\overline{F}}$ 的趋势，同时也有扩展为 X^F 的趋势，使得 X 的最终状态介于 $X^{\overline{F}}$ 与 X^F 之间，即 $X^{\overline{F}}\subseteq X\subseteq X^F$，或者，把 X 描述为一个集合对 $(X^{\overline{F}},X^F)$。

(4)若在 α 内补充特征的同时删除特征的过程不断进行，则 X 生成多个集合对：$(X_1^{\overline{F}},X_1^F)$，$(X_2^{\overline{F}},X_2^F)$，$\cdots$，$(X_n^{\overline{F}},X_n^F)$。

这个简单事实能被人们接受。如果把苹果集合 X 定义成有限普通元素集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$，把苹果集合 X 的特征集合 α 定义成 X 的属性集合 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$，用数学的方法认识事实 1，则得到第 2 节中的 P-集合模型（P=packet），P-集合模型已得到广泛应用[1-9]。

事实 2　X 是已被出售的商品 x_i 构成的商品集合，$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$是 X 的合同集合，$\forall\alpha_i\in\alpha$ 是 $x_i\in X$ 被出售时的合同，满足：$\forall x_i,x_j\in X$，若 $x_i\neq x_j$，则 $\alpha_i\neq\alpha_j$；$\alpha_i,\alpha_j\in\alpha$。显然，$\forall x_i\in X$，$x_i$ 具有合同 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,6)$。用数理逻辑中的析取范式表示这个事实，得到：$\forall x_i\in X$ 的合同 $\alpha_{(i)}=\alpha_1\vee\alpha_2\vee\cdots\vee\alpha_6$。

(1)若在 α 内补充合同 α_7 和 α_8，α 变成 $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_7,\alpha_8\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_8\}$，$\alpha\subseteq\alpha^F$，则 X 变成 $\overline{X}^F=X\cup\{x_7,x_8\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$，$X\subseteq\overline{X}^F$。用数理逻辑中的析取范式表示，得到：$\forall x_i\in\overline{X}^F$ 的合同 $\alpha_{(i)}=(\alpha_1\vee\alpha_2\vee\cdots\vee\alpha_6)\vee\alpha_7\vee\alpha_8=\alpha_1\vee\alpha_2\vee\cdots\vee\alpha_8$。

(2)若在 α 内删除合同 α_5 和 α_6，α 变成 $\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\alpha_5,\alpha_6\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，$\alpha^{\overline{F}}\subseteq\alpha$；则 X 变成 $\overline{X}^{\overline{F}}=X-\{x_5,x_6\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$\overline{X}^{\overline{F}}\subseteq X$。用数理逻辑中的析取范式表示这个事实，得到：$\forall x_i\in\overline{X}^{\overline{F}}$ 的合同 $\alpha_{(i)}=(\alpha_1\vee\alpha_2\vee\cdots\vee\alpha_6)-\alpha_5\vee\alpha_6=\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3\vee\alpha_4$。

(3)若在 α 内补充一些合同，同时删除 α 内的另外一些合同，则 α 具有扩展为 α^F 的趋势，同时 α 也具有收缩为 $\alpha^{\overline{F}}$ 的趋势，$\alpha^{\overline{F}}\subseteq\alpha\subseteq\alpha^F$；相应地，$X$ 具有扩展为 $\overline{X}^F$ 的趋势，同时也有收缩为 $\overline{X}^{\overline{F}}$ 的趋势，使得 X 的最终状态介于 $\overline{X}^F$ 与 $\overline{X}^{\overline{F}}$ 之间，即 $\overline{X}^F\subseteq X\subseteq\overline{X}^{\overline{F}}$，或者，把 X 描述为一个集合对 $(\overline{X}^F,\overline{X}^{\overline{F}})$。

(4)若在 α 内补充合同的同时在 α 内删除合同的过程不断进行，则 X 生成多个集合对：$(\overline{X}_1^F,\overline{X}_1^{\overline{F}})$，$(\overline{X}_2^F,\overline{X}_2^{\overline{F}})$，$\cdots$，$(\overline{X}_n^F,\overline{X}_n^{\overline{F}})$。

这个简单事实能被人们接受。如果把商品集合 X 定义成有限普通元素集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$，把商品集合 X 的合同集合 α 定义成 X 的属性集合 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$，用数学的方法认识事实 2，则得到第 3 节中的逆 P-集合模型，逆 P-集合模型已得到广泛应用[3,11-17]。逆 P-集合模型是 P-集合模型的对偶形式。

2008 年，文献[1-2]把动态特性引入到有限普通元素集合 X 内，以改进有限普通元素集合 X，提出了 P-集合并给出其结构。P-集合是由内 P-集合 $X^{\overline{F}}$ 与外 P-集合 X^F 构成的集合对，或者 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 是 P-集合。P-集合具有动态特征；在一定条件下，P-集合被还原成有限普通元素集合 X。文中 P-集合被称作一类动态信息模型。2011 年，文献[11]把动态特性引入到有限普通元素集合 X 内，改进了有限普通元素集合 X，提出了逆 P-集合并给出其结构。逆 P-集合是由内逆 P-集合 $\overline{X}^F$ 与外逆 P-集合 $\overline{X}^{\overline{F}}$ 构成的集合对，或者 $(\overline{X}^F,\overline{X}^{\overline{F}})$ 是逆 P-集合。逆 P-集合具有动态特征；在一定的条件下，逆 P-集合被还原成有限普通元素集合 X。文中逆 P-集合被称作另一类动态信息模型。

