第46卷 第3期
2019年3月
计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE
Vol.46 No.3
Mar.2019

决策形式背景基于三支决策规则的属性约简

林 洪 秦克云

(西南交通大学数学学院 成都 611756)

摘 要 文中针对决策形式背景研究基于对象导出三支概念格的规则约简问题,提出了三支决策规则、必要决策规则的概念,并讨论了它们的基本性质。以此为基础,提出了决策形式背景三支规则协调集的概念,给出了三支规则协调集的判定定理,结合区分矩阵和区分函数给出了三支规则约简方法。最后通过实例证明了所提约简方法的有效性。

关键词 决策形式背景,概念格,三支规则协调集,三支规则约简

中图法分类号 TP182 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.03.037

Attribute Reduction for Decision Formal Contexts Based on Three-way Decision Rules

LIN Hong QIN Ke-yun

(College of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China)

Abstract This paper studied the attribute reduction for decision formal context based on three way decision rules induced from three way concept lattice. It proposed the notions of three way decision rules and necessary three way decision rules and discussed their basic properties,presented the concept of consistent set with respect to three way decision rule and examined the judgment theorem for consistent set. Accordingly,based on discernibility matrix and discernibility function,this paper presented the reduction method and an illustrative example.

Keywords Decision formal context,Concept lattice,Three way rule consistent set,Three way rule reduction

1 引言

形式概念分析(Formal Concept Analysis,FCA)也称为概念格理论,由 Wille[1] 于 1982 年提出。形式概念分析基于形式背景展开讨论,形式背景可表示为布尔型二维数据表,其中行表示对象,列表示属性。根据对象与属性之间的关系,可以建立一种概念层次结构,用于概念表示、概念排序及概念推理。概念格理论是一种有效的数据分析工具,在诸多领域得到了广泛应用。

形式背景的属性约简理论和方法作为 FCA 的热门研究内容被学术界广泛关注。通过属性约简可以获得更简洁的知识,并揭示属性之间的依赖关系。Zhang 等[2] 讨论了概念格属性约简问题,给出了协调集的判定定理,通过辨识函数给出了概念格属性约简方法。Liu 等[3] 借助粗糙集理论中的近似算子对形式背景中的对象及属性进行刻画,给出了属性及对象约简方法,并讨论了形式背景基于概念格的约简与信息系统基于粗糙集理论的约简之间的关系。Wu 等[4] 将粒计算方法应用于形式概念分析,讨论了形式背景中的粒结构,提出了粒协调集与粒约简的概念,并给出了粒约简方法,该方法无需构造概念格且直接通过对象的区分属性获得约简。Shao 等[5] 针对模糊形式背景提出了属性和对象约简的方法。李金海等[6] 提出了概念格外延信息量的概念,给出了信息量计算方法并提出了一种启发式属性约简计算方法。魏玲等[7] 从决策规则的角度提出了决策形式背景的强协调性与弱协调性概念,对于强协调决策形式背景给出了协调集的判定定理及约简方法;对于弱协调决策形式背景,通过蕴含映时给出了约简计算方法。Wu 等[4] 提出了粒协调决策形式背景的概念,并通过对象的区分属性矩阵给出粒协调决策形式背景的约简方法。Li 等[8-11] 对决策形式背景基于决策规则的约简问题进行了系统研究,提出了决策规则之间的蕴涵关系、冗余决策规则、必要决策规则等概念,给出了冗余决策规则及必要决策规则的等价描述,借助区分属性给出了决策形式背景保持决策规则的约简方法。Shao 等[12] 借助决策属性建立了概念之间的等价关系,并给出了概念的压缩方法以及决策规则的获取方法。李进金等[13] 通过引入交可约元提出了一种形式背景属性约简方法,并给出了一种概念格生成算法。三支决策是 Yao 于 2009 年提出的以“三分而治”为主要思想的一种有效决策理论[14-16],该理论根据对象特性将所有对象分为 3 个不相交的区域,并对这 3 个区域的对象分别采取适当的策略进行处理。2014 年,Qi 等[17] 将三支决策理论应用于形式概念分析,在形式背景中提出了三支形式概念,并建立了三支概念格。近几年,三支决策思想受到了广泛关注,同时三支决策思想在信息系统中扮演着重要角色,并被应用于计算机科学、信息科学、社会科学等多个领域。由于三支决策和形式概念的广泛应用,三支形式概念分析成为了知识发现和数据分析的重要工具。Ren 等[18] 研究了形式背景基于三支概念格的属

