

# 基于 PageRank 和谱方法的个性化推荐算法

常家伟 戴壮红

(湖南大学信息科学与工程学院 长沙 410082)

**摘要** 传统的 PageRank 推荐算法的可扩展性较差。针对这一问题,提出融合 PageRank 和谱方法的个性化推荐算法。通过在 PageRank 算法迭代过程中加入候选集节点数来控制迭代的次数,同时利用阈值来修剪参与迭代的节点个数,从而得到候选节点集;采用谱聚类对候选集进行排序,归一化候选节点邻接矩阵,使用矩阵的特征值与特征向量来评估图中节点与目标节点之间的距离,从而产生最终的推荐列表。实验结果表明,所提推荐算法在保证推荐质量的前提下,提高了处理效率。

**关键词** 推荐系统, PageRank, 谱聚类

**中图法分类号** TP311.5 **文献标识码** A

## Personalized Recommendation Algorithm Based on PageRank and Spectral Method

CHANG Jia-wei DAI Mu-hong

(College of Information Science and Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract** Traditional PageRank recommendation algorithm is less scalable. To solve this problem, a personalized recommendation algorithm based on PageRank and spectral method was proposed. The number of iterations is controlled by adding the number of nodes in the PageRank algorithm to obtain the candidate set, threshold is used to trim the number of nodes participating in the iteration to get the candidate node set. Spectral clustering is utilized to sort the candidate nodes. The candidate node adjacency matrix is normalized, and eigenvalues and eigenvectors of matrices are used to evaluate the distance between nodes and target nodes in a graph. At last, a final list of recommendations is produced. Experimental results show that the proposed recommendation algorithm improves the processing efficiency on the premise of ensuring the recommendation quality.

**Keywords** Recommendation system, PageRank, Spectral clustering

## 1 引言

互联网的飞速发展,给人们带来了丰富多彩的信息,同时也给用户在海量信息中找到自己真正需要的信息增添了很大的难度。在这种情况下,推荐系统应运而生。推荐系统可以根据用户的行为习惯以及兴趣爱好,向用户推荐有价值的信息,在很大程度上解决了“信息过载”<sup>[1]</sup>的难题。推荐系统<sup>[2]</sup>自诞生以来,已经衍生出了很多推荐算法,按照模型可以分为基于最近邻模型的推荐算法、基于隐因素模型的推荐算法和基于图模型的推荐算法。随着社交网络的不断发展,基于图模型的推荐算法的思想已广泛应用于推特、微博等社交网络服务中。网络中的每个网页可被看成一个节点,节点之间通过超链接互相连接,互联网不计其数的节点就构成了一张超大的图。基于这种思想,斯坦福大学计算机学院的研究生 Page<sup>[3]</sup>和 Brin 提出了一种用来衡量网络图中特定节点相对于其他节点的重要性的 PageRank 算法。PageRank 的原理简单且效果显著。在 PageRank 思想的基础上,通过引入个性化推荐的思想, Haveliwal<sup>[4]</sup>于 2002 年提出了一种基于图的推荐算法,即基于 PageRank 的推荐算法,该算法能够个性化地对物品进行排序,以生成推荐列表。但是,该算法沿用了 PageRank 的原理,需要经过多次全图迭代<sup>[5]</sup>,直到各个 PageRank 值节点收敛,当网络图非常大时,算法的时间复杂度非

常高,算法的运行耗时增多,从而导致时间效率变得非常低。因此,本文对基于图的推荐算法的时间复杂度问题做了研究,提出了一种基于改进的 PageRank 和谱聚类的推荐算法。希望通过得到的候选集节点数来控制迭代的次数,同时利用阈值来修剪参与迭代的节点个数,从而得到候选节点集,然后应用谱聚类的思想对候选集进行排序,进而进行推荐。