本文主要介绍了 P-集合和逆 P-集合的结构及生成；给出了 P-集合的合取范式收缩-扩展的逻辑特征；给出了逆 P-集合的析取范式扩展-收缩的逻辑特征；最后分别给出了 P-集合、逆 P-集合在动态信息处理中的应用。

2　P-集合模型及其逻辑特征

2.1　P-集合模型及其生成

文献[1-2]给出：给定有限普通元素集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合。称 $X^{\overline{F}}$ 是被 X 生成的内 P-集合（Internal P-set），简称 $X^{\overline{F}}$ 是内 P-集合。

$$X^{\overline{F}}=X-X^- \tag{1}$$

其中，X^- 称作 X 的 $\overline{F}$-元素删除集合，且：

$$X^-=\{x_i\mid x_i\in X,\overline{f}(x_i)=u_i\overline{\in}X,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{2}$$

如果 $X^{\overline{F}}$ 的属性集合 α^F 满足：

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_i{}'\mid f(\beta_i)=\alpha_i{}'\in\alpha,f\in F\} \tag{3}$$

则式(1)中 $X^{\overline{F}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$，$p<q$，$p,q\in\mathrm{N}^+$。式(3)中，$\beta_i\in V$，$\beta_i\overline{\in}\alpha$，$f\in F$ 把 β_i 变成 $f(\beta_i)=\alpha_i{}'\in\alpha$，$X^{\overline{F}}\neq\emptyset$。

给定有限普通元素集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合，称 X^F 是被 X 生成的外 P-集合（Outer P-set），简称 X^F 是外 P-集合。

$$X^F=X\cup X^+ \tag{4}$$

其中，X^+ 称作 X 的 F-元素补充集合，有：

$$X^+=\{u_i\mid u_i\in U,u_i\overline{\in}X,f(u_i)=x_i{}'\in X,f\in F\} \tag{5}$$

如果 X^F 的属性集合 $\alpha^{\overline{F}}$ 满足：

$$\alpha^{\overline{F}}=\alpha-\{\beta_i\mid\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{6}$$

则式(4)中，$X^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$，$q<r$，$q,r\in\mathbf{N}^+$。式(6)中，$\alpha_i\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$，$\alpha^{\overline{F}}\neq\emptyset$。

由内 P-集合 $X^{\overline{F}}$ 与外 P-集合 X^F 构成的元素集合对，称

作是被 X 生成的 P-集合(P-sets),简称 P-集合:

$$(X^{\bar{F}},X^{F}) \tag{7}$$

有限普通元素集合 X 称作 P-集合$(X^{\bar{F}},X^{F})$的基集合(基础集合(Ground Set))。

在 α 内不断补充属性,式(3)给出:

$$\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{n-1}^F\subseteq\alpha_n^F \tag{8}$$

则得到满足式(8)的内 P-集合:

$$X_n^{\bar{F}}\subseteq X_{n-1}^{\bar{F}}\subseteq\cdots\subseteq X_2^{\bar{F}}\subseteq X_1^{\bar{F}} \tag{9}$$

在 α 内不断删除属性,式(6)给出:

$$\alpha_n^{\bar{F}}\subseteq\alpha_{n-1}^{\bar{F}}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_2^{\bar{F}}\subseteq\alpha_1^{\bar{F}} \tag{10}$$

则得到满足式(10)的外 P-集合:

$$X_1^F\subseteq X_2^F\subseteq\cdots\subseteq X_{n-1}^F\subseteq X_n^F \tag{11}$$

根据式(9)、式(11),称

$$\{(X_i^{\bar{F}},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\} \tag{12}$$

是被 X 生成的 P-集合族。式(12)是 P-集合的一般形式。

由式(1)-式(7)、式(12)得到以下命题。

命题 1 在 $F=\bar{F}=\varnothing$ 的条件下,P-集合$(X^{\bar{F}},X^{F})$被还原成有限普通元素集合 X,或者

$$(X^{\bar{F}},X^{F})_{F=\bar{F}=\varnothing}=X \tag{13}$$

事实上,1)若 $F=\bar{F}=\varnothing$,则式(1)中 $X^{\bar{F}}=X-X^-=X-\varnothing=X$,式(2)中$\{x_i\mid x_i\in X,\bar{f}(x_i)=u_i\,\overline{\in}\,X,\bar{f}\in\bar{F}\}=\varnothing$,式(3)中 $\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_i{}'\mid f(\beta_i)=\alpha_i{}'\in\alpha,f\in F\}=\alpha\cup\varnothing=\alpha$,$\{\alpha_i{}'\mid f(\beta_i)=\alpha_i{}'\in\alpha,f\in F\}=\varnothing$。2)若 $F=\bar{F}=\varnothing$,则式(4)中 $X^F=X\cup X^+=X\cup\varnothing=X$,式(5)中 $X^+=\{u_i\mid u_i\in U,u_i\,\overline{\in}\,X,f(u_i)=x_i{}'\,\overline{\in}\,X,f\in F\}=\varnothing$,式(6)中 $\alpha^{\bar{F}}=\alpha-\{\beta_i\mid\bar{f}(\alpha_i)=\beta_i\,\overline{\in}\,\alpha,\bar{f}\in\bar{F}\}=\alpha-\varnothing=\alpha$,$\{\beta_i\mid\bar{f}(\alpha_i)=\beta_i\,\overline{\in}\,\alpha,\bar{f}\in\bar{F}\}=\varnothing$。由此可得到式(13)。

