决策系统中几种约简之间的关系

敬思惠　秦克云

（西南交通大学数学学院　成都 611756）

摘　要　不可区分关系是粗糙集理论的基础。首先，刻画了 λ 约简与最大分布约简、分布约简之间的相互关系，证明了 λ 协调集是最大分布协调集，也是分布协调集；其次，针对 λ 约简设计了一种基于区分矩阵中属性频率的启发式约简算法，可以降低约简计算的复杂度；最后，通过实例验证了所提算法的可行性与有效性。

关键词　粗糙集，协调集，不可区分关系，区分矩阵

中图法分类号　TP18　　　**文献标识码**　A

Relationships Between Several Reductions in Decision System

JING Si-hui　QIN Ke-yun

(College of Mathematic, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abssract　The indiscernibility relation is the basis of rough set theory. Firstly, this paper studied the relationship between λ-reduction, maximal distribution reduction and distribution reduction in decision table. It is proved that a λ-consistent set is a maximal distribution consistent set and a distribution consistent set. Secondly, this paper designed a heuristic reduction algorithm based on the attribute frequency in the distinguishing matrix for λ-reduction, which can reduce the complexity of reduction calculation. Finally, the feasibility and effectiveness of the proposed algorithm was verified by examples.

Keywords　Rough set, Consistent set, Indiscernibility relationship, Discernibility matrixes

1　引言

粗糙集理论是一种处理不确定性问题的数学工具，自 1982 年由波兰数学家 Pawlak[1] 首次提出以来，已经在理论和应用方面取得了长足的发展，受到了学术界的广泛关注。目前，粗糙集理论已经在人工智能、知识与数据发现、模式识别与分类、故障检测等方面得到了广泛的应用。

信息系统研究是粗糙集理论的一个重要方向，其中的约简问题是粗糙集理论和应用研究的热点问题。不可区分关系[1-2] 是粗糙集理论的基础，其实质是指出这样一个事实：由于我们对问题认识的深入程度有限，或者可获得的数据样本不完备，使得我们缺乏足够的知识去区分论域中的某些数据对象。不可区分关系用于刻画信息系统中对象的相似性，具有明确的语义解释，即具有相同描述的对象相互之间不可区分。基于不可区分关系，人们从相关实际问题的研究背景出发，提出了多种信息系统属性约简标准，如正域约简[2]、分配约简[3]、分布约简[3]、最大分布约简[4-5]、基于信息熵的约简[6]、λ 约简[7] 等，并给出了多种协调集判定定理，如 λ 协调集、分布协调集、最大分布协调集、分配协调集、近似协调集等，得出了属性约简方法。这些约简都可以通过 Skowron[8] 提出的区分函数获得，但其中涉及的布尔合取范式到布尔析取范式的转换是 NP-难问题。因此，人们分别从属性依赖度、属性信息熵、属性在区分矩阵中出现的频率等角度提出了属性重要度，进而基于属性重要度设计了一些计算约简的启发式算法[9-13]。决策表基于粗糙集理论有多种约简标准，对于这些约简标准之间的相互关系已有大量研究[3-6]，本文在相关研究的基础上进一步讨论了 λ 约简与最大分布约简、分布约简之间的相互关系，并且设计了一种基于属性频率的启发式约简算法。

2　决策表基于粗糙集理论的约简

Pawlak 粗糙集模型[1] 将知识理解为对对象进行分类的能力，形式化的知识通过论域（即所讨论对象构成的集合）上的等价关系进行刻画。论域的子集从外延角度理解为概念。如果某子集恰好是若干等价类的并集，则它表示一个精确概念，否则表示不确定性概念。在粗糙集模型中，不确定性概念借助上、下近似算子通过精确概念进行逼近。