## 2 相关工作

近年来,混合推荐技术、基于内容的推荐算法和协同过滤算法<sup>[6-7]</sup>等受到了学术界的广泛关注。随着用户和需要推荐的商品数量的急剧增加,传统的推荐算法的缺陷逐渐体现出来,比如冷启动、数据稀疏性和时间复杂度等。本文主要讨论算法的时间复杂度问题。针对这个问题,很多专家学者都给出了不同的解决办法。王成等<sup>[8]</sup>于 2016 年提出在协同过滤算法中建立项目-用户倒查表,避免了传统方法中针对所有用户计算用户相似度的庞大工作量。Vinodhini 等<sup>[9]</sup>在 Hadoop 上建立的个性化推荐系统模型也提高了推荐的时间效率。Rodrigues 等<sup>[10]</sup>提出了基于聚类的混合过滤方法,采用了基于物品和基于用户的协同过滤算法相结合的聚类加权机制,该机制具有自适应和可扩展性,一定程度上提高了推荐效率。Liao 等<sup>[11]</sup>提出了一种自我构建聚类算法来降低与商品数量相关的维度,从而减少了处理时间。上述研究各有侧重,并且

本文受湖南省自然科学基金(2015JJ2027)资助。

常家伟(1992—),男,硕士生,主要研究方向为数据挖掘, E-mail: 1106573682@qq.com; 戴壮红(1964—),男,硕士生,研究员,主要研究方向为数据科学, E-mail: dmh@hnu.edu.cn(通信作者)。

都在各自侧重的方面提升了算法在时间复杂度上的表现。但是,对于基于图的推荐算法的时间复杂度问题,却没有太多的研究成果。于是,本文提出了一种基于改进的 PageRank 和谱聚类的推荐算法,该算法对基于传统的图的推荐算法进行了改进,降低了时间复杂度,提升了时间效率。

### 3 融合 PageRank 和谱方法的推荐算法

#### 3.1 传统的 PageRank 推荐算法

传统的 PageRank 推荐算法可以看成是一种个性化的 PageRank 算法,即预先给每个节点一个 PageRank ( $PR$  值)<sup>[12-13]</sup>,一个节点的  $PR$  值等于所有链接到该节点的  $PR$  值之和。将网页节点之间的链接关系表示成一个有向图  $G=(V,E)$ ,其中  $V$  代表图  $G$  中的顶点集, $E$  代表图  $G$  中的边集。在算法中将目标节点  $u$  的  $PR$  初始值设为 1,而其他节点的  $PR$  值都设为 0,表明每次迭代都是从目标节点出发的。综上,基于 PageRank 的推荐算法公式可以表示为:

$$PR_i = (1-d)r_i + d \sum_{j \in in(i)} \frac{PR_j}{Out_j}, r_i = \begin{cases} 1, & i=u \\ 0, & i \neq u \end{cases} \quad (1)$$

其中, $PR_i$  表示第  $i$  个网页节点的 PageRank 值; $r_i$  表示初始向量; $in(i)$  代表指向节点  $i$  的节点集合; $Out_i$  表示网页节点  $i$  的出度; $u$  代表根节点,即目标用户节点。由于存在一些节点的出链为 0(这些节点称为孤立网页节点),会导致等级泄露的情况,造成  $PR$  值往某些节点聚集,从而影响排名的准确性。于是,引入了阻尼因子  $d$ , $d$  为 0 到 1 之间的一个常数,常置为 0.85。

假定  $P=(PR_1, PR_2, \dots, PR_n)^T$  为图中  $n$  维的  $PR$  值向量<sup>[14]</sup>, $M$  为图  $G$  所对应的转移矩阵。 $n$  个节点迭代就可表示成矩阵相乘: $P=M^T P$ ,迭代到收敛。判断基于 PageRank 的推荐算法是否收敛一般会设定一个差值指标,通常设为 0.0001。当所有的页面和上一次迭代的  $PR$  差值小于该标准时,则收敛。基于 PageRank 的推荐算法的迭代过程可以简单描述为:

Step1  $v=r$ (从  $r$  向量开始);

Step2  $w=Mv$ ;

Step3 判断迭代是否收敛,若不收敛,则:(a) $v=w$ ;(b) $w=Mv$ ;

Step4 以  $v(i)$  值非递增排序,并按此顺序输出。

#### 3.2 改进的 PagRank 算法

由于传统的 PageRank 推荐算法需要全图迭代到收敛,因此其时间复杂度非常高,严重影响了推荐的效率。本文在 PageRank 的基础上提出了一种改进的 PageRank 算法,在传统的基于 PageRank 的推荐算法的迭代过程中加入了可以控制迭代次数的参数  $b$ (为了保证算法的推荐质量,一般设为 1000)和一个用于修剪结果向量的阈值  $\alpha$ <sup>[15]</sup>,令  $\alpha = \frac{\epsilon}{2b}$ ,其中  $0 < \epsilon < 1$ 。为了避免无限循环,设置  $\alpha < \frac{1}{b}$ 。令  $q$  为第一次迭代后  $PR$  值不为 0 的节点数量。改进的 PageRank 算法过程如下:

首先,把  $r$  作为起始向量,通过转移矩阵  $M$  迭代,然后对迭代得到的节点进行判断,当得到的节点个数少于希望推荐的个数  $b$ ,并且算法不满足收敛条件时,算法继续迭代。同时,在每次迭代结束后,对集合中的每个节点做判断,若  $PR < \alpha$ ,则令其为 0。这是为了减少在迭代过程中对实际结果影响很小的节点参与迭代,降低了算法的时间复杂度。最后,将得到的  $b$  个希望推荐的节点保存为一个候选节点集。

改进的推荐算法的具体步骤如算法 1 所示。

#### 算法 1 改进的 PagRank 算法

输入:网络图  $G$ ,需要推荐的项目个数  $b$

输出:节点个数为  $b$  的候选集

1.  $v=r$  ( $r$  为起始)。

2.  $w=Mv$ 。

3. 当  $(PR \text{ 不为 } 0 \text{ 的节点个数} \leq b+q)$  and  $(\text{dist}(v,w) > 0.0001)$  时:

3.1.  $v=w$ 。

3.2.  $w=Mv$ 。

3.3. 对于每个顶点集  $V(G)$  中的每个节点  $i$ : 当  $w[i] \leq \alpha$  时,  $w[i]=0$ 。

3.4. 归一化  $w$ 。

通过以上算法描述过程可以看出,算法的迭代时间不取决于全图,而是基于希望得到候选集的节点数,并且用阈值  $\alpha$  控制了参与迭代的节点数,进一步减少了算法耗时。

#### 3.3 谱方法

谱聚类建立在图论中的谱图理论<sup>[16]</sup>基础上,其本质是将聚类问题转化为图的最优划分问题,是一种点对聚类算法,在数据聚类方面有很好的应用前景。现阶段已经存在多种聚类算法的研究。Verma<sup>[17]</sup>将谱方法分为两个重要的集合:1)递归光谱,根据单个特征向量将数据分割成两个集合,并通过递归产生指定数量的簇;2)多路光谱,使用隐藏在多个特征向量中的信息,以便将数据直接分割成指定数量的簇。Shi 等研究得出了递归频谱思想<sup>[18]</sup>,同时 Kannan 等提出了多路光谱方法<sup>[19]</sup>。本文利用谱聚类的思想来计算推荐算法的相似性度量都是谱图领域的重要成果。因此,本文计划使用归一化的邻接矩阵的特征值与特征向量来评估节点之间的距离。为了给目标用户最为近似的节点,我们根据邻接矩阵的特征值和特征向量来计算节点之间距离的相似性度量。假设  $A$  为图的邻接矩阵, $D$  为对角度矩阵,对于节点  $i$ ,  $D[i, i] = \text{deg}(i)$ 。算法的详细描述如下:

Step1 计算  $P=D^{-1}A$ 。

Step2 令  $1=\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  为  $P$  的特征值,计算  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r$  的对应特征向量  $v^2, v^3, \dots, v^r$ 。

Step3 为每个特征向量找到一组权重  $c_2, \dots, c_r$ 。直观地,如果  $\lambda_i \leq 0$ ,则  $c_i = 0$ ;如果  $\lambda_i > 0$ ,则  $c_i = f(\lambda_i)$ 。其中, $f(x)$  是增长的凸函数,如  $f(x) = x^2$ 。

Step4 任何节点  $j$  和目标节点  $w$  的差异性  $d_j(w) = |v^j(j) - v^j(w)|$ 。

Step5 以  $q_j = \sum_{2 \leq i \leq r} c_i d_j(w)$  的非递减顺序对结果进行排序,并以该顺序输出推荐的结果。

#### 3.4 算法流程

整个算法分为改进的 PageRank 算法和谱方法两个阶段。

1)根据 3.2 节中提出的改进的 PageRank 算法,通过输入需要推荐的节点个数得到一个基于原图的候选集。

2)通过 3.3 节提出的谱方法,根据邻接矩阵的特征值与特征向量计算出候选集中节点之间的相似性度量,并与目标节点进行对比,然后根据节点与目标节点的差异性进行排序,以非递减顺序输出推荐结果。算法的基本流程如图 1 所示。

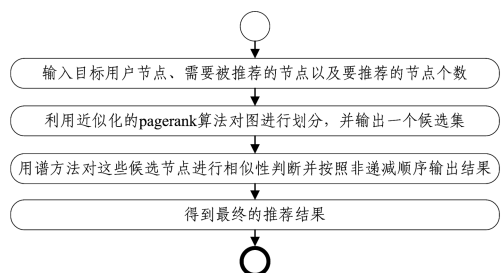


图 1 基于 PageRank 和谱方法的推荐算法流程

## 4 实验分析

### 4.1 实验数据及实验环境

本文的实验环境为一台 PC 机,配置为 Intel Corei7-7700HQ 处理器,主频为 2.80 GHz,内存为 16 GB,操作系统为 Windows 10,采用 Anaconda 开发环境,其包含了 180 多个科学包及其依赖项,实验代码使用 Python 语言撰写。数据集采用 MovieLens 电影数据集,该数据集包含了 670 多个用户,超过 700 部电影,10 万多个电影评论,评论信息包括用户 ID、电影 ID、评分、评论时间,评分区间为[1,5],分数越高表示用户对这部电影的喜爱程度越深,并且数据集中每个用户至少对 10 部电影进行了评分。

### 4.2 度量指标

本文采用准确率和召回率来验证算法的 Top-N 推荐的准确性,采用覆盖率来验证算法挖掘长尾商品的能力,同时通过运行时长来比较算法的时间复杂度。

1)Top-N 推荐即为给用户一个前 N 个喜好物品的推荐列表,一般通过准确率(Precision)和召回率(Recall)度量。准确率和召回率越高,说明算法的推荐质量越好。

准确率:

$$Precision = \frac{\sum_{u \in U} |R(u) \cap T(u)|}{\sum_{u \in U} |R(u)|} \quad (2)$$

召回率:

$$Recall = \frac{\sum_{u \in U} |R(u) \cap T(u)|}{\sum_{u \in U} |T(u)|} \quad (3)$$

其中, $R(u)$ 是根据用户训练集中的行为给出的推荐列表, $T(u)$ 是根据用户在测试集中的行为给出的推荐列表。

2)运行时间。算法运行时间的长短可以体现出算法的时间复杂度。

### 4.3 实验结果分析

将本文提出的算法(FPSM)与传统的 PageRank 推荐算法(PR)和基于用户的协同过滤推荐算法(userCF)、基于物品的协同过滤算法(itemCF)在数据集上进行准确率、召回率以及运行时间的比较。随机选取 20% 的数据集作为测试集,剩余 80% 的数据集作为训练集。为了验证本文提出算法的有效性,进行了 3 个实验。