命题 2 在 $F=\bar{F}=\varnothing$ 的条件下,P-集合族$\{(X_i^{\bar{F}},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\}$被还原成有限普通元素集合 X,或者

$$\{(X_i^{\bar{F}},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\}_{F=\bar{F}=\varnothing}=X$$

2.2 P-集合模型的逻辑特征

利用事实 1 和式(1)-式(7),容易证明定理 1、定理 2 和推论 1。

基于事实 1,给定有限普通元素集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合,易证:$\forall x_i\in X$ 的属性 $\alpha_{(i)}$ 满足属性合取范式:

$$\alpha_{(i)}=\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_k=\bigwedge_{i=1}^{k}\alpha_i$$

定理 1 给定内 P-集合 $X^{\bar{F}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}\subset U$,$\alpha^F=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_\lambda\}$是 $X^{\bar{F}}$ 的属性集合,$\forall x_i\in X^{\bar{F}}$ 的属性 $\alpha_{(i)}$ 满足属性合取范式扩展:

$$\alpha_{(i)}=(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_k)\wedge\alpha_{k+1}\wedge\cdots\wedge\alpha_\lambda$$
$$=(\bigwedge_{i=1}^{k}\alpha_t)\bigwedge_{i=k+1}^{\lambda}\alpha_i$$

定理 2 给定外 P-集合 $X^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$,$\alpha^{\bar{F}}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\}$是 X^F 的属性集合,$\forall x_i\in X^F$ 的属性 $\alpha_{(i)}$ 满足属性合取范式收缩,$t<k$,且:

$$\alpha_{(i)}=\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_t=\bigwedge_{i=1}^{k}\alpha_i-\bigwedge_{i=t+1}^{k}\alpha_i。$$

推论 1 $(\alpha^F,\alpha^{\bar{F}})$是 P-集合$(X^{\bar{F}},X^{F})$的属性集合,$\forall x_i\in X^{\bar{F}}$ 的属性 $\alpha_{(i)}$,$\forall x_j\in X^F$ 的属性 $\alpha_{(j)}$ 满足属性合取范式扩展-收缩。

$$(\alpha_{(i)},\alpha_{(j)})=((\bigwedge_{i=1}^{k}\alpha_i)\bigwedge_{i=k+1}^{\lambda}\alpha_i,\bigwedge_{i=1}^{k}\alpha_i-\bigwedge_{i=t+1}^{k}\alpha_i) \tag{14}$$

式(14)表示 $\alpha_{(i)}=\bigwedge_{i=1}^{k}\alpha_i\bigwedge_{i=k+1}^{\lambda}\alpha_i$,$\alpha_{(j)}=\bigwedge_{i=1}^{k}\alpha_i-\bigwedge_{i=t+1}^{k}\alpha_i$。

图 1 给出了 P-集合的二维空间表示。

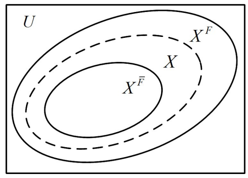

图 1 P-集合的二维空间示意图

Fig. 1 Dscription of P-sets in two-dimensional space

在图 1 中,有限普通元素集合 X 用虚线表示;$X^{\bar{F}}$ 是内 P-集合,用实线表示;X^F 是外 P-集合,用实线表示;$X^{\bar{F}}$ 与 X^F 构成 P-集合$(X^{\bar{F}},X^{F})$。在 α 内补充属性的条件下,X 收缩生成 $X^{\bar{F}}$;在 α 内删除属性的条件下,X 扩展生成$\bar{X}^F$。

3 逆 P-集合模型及其逻辑特征

3.1 逆 P-集合模型及其生成

文献[11]给出:给定有限普通元素集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合。称$\bar{X}^F$ 是 X 生成的内逆 P-集合(Internal Inerse P-set),简称$\bar{X}^F$ 是内逆 P-集合:

$$\bar{X}^F=X\cup X^+ \tag{15}$$

其中,X^+ 称作 X 的 F-元素补充集合,且:

$$X^+=\{u_i\mid u_i\in U,u_i\,\overline{\in}\,X,f(u_i)=x_i{}'\in X,f\in F\} \tag{16}$$

如果$\bar{X}^F$ 的属性集合 α^F 满足:

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_i{}'\mid f(\beta_i)=\alpha_i{}'\in\alpha,f\in F\} \tag{17}$$

则式(15)中,$\bar{X}^F=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$,$q<r$,$q,r\in\mathbf{N}^+$。式(17)中,$\beta_i\in V$,$\beta_i\,\overline{\in}\,\alpha$,$f\in F$ 把 β_i 变成 $f(\beta_i)=\alpha_i{}'\in\alpha$。