定义 1[1]　设 U 是非空集合，称为论域，R 是 U 上的一个等价关系，称 (U,R) 为一个近似空间。对于任意 $X\subseteq U$，X 关于 (U,R) 的上、下近似分别定义为：

$$\overline{R}(X)=\{x\in U;[x]_R\cap X\neq\emptyset\}\tag{1}$$

$$\underline{R}(X)=\{x\in U;[x]_R\subseteq X\}\tag{2}$$

其中，$[x]_R=\{y\in U;(x,y)\in R\}$ 为 x 关于 R 的等价类。

信息系统属性约简与知识获取是粗糙集理论的重要研究方向。一个信息系统是一个四元组 $T=(U,A,V,f)$，其中 U 是非空有限集合，称为论域，其元素称为对象；A 是非空有限

本文受国家自然科学基金(61473239)资助。

敬思惠(1993－)，女，硕士生，主要研究方向为粗糙集理论；**秦克云**(1962－)，男，教授，博士生导师，CCF 高级会员，主要研究方向为粗糙集理论、粒计算、多值逻辑(通信作者)。

集合，其元素称为属性；$V=\bigcup_{a\in A}V_a$，V_a 是属性 a 的取值构成的集合，称为 a 的值域；$f:U\times A\rightarrow V$ 称为信息函数，它为每个对象关于每个属性赋予一个信息值，且对于任意 $x\in U,a\in A$，有 $f(x,a)\in V_a$。

一个决策表是一个信息系统 $S=(U,A,V,f)$，其中属性区分为条件属性和决策属性，即 $A=C\cup D$ 且 $C\cap D=\emptyset$，C,D 分别为条件属性和决策属性构成的集合。本文仅考虑只有一个决策属性 d 的决策表 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$。

设 $S=(U,A,V,f)$ 是信息系统。对于任意 $B\subseteq A$，由 B 确定的不可区分关系 $Ind(B)$ 定义为：对于任意 $x,y\in U$，$(x,y)\in Ind(B)$，当且仅当对于任意 $a\in B$，$f(x,a)=f(y,a)$。

显然，不可区分关系 $Ind(B)$ 是一个等价关系，由 $Ind(B)$ 可以决定对象集合 U 的一个划分 $\{[x]_B;x\in U\}$，其中 $[x]_B$ 是 x 关于 $Ind(B)$ 的等价类。对于任意 $a\in A$，以下将 $Ind(\{a\})$ 简记为 $Ind(a)$。显然有 $Ind(B)=\bigcap_{a\in B}Ind(a)$。因此，当 $B\subseteq C\subseteq A$ 时，有 $Ind(C)\subseteq Ind(B)$。

Zhao 等[14]在信息系统中给出了 λ 相对不可区分关系的概念，进而基于 λ 相对不可区分关系提出了 λ 约简的概念。

定义 2[14]　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 是一个决策表，$A\subseteq C$。称 $Ind_d^{\lambda}(A)$ 为由 A 确定的 λ 相对不可区分关系，其中：

$$Ind_d^{\lambda}(A)=\{(x,y)\in U\times U;\forall a\in A(f(x,a)=f(y,a))\vee (f(x,d)=f(y,d))\} \tag{3}$$

定义 3[14]　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 是一个决策表，$A\subseteq C$。

1）若 $Ind_d^{\lambda}(A)=Ind_d^{\lambda}(C)$，则称 A 为 S 的 λ 协调集。

2）若 A 是一个 λ 协调集，且 A 中的任意真子集 B 不是 λ 协调集，则称 A 为 S 的 λ 约简。

对于任意 $x,y\in U$，定义 $\alpha(x,y)=\{a\in C;f(x,a)\neq f(y,a)\}$ 为 x,y 的区分属性构成的集合。基于 $\alpha(x,y)$，Qin 等[7]给出了 λ 协调集的判定定理，进而基于区分矩阵与区分函数给出了计算 λ 约简的方法。

定理 1[7]　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 是一个决策表，$A\subseteq C$，A 为 S 的 λ 协调集的充分必要条件是：对于任意 $x,y\in U$，若 $f(x,d)\neq f(y,d)$ 且 $\alpha(x,y)\neq\emptyset$，则 $A\cap\alpha(x,y)\neq\emptyset$。