实验 1 在同一个数据集上对运行时长进行比较

本实验比较传统的 PagRank 推荐算法(PR)和本文提出的 FPSM 算法的运行时长。表 1 列出了两种算法在同一个数据集上的运行时长,单位为秒(s)。从表 1 中可以看出,在同一个数据集上,本文提出的 FPSM 算法的运行时长明显短于传统的 PageRank 推荐算法(PR)。

表 1 两种算法运行时长的对比

算法	运行时长/s
PR	673.443
FPSM	25.149

由实验可知,本文提出的 FPSM 算法相对于传统的 PageRank 推荐算法明显提升了时间效率。

实验 2 在不同推荐个数 N 时进行准确率的比较

本实验基于相同的数据集,按照不同的推荐个数 N,对传统的 PagRank 推荐算法(PR)、基于用户的协同过滤推荐算法(userCF)、基于物品的协同过滤推荐算法(itemCF)和本文提出的 FPSM 算法的准确率进行比较,结果如图 2 所示。从

图中展示的实验结果可以看出,本文提出的 FPSM 在不同的推荐个数 N 时均获得了最高的推荐精度,其次是 userCF, itemCF 和 PR 方法。

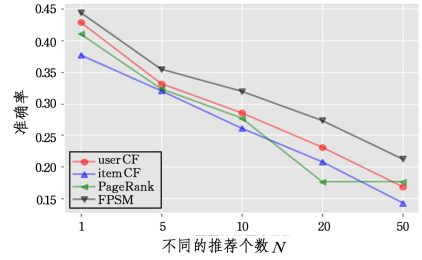


图 2 4 种算法在不同推荐个数 N 时准确率的对比

由实验结果可知,在不同的推荐个数下,相比于其他 3 种算法,本文提出的 FPSM 算法在准确率方面有所提高。

实验 3 分别在不同推荐个数 N 下进行召回率的比较

本实验基于同一个数据集,在不同推荐个数 N 时对传统的 PageRank 推荐算法(PR)、基于用户的协同过滤推荐算法(userCF)、基于物品的协同过滤推荐算法(itemCF)和本文提出的 FPSM 算法的召回率进行比较,结果如图 3 所示。从图中可以看出,本文提出的 FPSM 方法除了在推荐个数为 20 时的召回率略低于 PR 方法外,在推荐个数 N 为其他值时的召回率均较高。

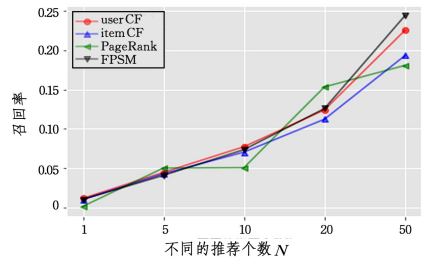


图 3 4 种算法在不同推荐个数 N 时召回率的对比

当推荐个数 N 在 20~50 之间时,召回率增长较快。伴随着推荐个数 N 的增加,本文提出的 FPSM 算法的召回率升高。

由实验可知,在不同的推荐个数下,相比于其他 3 种算法,本文提出的 FPSM 算法在召回率平均值方面表现更好。

**结束语** 传统的基于 PageRank 的推荐算法在推荐系统中被广泛使用,已在各种商业场合得到应用,但是随着用户数量和物品数量的增加,推荐效率不高的问题愈发明显。因此,本文提出了一种融合 PageRank 和谱方法的个性化推荐算法,对 PageRank 算法进行改进并得到一个候选集,再根据谱聚类思想对候选集中的节点与目标用户进行比较并排序,从而得出推荐结果。经过实验验证,对比传统的 PageRank 推荐算法,本文算法在时间效率和推荐质量方面都有了明显的提升;对比 itemCF 和 userCF 算法,其在推荐质量方面也有所提升。在接下来的工作中,我们会进一步优化算法,提升推荐质量。

## 参考文献

- [1] 阮光册,夏磊. 互联网推荐系统研究综[J]. 情报学报, 2015, 34(9):999-1008.
- [2] ADOMAVICIUS G, TUZHILIN A. Toward the next generation of recommender systems: A survey of the state-of-the-art and possible extensions[J]. IEEE Transactions on Knowledge & Data Engineering, 2005, 17(6):734-749.