给定有限普通元素集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}\subset U$,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合,称$\bar{X}^{\bar{F}}$ 是 X 生成的外逆 P-集合(Outer Inverse P-set),简称$\bar{X}^{\bar{F}}$ 是外逆 P-集合:

$$\bar{X}^{\bar{F}}=X-X^- \tag{18}$$

其中,X^- 称作 X 的$\bar{F}$-元素删除集合,且:

$$X^-=\{x_i\mid x_i\in X,\bar{f}(x_i)=u_i\,\overline{\in}\,X,\bar{f}\in\bar{F}\} \tag{19}$$

如果$\bar{X}^{\bar{F}}$ 的属性集合 $\alpha^{\bar{F}}$ 满足:

$$\alpha^{\bar{F}}=\alpha-\{\beta_i\mid\bar{f}(\alpha_i)=\beta_i\,\overline{\in}\,\alpha,\bar{f}\in\bar{F}\} \tag{20}$$

则式(18)中,$\bar{X}^{\bar{F}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$,$p<q$,$p,q\in\mathbf{N}^+$。式(20)中,$\alpha_i\in\alpha$,$\bar{f}\in\bar{F}$把 α_i 变成$\bar{f}(\alpha_i)=\beta_i\,\overline{\in}\,\alpha$。$\bar{X}^{\bar{F}}\neq\varnothing$,$\alpha^{\bar{F}}\neq\varnothing$。

由内逆 P-集合$\bar{X}^F$ 与外逆 P-集合$\bar{X}^{\bar{F}}$ 构成的元素集合对,

称作 X 生成的逆 P-集合，简称逆 P-集合：

$$(\bar{X}^F, \bar{X}^{\bar{F}}) \tag{21}$$

有限普通元素集合 X 称作逆 P-集合 $(\bar{X}^F, \bar{X}^{\bar{F}})$ 的基集合(基础集合(Ground set))。

在 α 内不断补充属性，式(17)给出：

$$\alpha_1^F \subseteq \alpha_2^F \subseteq \cdots \subseteq \alpha_{n-1}^F \subseteq \alpha_n^F \tag{22}$$

得到满足式(22)的内逆 P-集合：

$$\bar{X}_1^F \subseteq \bar{X}_2^F \subseteq \cdots \subseteq \bar{X}_{n-1}^F \subseteq \bar{X}_n^F \tag{23}$$

在 α 内不断删除属性，式(20)给出：

$$\alpha_n^{\bar{F}} \subseteq \alpha_{n-1}^{\bar{F}} \subseteq \cdots \subseteq \alpha_2^{\bar{F}} \subseteq \alpha_1^{\bar{F}} \tag{24}$$

得到满足式(24)的外逆 P-集合：

$$\bar{X}_n^{\bar{F}} \subseteq \bar{X}_{n-1}^{\bar{F}} \subseteq \cdots \subseteq \bar{X}_2^{\bar{F}} \subseteq \bar{X}_1^{\bar{F}} \tag{25}$$

根据式(23)、式(25)，称

$$\{(\bar{X}_i^F, \bar{X}_j^{\bar{F}}) \mid i \in I, j \in J\} \tag{26}$$

是被 X 生成的逆 P-集合族。式(26)是逆 P-集合的一般形式。

由式(15)－式(21)、式(26)得到以下命题。

命题 3　在 $F=\bar{F}=\varnothing$ 的条件下，逆 P-集合 $(\bar{X}^F, \bar{X}^{\bar{F}})$ 被还原成有限普通元素集合 X，或者 $(\bar{X}^F, \bar{X}^{\bar{F}})_{F=\bar{F}=\varnothing}=X$。

命题 4　在 $F=\bar{F}=\varnothing$ 的条件下，逆 P-集合族 $\{(\bar{X}_i^F, \bar{X}_j^{\bar{F}}) \mid i \in I, j \in J\}$ 被还原成有限普通元素集合 X，或者 $\{(\bar{X}_i^F, \bar{X}_j^{\bar{F}}) \mid i \in I, j \in J\}_{F=\bar{F}=\varnothing}=X$。

3.2　逆 P-集合模型的逻辑特征

利用事实 2、式(15)－式(21)，容易证明定理 3、定理 4 和推论 2。

基于事实 2，给定有限普通元素集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_q\} \subset U$，$\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_q\} \subset V$ 是 X 的属性集合，易证：$\forall x_i \in X$ 的属性 $\alpha_{(i)}$ 满足属性析取范式：

$$\alpha_{(i)}=\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_q=\bigvee_{i=1}^{q} \alpha_i。$$

定理 3　给定内逆 P-集合 $\bar{X}^F=\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$，$\alpha^F=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q, \alpha_{q+1}, \cdots, \alpha_\lambda\} \subset V$ 是 $\bar{X}^F$ 的属性集合，$\forall x_i \in \bar{X}^F$ 的属性 $\alpha_{(i)}$ 满足属性析取范式扩展：

$$\begin{aligned}\alpha_{(i)}&=(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_q) \vee \alpha_{q+1} \vee \alpha_{q+2} \vee \cdots \vee \alpha_r\\&=(\bigvee_{i=1}^{q} \alpha_t) \bigvee_{i=q+1}^{r} \alpha_i\end{aligned}$$