张文修等[4]基于集合的包含度理论提出了决策表的几种约简标准，并给出了约简方法。

对于决策表 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$，设 $A\subseteq C$，$x\in U$，记 $U/d=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$。

$$\mu_A(x)=(D(D_1/[x]_A),D(D_2/[x]_A),\cdots,D(D_r/[x]_A)) \tag{4}$$

$$\gamma_A(x)=\{D_j;D(D_j/[x]_A)=\max_{q\leqslant r}D(D_q/[x]_A)\},1\leqslant j\leqslant r \tag{5}$$

其中，$D(\frac{D_j}{[x]_A})=\frac{|D_j\cap[x]_A|}{|[x]_A|}$ 是 $[x]_A$ 包含于 D_j 的程度。显然，$\mu_A(x)$ 是 U/d 上的概率分布。直观上，$D(\frac{D_j}{[x]_A})$ 刻画不确定性命题规则"若 $y\in[x]_A$，则 $y\in D_j$"的可信度。

定义 4[4]　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 为决策表，$A\subseteq C$。

1）若对于任意 $x\in U$，有 $\mu_A(x)=\mu_C(x)$，则称 A 是分布协调集。若 A 是分布协调集，且 A 的任意真子集 B 不是分布协调集，则称 A 为分布约简。

2）若对于任意 $x\in U$，有 $\gamma_A(x)=\gamma_C(x)$，则称 A 是最大分布协调集。若 A 是最大分布协调集，且 A 的任意真子集 B 不是最大分布协调集，则称 A 为最大分布约简。

分布协调集、最大分布协调集有以下判定定理。

定理 2[4]　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 是决策表且 $A\subseteq C$。

1）A 是分布协调集的充分必要条件为：对于任意 $x,y\in U$，若 $\mu_C(x)\neq\mu_C(y)$，则 $A\cap\alpha(x,y)\neq\emptyset$；

2）A 是最大分布协调集的充分必要条件为：对于任意 $x,y\in U$，若 $\gamma_C(x)\neq\gamma_C(y)$，则 $A\cap\alpha(x,y)\neq\emptyset$。

基于协调集判定定理，张文修等[4]借助区分函数化简给出了分布约简及最大分布约简的计算方法。

3　基于相对不可区分关系的协调集之间的相互关系

本节讨论 λ 约简与最大分布约简、分布约简之间的相互关系。

定理 3　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 是决策表，$A\subseteq C$，若 A 是 λ 协调集，则 A 是最大分布协调集。

证明：令 $U/d=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$ 是决策类的集合，A 是 λ 协调集。设 $x,y\in U$ 满足 $\gamma_C(x)\neq\gamma_C(y)$，于是 $[x]_C\neq[y]_C$，从而有 $[x]_C\cap[y]_C=\emptyset$，$\alpha(x,y)\neq\emptyset$。

1）若 $f(x,d)\neq f(y,d)$，则由 A 为 λ 协调集可知 $A\cap\alpha(x,y)\neq\emptyset$。

2）若 $f(x,d)=f(y,d)$，不妨设 $x,y\in D_k$，$1\leqslant k\leqslant m$。由于 $\gamma_C(x)\neq\gamma_C(y)$，因此 $(\gamma_C(x)-\gamma_C(y))\cup(\gamma_C(y)-\gamma_C(x))\neq\emptyset$。不妨设 $\gamma_C(x)-\gamma_C(y)\neq\emptyset$，于是存在 $D_i\in\gamma_C(x)$，使得 $D_i\notin\gamma_C(y)$。因 $\gamma_C(y)\neq\emptyset$，设 $D_j\in\gamma_C(y)$，则有 $D_i\neq D_j$。由 $D_i\in\gamma_C(x)$ 知 $\frac{|[x]_C\cap D_i|}{|[x]_C|}>0$，从而 $[x]_C\cap D_i\neq\emptyset$。故存在 $u\in U$ 使得 $u\in[x]_C\cap D_i$。