- [3] PAGE L. The PageRank citation ranking: Bringing order to the web[J]. Stanford Digital Libraries Working Paper, 1998, 9(1): 1-14.
- [4] HAVELIWALA T H. Topic-Sensitive PageRank: A Context-Sensitive Ranking Algorithm for Web Search[J]. IEEE Educational Activities Department, 2003, 15(4): 784-796.
- [5] TONG H H, FALOUTSOS C, PAN J Y. Fast Random Walk with Restart and Its Applications[C]// Proceedings of the Sixth International Conference on Data Mining (ICDM 06). IEEE Computer Society, 2006: 613-622.
- [6] HERLOCKER J L, KONSTAN J A, TERVEEN L G, et al. Evaluating collaborative filtering recommender systems [J]. 2004, 22(1): 5-53.
- [7] BOBADILLA J, SERRADILLA F. A new collaborative filtering metric that improves the behavior of recommender systems [J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23(6): 520-528.
- [8] 王成, 朱志刚, 张玉侠, 等. 基于用户的协同过滤算法的推荐效率和个性化改进[J]. 小型微型计算机系统, 2016, 37(3): 428-432.
- [9] VINODHINI S, RAJALAKSHMI V, GOVINDARAJULU B. Building Personalised Recommendation System With Big Data and Hadoop Mapreduce [J]. Metabolism Clinical & Experimental, 2009, 58(1): 38-46.
- [10] RODRIGUES C M, RATHI S, PATIL G. An efficient system using item & user-based CF techniques to improve recommendation[J]. International Conference on Next Generation Computing Technologies, 2017, 10(1): 569-574.
- [11] LIAO C L, LEE S J. A clustering based approach to improving the efficiency of collaborative filtering recommendation [J]. Electronic Commerce Research & Applications, 2016, 18: 1-9.
- [12] FERNÁNDEZ P. Google's pagerank and beyond: The science of search engine rankings [J]. Mathematical Intelligencer, 2008, 30(1): 68-69.
- [13] BRIN S, PAGE L. The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine[J]. International Conference on World Wide Web, 1998, 56(18): 107-117.
- [14] ANDERSON R, FAN C, LANG K. Local Graph Partitioning using PageRank Vectors[J]. IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2006, 47(5): 475-486.
- [15] SPIELMAN D, TENG S H. Nearly-linear time algorithms for graph partitioning, graphsparsification, and solving linear systems[J]. Data Structures and Algorithms, 2004, 2(3): 81-90.
- [16] FERRAGINA P. A personalized search engine based on web-snippet hierarchical clustering [J]. Software Practice & Experience, 2010, 38(2): 189-225.
- [17] VERMA D, MEILA M. A comparison of spectral clustering algorithms[D]. Washington: University of Washington, 1997.
- [18] SHI J, MALIK J. Normalized cuts and image segmentation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8): 888-905.
- [19] KANNAN R, VEMPALA S, VETA A. On clusterings-good, bad and spectral[C]// Proceedings of the IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2000: 367-377.