定理 4　给定外逆 P-集合 $\bar{X}^{\bar{F}}=\{x_1, x_2, \cdots, x_p\} \subset U$，$\alpha^{\bar{F}}=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} \subset V$ 是 $\bar{X}^{\bar{F}}$ 的属性集合，$\forall x_i \in \bar{X}^{\bar{F}}$ 的属性 $\alpha_{(i)}$ 满足属性析取范式收缩：

$$\begin{aligned}\alpha_{(i)}&=(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_p \vee \alpha_{p+1} \vee \cdots \vee \alpha_q)-\alpha_{p+1} \vee \cdots \vee \alpha_q\\&=\bigvee_{i=1}^{q} \alpha_i-\bigvee_{i=p+1}^{q} \alpha_i\end{aligned}$$

推论 2　$(\alpha^F, \alpha^{\bar{F}})$ 是逆 P-集合 $(\bar{X}^F, \bar{X}^{\bar{F}})$ 的属性集合，$\forall x_i \in \bar{X}^F$ 的属性 $\alpha_{(i)}$ 和 $\forall x_j \in \bar{X}^{\bar{F}}$ 的属性 $\alpha_{(j)}$ 满足属性析取范式扩展-收缩：

$$(\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)})=(\bigvee_{i=1}^{q} \alpha_i \bigvee_{i=q+1}^{r} \alpha_i, (\bigvee_{i=1}^{q} \alpha_i)-\bigvee_{i=p+1}^{q} \alpha_i)$$

这里，$\alpha_{(i)}=(\bigvee_{i=1}^{q} \alpha_i) \bigvee_{i=q+1}^{r} \alpha_i$，$\alpha_{(j)}=\bigvee_{i=1}^{q} \alpha_i-\bigvee_{i=p+1}^{q} \alpha_i$。

图 2 给出了逆 P-集合的二维空间表示。

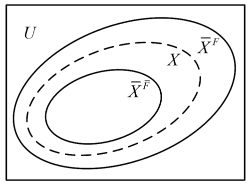

图 2　逆 P-集合的二维空间表示

Fig. 2　Description of inverse P-sets in two-dimensional space

图 2 中，有限普通元素集合 X 用虚线表示；$\bar{X}^F$ 是内逆 P-集合，用实线表示；$\bar{X}^{\bar{F}}$ 是外逆 P-集合，用实线表示；$\bar{X}^F$ 与 $\bar{X}^{\bar{F}}$ 构成 P-集合 $(\bar{X}^F, \bar{X}^{\bar{F}})$。在 α 内补充属性的条件下，X 扩展生成 $\bar{X}^F$；在 α 内删除属性的条件下，X 收缩生成 $\bar{X}^{\bar{F}}$。

对于第 2 节、第 3 节，有如下重要说明：1) U 是有限元素论域，V 是有限属性论域。2) $F=\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$，$\bar{F}=\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_n\}$ 是元素(属性)迁移族；$f \in F$，$\bar{f} \in \bar{F}$ 是元素(属性)迁移，元素(属性)迁移也称迁移函数或者变换。3) $f \in F$ 的特征是：对于元素 $u_i \in U$，$u_i \overline{\in} X$，$f \in F$ 把 u_i 变成 $f(u_i)=x_i{}' \in X$；对于属性 $\beta_i \in V$，$\beta_i \overline{\in} \alpha$，$f \in F$ 把 β_i 变成 $f(\beta_i)=\alpha_i{}' \in \alpha$。$\bar{f} \in \bar{F}$ 的特征是：对于元素 $x_i \in X$，$\bar{f} \in \bar{F}$ 把 x_i 变成 $\bar{f}(x_i)=u_i \overline{\in} X$；对于属性 $\alpha_i \in \alpha$，$\bar{f} \in \bar{F}$ 把 α_i 变成 $\bar{f}(\alpha_i)=\beta_i \overline{\in} \alpha$。4)式(1)与式(18)的动态特征与累减器 $T=T-1$ 的动态特征相同。5)式(4)与式(15)的动态特征与累加器 $T=T+1$ 的动态特征相同。例如，式(4)中 $X_1^F=X \cup X_1^+$，令 $X=X_1^F$，得到 $X_2^F=X_1^F \cup X_2^+=(X_1^F \cup X_1^+) \cup X_2^+$，…，诸如此类。重要说明 1)－5)对于接受第 2 节、第 3 节中的概念与模型是非常重要的。

约定　在本文第 4 节、第 5 节的讨论中，P-集合模型被称作一类动态信息模型，逆 P-集合模型被称作另一类动态信息模型。有限普通元素集合 X 被称作信息，内 P-集合 $X^{\bar{F}}$ 被称作内 P-信息，外 P-集合 X^F 被称作外 P-信息，P-集合 $(X^{\bar{F}}, X^F)$ 被称作 P-信息；X，$X^{\bar{F}}$，X^F，$(X^{\bar{F}}, X^F)$ 分别记作 (x)，$(x)^{\bar{F}}$，$(x)^F$，$((x)^{\bar{F}}, (x)^F)$，或者，$(x)=X$，$(x)^{\bar{F}}=X^{\bar{F}}$，$(x)^F=X^F$，$((x)^{\bar{F}}, (x)^F)=(X^{\bar{F}}, X^F)$；$\forall x_i \in (x)$(或 $\forall x_i \in (x)^{\bar{F}}$，或 $\forall x_i \in (x)^F$)称作信息元。内逆 P-集合 $\bar{X}^F$ 被称作内 P-信息，外逆 P-集合 $\bar{X}^{\bar{F}}$ 被称作外逆 P-信息，逆 P-集合 $(\bar{X}^F, \bar{X}^{\bar{F}})$ 被称作逆 P-信息；$\bar{X}^F$，$\bar{X}^{\bar{F}}$，$(\bar{X}^F, \bar{X}^{\bar{F}})$ 分别记作 $(\bar{x})^F$，$(\bar{x})^{\bar{F}}$ $((\bar{x})^F, (\bar{x})^{\bar{F}})$，或者 $(\bar{x})^F=\bar{X}^F$，$(\bar{x})^{\bar{F}}=\bar{X}^{\bar{F}}$，$((\bar{x})^F, (\bar{x})^{\bar{F}})=(\bar{X}^{\bar{F}}, \bar{X}^F)$；$\forall x_i \in (\bar{x})^F$(或 $\forall x_i \in (\bar{x})^{\bar{F}}$)称作信息元。