同理，由 $D_j\in\gamma_C(y)$ 可知 $\frac{|[y]_C\cap D_j|}{|[y]_C|}>0$，从而 $[y]_C\cap D_j\neq\emptyset$。故存在 $v\in U$ 使得 $v\in[y]_C\cap D_j$。由 $u\in D_i$，$v\in D_j$ 及 $D_i\neq D_j$ 可知 $f(u,d)\neq f(v,d)$，再由 $u\in[x]_C$ 及 $v\in[y]_C$ 可得 $\alpha(x,y)=\alpha(u,v)$。

于是由证明 1）知 $A\cap\alpha(x,y)=A\cap\alpha(u,v)\neq\emptyset$。由证明 1）和 2）可得 A 是最大分布协调集。

推论 1　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 是决策表，$A\subseteq C$，若 A 是 λ 约简，则存在 $B\subseteq A$，使得 B 是 S 的最大分布约简。

定理 4　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 是决策表，$A\subseteq C$，若 A 是 λ 协调集，则 A 是分布协调集。

证明：令 $U/d=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$ 是决策类的集合，A 是 λ 协调集。对于任意 $x,y\in U$，若 $u_C(x)\neq u_C(y)$，于是 $[x]_C\neq[y]_C$，从而有 $[x]_C\cap[y]_C=\emptyset$，$\alpha(x,y)\neq\emptyset$。

1）若 $f(x,d)\neq f(y,d)$，则由 A 为 λ 协调集可知 $A\cap\alpha(x,y)\neq\emptyset$。

2）若 $f(x,d)=f(y,d)$，不妨设 $x,y\in D_k$，$1\leqslant k\leqslant m$。由 $u_C(x)\neq u_C(y)$ 可得存在 $i(1\leqslant i\leqslant m,i\neq k)$ 使得 $\frac{|[x]_C\cap D_i|}{|[x]_C|}\neq\frac{|[y]_C\cap D_i|}{|[y]_C|}$。事实上，如果对于任意 $i(1\leqslant i\leqslant m,i\neq k)$ 都有 $\frac{|[x]_C\cap D_i|}{|[x]_C|}=\frac{|[y]_C\cap D_i|}{|[y]_C|}$，则由

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant m}\frac{|[x]_C\cap D_j|}{|[x]_C|}=1=\sum_{1\leqslant j\leqslant m}\frac{|[y]_C\cap D_j|}{|[y]_C|}$$

可知

$$\frac{|[x]_C\cap D_k|}{|[x]_C|}=\frac{|[y]_C\cap D_k|}{|[y]_C|}$$

从而有 $u_C(x)=u_C(y)$，矛盾。

不妨设 $\frac{|[x]_C\cap D_i|}{|[x]_C|}>\frac{|[y]_C\cap D_i|}{|[y]_C|}$，于是 $|[x]_C\cap D_i|>0$，$[x]_C\cap D_i\neq\emptyset$。设 $z\in[x]_C\cap D_i$，由 $[x]_C\cap[y]_C=\emptyset$ 可知 $z\notin[y]_C\cap D_i$。又 $z\in[x]_C$，有 $\alpha(z,y)=\alpha(x,y)$，又因 $i\neq k$，故 $f(z,d)\neq f(y,d)$。

由证明1)可知 $A\cap\alpha(z,y)\neq\emptyset$，从而有 $A\cap\alpha(x,y)\neq\emptyset$。于是由证明1)、2)可知 A 是分布协调集。

推论2 设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 是决策表，$A\subseteq C$，若 A 是 λ 约简，则存在 $B\subseteq A$，使得 B 是 S 的分布约简。