(上接第 397 页)

系统, 主要借助 Matlab R2016a 作为实验平台, 利用了改进的双混沌算法, 结合了分数阶 Fourier 变换将时域和空间域特性连接的最优解序列的分数阶 Fourier 的双混沌算法。改进算法先采用 Henon 混沌对像素点进行迭代, 通过置乱操作得到加密箱, 加密箱与行阵进行矩阵乘法后对  $x$  方向进行  $\alpha$  阶 DFRFT 变换, 再与列阵相乘后进行  $y$  方向上的  $\beta$  阶 DFRFT 变换, 得到的图像与 Hilbert 梯度图像进行 Henon 映射, 从而得到加密图像。Logistic 映射通过异或运算得到加密图像, Hilbert 梯度图的选取是利用穷举法解背包问题的最优解的排序, 文中序列为给定的已得的最优解。该算法解决了传统的自然系统在单一领域内使用某一方法而削减了参量导致系统结构简单、易被攻击、安全性的问题。改进算法的密钥空间变大、计算冗乱度较低、敏感性强、安全性级别高, 在图像传输方面具有先进性。综上, 该算法不仅有很好的加密效果, 而且有非常强的抗破译能力。

## 参 考 文 献

- [1] ADLEMAN L M. Molecular Computation of Solutions to Combinatorial Problems [J]. Science, 1994, 266(5187): 1021-1024.
- [2] 黄冬梅, 耿霞, 魏立斐. 基于 Henon 映射的加密遥感图像的安全检索方案 [J]. 软件学报, 2016, 27(7): 1729-1740.
- [3] 赵国敏, 李国东. 基于广义 Henon 映射以及 CNN 超混沌系统图像加密方案 [J]. 信阳师范学院学报自然科学版, 2015, 15(1): 141-145.
- [4] 黄清梅, 李国东. 基于 CNN 超混沌特性对图像加密技术的应用研究 [J]. 绵阳师范学院学报, 2017, 2(2): 60-66.
- [5] 谢国波, 杨彬. 基于比特置乱的量子混沌图像加密算法[J]. 计算机工程, 2017, 43(7): 182-186.
- [6] 谢国波, 王添. 基于像素置乱和比特替换的混沌图像加密算法 [J]. 微电子学与计算机, 2016, 33(3): 80-85.
- [7] 徐兵, 袁立. 基于改进 Logistic 混沌映射的数字图像加密算法研究 [J]. 计算机测量与控制, 2014, 22(7): 165-167.
- [8] 郭伟创, 叶瑞松. 一种基于猫映射和伯努利移位映射的图像加密算法 [J]. 汕头大学学报(自然科学版), 2015, 30(1): 13-23.
- [9] 张雪峰, 范九伦. 一种改进的基于混沌系统的数字图像加密算法 [J]. 计算机应用研究, 2007, 24(4): 184-186.
- [10] 郑凡, 田小建, 范文华, 等. 基于 Henon 映射的数字图像加密 [J]. 北京邮电大学学报, 2008, 31(1): 66-70.
- [11] 韩凤英, 李云. 利用复合混沌系统的图像加密方案研究与设计 [J]. 电脑知识与技术, 2010, 6(13): 3450-3452.
- [12] 李凯佳, 俞锐刚, 袁凌云. 基于 DNA-记忆元胞自动机与 Hash 函数的图像加密算法 [J]. 计算机工程与设计, 2017, 38(2): 470-477.
- [13] 廖春成, 周小平, 廖春龙, 等. 像素位置与比特双重置乱的混沌图像加密算法 [J]. 中国科技论文, 2014(1): 112-116.
- [14] WANG X Y, WANG T. A novel algorithm for image encryption based on couple chaotic systems [J]. International Journal of Modern Physics B, 2012, 26(30): 395.
- [15] GANESAN K, MURALI K. Image encryption using eight dimensional chaotic cat map [J]. European Physical Journal Special Topics, 2014, 223(8): 1611-1622.
- [16] CHENG P, YANG H, WEI P, et al. A fast image encryption algorithm based on chaotic map and lookup table [J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 79(3): 2121-2131.
- [17] LI G D, WANG L L. Double chaotic image encryption algorithm based on optimal sequence solution and fractional transform[J]. Visual Computer, 2018, 1(1): 1-11.