4　具有属性合取范式的信息的递推-搜索发现与应用

为了简单又不失应用的一般性，本节只给出内 P-信息 $(x)^{\bar{F}}$ 的递推-搜索发现的简单应用；外 P-信息 $(x)^F$ 的递推-搜索发现的应用略。

给定信息 $(x)=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$，$\alpha=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 (x) 的属性集合。

(1)若在 α 内补充属性 α_4，α 生成 $\alpha_1^F=\alpha \cup \{\alpha_4\}=\{\alpha_1, \alpha_2,$

$\alpha_3,\alpha_4\}$,则(x)生成内 P-信息$(x)_1^{\bar{F}}$:

$(x)_1^{\bar{F}}=\{x_1,x_2,x_4,x_6,x_7\}$

因为α_4被补充到α内,(x)内的信息元x_3,x_5从(x)内被删除,从而$(x)_1^{\bar{F}}\subseteq(x)$;$\forall x_i\in(x)_1^{\bar{F}}$的属性$\alpha_{(i)}$满足属性合取范式扩展,或者,$\forall x_i\in(x)_1^{\bar{F}}$的属性$\alpha_{(i)}=(\bigwedge_{i=1}^{3}\alpha_i)\bigwedge_{i=3+1}^{4}\alpha_i=(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)\wedge\alpha_4=\bigwedge_{i=1}^{4}\alpha_i$。

在α内补充属性,α变为α_1^F,说明信息系统的逻辑特征得到扩展,部分系统信息丢失,信息(x)被收缩为$(x)_1^{\bar{F}}$。

(2)在α_1^F内补充属性α_5,α_6,α_1^F变成$\alpha_2^F=\alpha_1^F\cup\{\alpha_5,\alpha_6\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$,$(x)_1^{\bar{F}}$内的信息元$x_2,x_4,x_6$从$(x)_1^{\bar{F}}$内被删除,$(x)$生成内 P-信息$(x)_2^{\bar{F}}$:

$(x)_2^{\bar{F}}=\{x_1,x_7\}$

显然,$(x)_2^{\bar{F}}\subseteq(x)_1^{\bar{F}}$,$\forall x_i\in(x)_2^{\bar{F}}$的属性$\alpha_{(i)}$满足$\alpha_{(i)}=\bigwedge_{i=1}^{6}\alpha_i$。

在α_1^F内补充属性,α_1^F变为α_2^F,说明信息系统的逻辑特征再次得到扩展,$(x)_1^{\bar{F}}$中部分信息丢失,信息$(x)_1^{\bar{F}}$再次收缩为$(x)_2^{\bar{F}}$。

综上,在内 P-集合的理论背景下,根据信息系统的逻辑特征,在(x)内$(x)_1^{\bar{F}}$,$(x)_2^{\bar{F}}$被依次递推-搜索发现;(x),$(x)_1^{\bar{F}}$,$(x)_2^{\bar{F}}$满足$IDE((x),(x)_1^{\bar{F}},(x)_2^{\bar{F}})$,$IDE=$identification。

本节的应用案例取自系统故障辨识实验的最后简化结果。案例中$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$是系统正常状态的输出,$x_1\sim x_7$具有确定的非零输出值。$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是系统的结构特征,$\alpha_1\sim\alpha_3$的名称略。$\alpha_4$是系统受到的外来干扰,在$\alpha_4$存在的条件下,$(x)$生成$(x)_1^{\bar{F}}$,使得$x_3,x_5$的输出变为“0”,系统出现故障。$\alpha_5,\alpha_6$是系统受到第二次外来干扰,$(x)$生成$(\bar{x})_2^{\bar{F}}$,使得$x_2,x_4,x_6$的输出变为“0”,系统输出故障。实验结果被确认。

5 具有属性析取范式的信息挖掘-获取与应用

为了简单起见,本节只给出外逆 P-信息$(\bar{x})^{\bar{F}}$的挖掘-获取的简单应用。

给定信息$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$是$(x)$的属性集合。

(1)在α内删除属性α_5和α_6,α生成$\alpha_1^{\bar{F}}=\alpha-\{\alpha_5,\alpha_6\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$,则$(x)$生成外逆 P-信息$(\bar{x})_1^{\bar{F}}$:

$(\bar{x})_1^{\bar{F}}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$

因为α_5,α_6从α内被删除,(x)内的信息元x_5,x_6从(x)内被删除,所以$(\bar{x})_1^{\bar{F}}\subseteq(x)$;$\forall x_i\in(\bar{x})_1^{\bar{F}}$的属性$\alpha_{(i)}$满足属性析取范式收缩;或者,$\forall x_i\in(\bar{x})_1^{\bar{F}}$的属性$\alpha_{(i)}$满足:

$$\begin{aligned}\alpha_{(i)}&=(\bigvee_{i=1}^{6}\alpha_i)-\bigvee_{i=5}^{6}\alpha_i\\&=(\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3\vee\alpha_4\vee\alpha_5\vee\alpha_6)-(\alpha_5\vee\alpha_6)\\&=\alpha_1\vee\alpha_2\vee\alpha_3\vee\alpha_4\\&=\bigvee_{i=1}^{4}\alpha_i\end{aligned}$$

在α内删除属性,α变成$\alpha_1^{\bar{F}}$,说明信息系统的逻辑特征得到收缩,若干信息相应地被删除,信息(x)收缩为$(\bar{x})_1^{\bar{F}}$。

(2)在$\alpha_1^{\bar{F}}$内删除属性α_1和α_4,$\alpha_1^{\bar{F}}$变成$\alpha_2^{\bar{F}}=\alpha_1^{\bar{F}}-\{\alpha_1,\alpha_4\}=\{\alpha_2,\alpha_3\}$,则$(x)$生成外逆 P-信息$(\bar{x})_2^{\bar{F}}$:

$(\bar{x})_2^{\bar{F}}=\{x_2,x_3\}$

因为属性α_1,α_4从$\alpha_1^{\bar{F}}$内被删除,$(\bar{x})_1^{\bar{F}}$内的信息元x_1,x_4从$(\bar{x})_1^{\bar{F}}$内被删除,$(\bar{x})_2^{\bar{F}}\subseteq(\bar{x})_1^{\bar{F}}$;$\forall x_i\in(\bar{x})_2^{\bar{F}}$的属性$\alpha_{(i)}=\bigvee_{i=1}^{2}\alpha_i$。

在$\alpha_1^{\bar{F}}$内继续删除属性,α变成$\alpha_2^{\bar{F}}$,说明信息系统的逻辑特征再次得到收缩,$(x)_1^{\bar{F}}$内若干信息相应地被删除,信息$(x)_1^{\bar{F}}$再次收缩为$(\bar{x})_2^{\bar{F}}$。

综上,在外逆 P-集合的理论背景下,根据信息系统的逻辑特征,$(\bar{x})_1^{\bar{F}}$,$(\bar{x})_2^{\bar{F}}$从(x)内被依次动态挖掘-获取。(x),$(\bar{x})_1^{\bar{F}}$,$(\bar{x})_2^{\bar{F}}$满足$IDE((x),(\bar{x})_1^{\bar{F}},(\bar{x})_2^{\bar{F}})$。

本节的应用案例取自商品贸易中的商品出售状态分析实验的简化结果。案例中$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$是待出售的商品集合,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$是商品$x_i$的合同,$\alpha_1\sim\alpha_6$的名称略。因为合同$\alpha_5,\alpha_6$被取消,商品$x_5,x_6$从$(x)$内被删除,$x_1\sim x_4$在出售。因为合同$\alpha_1,\alpha_4$被取消,商品$x_1,x_4$从$(x)$内被删除,$x_2,x_3$在出售。因为合同的变化(合同被取消),出售的商品随之变化,这是一个简单的现象。

结束语 本文主要研究动态信息特征与应用的理论。文中把 P-集合模型定义成一类动态信息模型,把逆 P-集合模型定义成另一类动态信息模型,并给出了它们的生成、结构、存在的事实与依据。动态信息分布在多个应用研究领域,本文研究了动态信息特征与应用的模型。一类动态信息模型具有合取范式逻辑特征,另一类动态信息模型具有析取范式逻辑特征。本文给出的模型具有重要的应用价值。为了扩大 P-集合模型的应用范围,文献[18]改进了 P-集合模型,提出了函数 P-集合模型。函数 P-集合模型是一类动态信息规律模型,可以被应用到动态信息规律识别、动态信息图像生成与伪装、区间控制规律的分析、系统状态规律的故障判定等应用研究中[18-21]。为了扩展逆 P-集合的应用范围,文献[22]改进了逆 P-集合模型,提出了函数逆 P-集合模型。函数逆 P-集合模型是另一类动态信息规律模型,可被应用到利润的盈-亏规律的动态分析、信息图像隐藏-还原、利润规律的风险估计等应用研究中[22-24]。本文给出的两类动态信息模型将形成信息技术与应用的新领域。

参 考 文 献

[1] SHI K Q. P-sets[J]. Journal of Shandong University(Natural Science),2008,43(11):77-84.(in Chinese)
史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报(理学版),2008,43(11):77-84.

[2] SHI K Q. P-sets and its application [J]. Advances in Systems Science and Applications,2009,9(2):209-219.

[3] SHI K Q. P-sets,inverse P-sets and the intelligent fusion-filter

identification of information [J]. Computer Science, 2012, 39(4): 1-13. (in Chinese)
史开泉. P-集合，逆 P-集合与信息智能融合-过滤辨识[J]. 计算机科学，2012，39(4)：1-13.

[4] FAN C X, LIN H K. P-sets and the reasoning-identification of disaster information[J]. International Journal of Convergence Information Technology, 2012, 7(1): 337-345.