4 基于属性频率的 λ 约简算法

基于粗糙集理论的约简算法大多是从核开始的，核的计算可用区分矩阵、逻辑运算和差别表等方法[15]，其中用区分矩阵计算是最常用的方法。针对 λ 约简，求核实际上就是计算一个属性子集，其中的每个属性都是某两个属于不同决策类对象的唯一不同的条件属性。

为了计算信息系统的约简，王珏等[9]根据区分矩阵中属性出现的频率定义属性的重要性，进而提出了启发式约简算法。本节将基于属性频率的属性重要度刻画方法应用于 λ 约简的计算，针对 λ 约简的区分矩阵，提出一种求 λ 约简的启发式算法。

设 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$ 是一个决策表。对于 λ 约简，根据协调集判定定理，定义区分矩阵为 $M=(m_{ij})$，其中对于任意 $x,y\in U$，若 $f(x,d)\neq f(y,d)$ 且 $\alpha(x,y)\neq\emptyset$，则 $m_{ij}=\alpha(x,y)$，否则 $m_{ij}=\emptyset$。

下面给出基于区分矩阵中属性频率的 λ 约简算法，如算法1所示。

算法1 基于属性频率的 λ 约简算法

输入：决策表 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$

输出：约简 Red

步骤1 计算决策表的区分矩阵 M。

步骤2 $R=core(C)$，其中对于任意 $a\in C$，$a\in core(C)$ 当且仅当存在 $m_{ij}\in M$ 使得 $m_{ij}=\{a\}$。

步骤3 $Q=\{m_{ij};m_{ij}\cap R\neq\emptyset,i\neq j\wedge i,j=1,2,\cdots,n\}$，$M=M-Q$。

步骤4 若 $M=\emptyset$，则算法终止，输出 R；否则转步骤5。

步骤5 在 $C-R$ 中选择属性 a，使得 a 在 M 中出现的频率达到最大值，如果有多个属性 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$ 达到最大，则选择与 R 中属性的属性值组合数目最少的 a_j。其中属性 a 在 M 中出现的频率 P(a) 定义为：

$$P(a)=\frac{|\{m_{ij};a\in m_{ij},m_{ij}\in M\}|}{|\{m_{ij};m_{ij}\in M\}|}$$

步骤6 $R=R\cup\{a_j\}$，转步骤3。

例1 针对决策表1中的 $S=(U,C\cup\{d\},V,f)$，利用 λ 约简算法求其约简。

表1 一个决策表

	a	b	c	d	D
o_1	0	0	1	1	0
o_2	1	0	1	2	0
o_3	2	1	2	0	1
o_4	2	1	2	0	2
o_5	1	2	2	1	2
o_6	1	2	2	1	1
o_7	0	1	3	2	1
o_8	0	1	3	2	0

首先针对决策表按 λ 协调集判定定理计算区分矩阵 M，如表2所列。

表2 区分矩阵

	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8
o_1	∅							
o_2	∅	∅						
o_3	*abcd*	*abcd*	∅					
o_4	*abcd*	*abcd*	∅	∅				
o_5	*abc*	*bcd*	*abd*	∅	∅			
o_6	*abc*	*bcd*	∅	*abd*	∅	∅		
o_7	*bcd*	*abc*	∅	*acd*	*abcd*	∅	∅	
o_8	∅	∅	*acd*	*acd*	*abcd*	*abcd*	∅	∅

通过区分矩阵 M，判断为无核的情况，跳过步骤2。M 中出现的属性组合中的属性为 a,b,c,d，对应的频率分别是 $P(a)=15/18$，$P(b)=15/18$，$P(c)=16/18$，$P(d)=15/18$。根据步骤5，先将 c 加入 R，得到 $R=\{c\}$，并从区分矩阵 M 中删除 $abcd,abc,bcd,acd$（因为它们包含了 c），从而在区分矩阵中 $M-Q=\{abd\}$，用同样的方法跳回到步骤5，出现的属性为 a,b,d，对应的频率均为1。因为属性 a,b,d 的出现频率均达到最大，而属性 b 与 R 中属性的属性值组合数目最少，所以将 b 加入 R 得到 $R=\{c,b\}$。返回步骤3，此时 $M=\emptyset$。因此所求约简为 $\{c,b\}$。

结束语 信息系统知识约简与规则获取是粗糙集理论的重要研究方向，对决策表基于相对不可区分关系的约简研究是非常有意义的。本文针对决策表中的多种约简标准，研究了约简之间的相互关系，证明了在完备决策表中 λ 协调集是最大分布协调集，也是分布协调集，进而刻画了 λ 约简与最大分布约简、分布约简之间的相互关系。针对 λ 约简，本文基于属性频率设计了一种启发式约简算法，并通过实例验证了该算法的可行性与有效性。

参考文献

[1] PAWLAK Z. Rough set[J]. International Journal of Computer and Information Science,1982,11:341-356.

[2] PAWLAK Z. Rough set approach to multi-attribute decision analysis[J]. European Journal of Operational Research,1993,72:443-459.

[3] KRYSZKIEWICZ M. Comparative studies of alternative type of knowledge reduction in inconsistent systems[J]. Internatonal Journal of Intelligent Sytems,2001,16(1):105-120.

[4] 张文修,米据生,吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机学报,2003,26:12-18.

[5] ZHANG W X,MI J S,WU W Z. Approaches to knowledge reductions in inconsistent systems[J]. International Journal of Intelligent Systems,2003,18:989-1000.

[6] 王国胤,于洪,杨大春. 基于条件信息熵的决策表约简[J]. 计算机学报,2002,25(7):759-766.

[7] QIN K Y,JING S H. The attribute reductions based onindiscernibility and discernibility relations[C]//Proceedings of 2017 International Joint Conference on Rough Sets. Heidelberg:Springer International Publishing AG,2017:306-316.

[8] SKOWRON A,RAUSZER C. The discernibility matrices and functions in information systems[M]. R. Slowinski(Ed.),Intelligent Decision Support,Handbookof Applications and Advances of the Rough Sets Theory,Kluwer,Dordrecht,1992.

（下转第142页）

升 ACS 算法求解 TSP 问题的效率。这两种方案是今后对 ACS 算法优化研究的主要方向。同时在实验过程中,我们注意到迭代次数、启发因子等主要参数的设定对于 ACS 算法的求解精度有着较大的影响。在较低的迭代次数下,例如迭代次数仅设定为一次,算法所得路径具有大量交叉,且远远偏离最优路径,仅利用 2-opt 策略是无法较好处理这种情况的,但迭代数过高又会导致求解时间过长。采用混合诸如 PSO 算法、GA 算法的启发式算法,可优化参数设定、降低算法迭代次数,这也是 ACS 算法与 ACO 系列算法理组合优化问题的研究方向之一。

参 考 文 献

[1] BEKTAS T. The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures [J]. Omega, 2006, 34(3): 209-219.

[2] DHAMMPAL R, SANJAY K, PATLE V K. Route optimisation by ant colony optimisationtechnique [J]. Procedia Computer Science, 2016(92): 48-55.

[3] ZHANG Z, YAO Y S, ZHANG J H. Algorithm evolution from traveling salesman problem to vehicle routing problem [J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 411: 1872-1875.

[4] SAVURAN H, KARAKAYA M. Efficient route planning for an unmanned air vehicle deployed on a moving carrier [J]. Soft Computing, 2016, 20(7): 2905-2920.

[5] GIBSON B, WILKINSON M, KELLY D. Let the pigeon drive the bus: pigeons can plan future routes in a room [J]. Animal Cognition, 2012, 15(3): 379-391.

[6] 严晨,王直杰. 以 TSP 为代表的组合优化问题研究现状与展望[J]. 计算机仿真, 2007, 24(6): 171-174.

[7] HOLLAND J H. Adaption in natural and artificial system[J]. Ann Arbor, 1975, 6(2): 126-137.