[5] LIN H K, FAN C X. The dual form of P-reasoning and identification of unknown attribute [J]. International Journal of Digital Content Technology and its Applications, 2012, 6(1): 121-131.

[6] LI Y Y, LIN H K, SHI K Q. Characteristics of data discrete interval and data discovery-application [J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(10): 2258-2262. (in Chinese)
李豫颖，林宏康，史开泉. 数据离散区间特征与数据发现-应用[J]. 系统工程与电子技术，2011，33(10)：2258-2262.

[7] ZHANG L, REN X F. P-Sets and its $(f, \bar{f})$-Heredity [C]// Proceedings of International Conference on Quantitative Logic and Soft Computing. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 735-743.

[8] XIU M, SHI K Q, ZHANG L. P-sets and $\bar{F}$-data Selection-Discovery[C]// Proceedings of International Conference on Quantitative Logic and Soft Computing. Berlin: Springer-Verlag, 2010: 791-799.

[9] ZHANG L, TANG J H, SHI K Q. The fusion of internal P-information and its feature of attribute conjunction [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2014, 49(2): 93-97. (in Chinese)
张凌，汤积华，史开泉. 内 P-信息融合与它的属性合取特征[J]. 山东大学学报(理学版)，2014，49(2)：93-97.

[10] ZHANG L, REN X F, SHI K Q. Intelligent switch-camouflage of information laws and P-law augmented matrices [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2016, 51(8): 90-97. (in Chinese)
张凌，任雪芳，史开泉. 信息规律智能变换-伪装与 P-规律增广矩阵[J]. 山东大学学报(理学版)，2016，51(8)：90-97.

[11] SHI K Q. Inverse P-sets [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2012, 47(1): 98-109. (in Chinese)
史开泉. 逆 P-集合[J]. 山东大学学报(理学版)，2012，47(1)：98-109.

[12] SHI K Q. Function inverse P-sets and the hiding information generated by function inverse P-information law fusion [C]// Proceedings of Digital Services and Information Intelligence on e-Business, e-Services, and e-Society. Berlin: Springer-Verlag, 2014: 224-237.

[13] FAN C X, HUANG S L. Inverse P-reasoning discovery identification of inverse P-information [J]. International Journal of Digital Content Technology and its Applications, 2012, 6(20): 735-744.

[14] SHI K Q, TANG J H, ZHANG L. Intelligent fusion of inverse P-information and recessive transmission of information intelligent hiding [J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(3): 599-605. (in Chinese)
史开泉，汤积华，张凌. 逆 P-信息智能融合与信息智能隐藏的隐性传递[J]. 系统工程与电子技术，2015，37(3)：599-605.

[15] ZHANG L, REN X F. Surplus-deficient theorem of cardinal number and data internal-outer mining-separation [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2015, 50(8): 90-94. (in Chinese)
张凌，任雪芳. 基数余-亏定理与数据外-内挖掘-分离[J]. 山东大学学报(理学版)，2015，50(8)：90-94.

[16] REN X F, ZHANG L, SHI K Q. Boundary Characteristics of Inverse P-sets and System Condition Monitoring [J]. Computer Science, 2016, 43(10): 211-213. (in Chinese)
任雪芳，张凌，史开泉. 逆 P-集合的边界特征与系统状态监测[J]. 计算机科学，2016，43(10)：211-213.

[17] REN X F, ZHANG L. Perturbation theorems of inverse P-sets and perturbation-based data mining[J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2016, 51(12): 54-60. (in Chinese)
任雪芳，张凌. 逆 P-集合的扰动定理与数据的扰动挖掘[J]. 山东大学学报(理学版)2016，51(12)：54-60.

[18] SHI K Q. Function P-sets [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2011, 46(2): 62-69. (in Chinese)
史开泉. 函数 P-集合[J]. 山东大学学报(理学版)，2011，46(2)：62-69.

[19] SHI K Q. Function P-sets [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2011, 2(4): 281-288.

[20] SHI K Q. P-information law intelligent fusion and soft information image intelligent generation [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2014, 49(4): 1-17. (in Chinese)
史开泉. P-信息规律智能融合与软信息图像智能生成[J]. 山东大学学报(理学版)2014，49(4)：1-17.

[21] FAN C X, CHANG F L, SHI K Q. The generation of band information law and dynamic hiding of information law [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2016, 7(3): 443-449.

[22] SHI K Q. Function inverse P-sets and information law fusion [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2012, 47(8): 73-80. (in Chinese)
史开泉. 函数逆 P-集合与信息规律融合[J]. 山东大学学报(理学版)，2012，47(8)：73-80.

[23] TANG J H, CHEN B H, ZHANG L, et al. Function inverse P-sets and the dynamic separation of inverse P-information laws [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2013, 48(8): 104-110. (in Chinese)
汤积华，陈保会，张凌，等. 函数逆 P-集合与逆 P-信息规律动态分离[J]. 山东大学学报(理学版)，2013，48(8)：104-110.

[24] ZHANG J X, XU F S. Applications of function internal inverse P-set to QSPQ research [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2013, 48(8): 92-96. (in Chinese)
张景晓，徐凤生. 函数内逆 P-集合在 QSPR 研究中的应用[J]. 山东大学学报(理学版)，2013，48(8)：92-96.