[8] SHABANPOUR M, YADOLLHI M, HASANI M M. A new method to solve the multi traveling salesman problem with the combination of genetic algorithm and clustering technique[J]. International Journal of Computer Science and Network Security, 2017, 17(5): 221-230.

[9] AVSAR B, ALIABADI D E. Parallelized neural network system for solvinge uclidean traveling salesman problem [J]. Applied Soft Computing, 2015, 34(1): 862-873.

[10] BALI O, ELLOUMI W, ABRAHAM A, et al. GPU PSO and ACO applied to TSP for vehicle security tracking [J]. Journal of Information Assurance and Security, 2016, 11(6): 369-384.

[11] EZUGWU A E S, ADEWUMI A O, FRINCU M E. Simulated annealing based symbiotic organisms search optimization algorithm for traveling salesman problem [J]. Expert Systems with Applications, 2017, 77: 189-210.

[12] DORIGO M. Ant Colony Optimization [M]. Cambridge: MIT Press, 2004.

[13] COLORNI A, DORIGO M, MAFFIOLI F. Heuristics from nature for hard combinatorial optimization problems [J]. International Transactions in Operational Research, 1996, 3(1): 1-21.

[14] DORIGO M, GAMBARDELLA L M. Ant colony system: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem [J]. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 1997, 1(1): 53- 66.

[15] BAI J, YANG G K, CHEN Y W, et al. A model induced max-min ant colony optimization for asymmetric traveling salesman problem [J]. Applied Soft Computing, 2013, 13(3): 1365-1375.

[16] DORIGO M, MANIEZZO V, COLORNI A. The ant system: optimization by a colony of cooperating agents [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernettics-Part B, 1996, 26(1): 1-13.

[17] CROES G A. A menthod for solving traveling salesman problems [J]. Operations Research, 1958, 6(6): 791-812.

[18] TONG Z, XIAO Z, LI K, et al. Proactive scheduling in distributed computing-A reinforcement learning approach[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2014, 74(7): 2662-2672.

[19] AlEXANDER L S, LI L H, ERIC W, et al. Pac model-free reinforcement learning [C]// Proceeding of International Conference on Machine Learning. 2006: 881-888.

[20] CARLOS R, CSABA S. Q-learning combined with spreading: convergence and results [C]// Proceedings of the ISRF-IEE International Conference: Intelligent and Cognitive Systems (Neural Networks Symposium). 1996: 32-36.

[21] 黄瀚,郝志峰,吴国春,等. 蚁群算法的收敛速度分析 [J]. 计算机学报, 2007, 30(8): 1344-1353.

[22] REINELT G. TSPLIB-A traveling salesman problem library [J]. ORSA Journal on Computing, 1991, 3(4): 376-384.

(上接第 112 页)

[9] 王珏,王任,苗夺谦,等. 基于 Rough Set 理论的数据浓缩[J]. 计算机学报, 1998(5): 393-400.

[10] 苗夺谦,胡桂荣. 知识约简的一种启发式算法[J]. 计算机研究与发展, 1999(6): 681-684.

[11] 贾平,代建华,潘云鹤,等. 一种基于互信息增益率的新属性约简算法[J]. 浙江大学学报, 2006(6): 1041-1045.

[12] LI M, SHANG C X, FENG S Z, et al. Quick attribute reduction in inconsistent decision tables[J]. Information Sciences, 2014, 254: 155-180.

[13] CHEN D, WANG C, HU Q. New approach to attribute reduction of consistent and inconsistent covering decision systems with covering rough sets [J]. Information Sciences, 2007, 177(17): 3500-3518.

[14] ZHAO Y, YAO Y Y, LUO F. Data analysis based on discernibility andindiscernibility [J]. Information Sciences, 2007, 177(22): 4959-4976.

[15] 张小红,裴道武,代建华. 模糊数学与 rough 集理论[M]. 北京:清华大学出版社, 2013: 264-265.