到稿日期:2018-02-01 返修日期:2018-05-29 本文受国家自然科学基金(61473239,61372187)资助。

林 洪(1993-),女,硕士生,主要研究方向为概念格理论;**秦克云**(1962-),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究方向为粗糙集理论、粒计算、多值逻辑,E-mail:keyunqin@263.net(通信作者)。

性约简问题，并分别提出了基于属性与基于对象的 4 种约简概念，给出了约简计算方法。刘琳等[19]给出了决策形式背景在属性导出三支概念格下的规则提取问题。

决策形式背景的属性约简理论与方法是相关领域的热门研究问题。本文针对决策形式背景，提出了决策形式背景三支规则协调集的概念，给出了相关判定定理，并给出了基于三支决策规则的属性约简方法。

2　预备知识

三元组(G,M,I)为一个形式背景。其中，G为对象集，任意$g\in G$，称g为一个对象；M为属性集，任意$m\in M$，称m为一个属性；I表示G和M之间的二元关系，即$I\subseteq G\times M$。对于任意$g\in G,m\in M$，如果$(g,m)\in I$，则表示对象g具有属性m；如果$(g,m)\notin I$，则表示对象g不具有属性m。为刻画形式概念，Wille[1]引入了如下的算子：对于任意$A\subseteq G,B\subseteq M$，有：

$$A^{*}=\{m\in M;\forall a\in A((a,m)\in I)\}\tag{1}$$

$$B^{*}=\{g\in G;\forall b\in B((g,b)\in I)\}\tag{2}$$

A^{*}为A中所有对象具有的公共属性构成的集合，B^{*}为具有B中所有属性的对象构成的集合。对于任意$g\in G,m\in M$，记$\{g\}^{*}=g^{*}$，$\{m\}^{*}=m^{*}$。

定义 1[1]　设(G,M,I)为形式背景，$X\subseteq G,A\subseteq M$。如果$X^{*}=A$且$A^{*}=X$，则称$(X,A)$为概念。其中，$X,A$分别称为$(X,A)$的外延与内涵。

设(G,M,I)为一形式背景。令$L(G,M,I)=\{(X,A);X^{*}=A$且$A^{*}=X\}$。对于任意$(X_1,A_1),(X_2,A_2)\in L(G,M,I)$，定义它们之间的序关系为：$(X_1,A_1)\leqslant(X_2,A_2)$当且仅当$X_1\subseteq X_2$或等价地$A_2\subseteq A_1$。

定理 1[1]　设(G,M,I)为形式背景。$L(G,M,I)$关于$\leqslant$构成完备格，称为概念格，其中对于任意$(X_j,Y_j)\in L(G,M,I),j\in J$（$J$为指标集），有：

$$\bigwedge_{j\in J}(X_j,Y_j)=(\bigcap_{j\in J}X_j,(\bigcup_{j\in J}Y_j)^{**})\tag{3}$$

$$\bigvee_{j\in J}(X_j,Y_j)=((\bigcup_{j\in J}X_j)^{**},\bigcap_{j\in J}Y_j)\tag{4}$$

在形式背景(G,M,I)中，如果对于任意$g\in G,m\in M$，有$g^{*}\neq\varnothing,g^{*}\neq M,m^{*}\neq\varnothing,m^{*}\neq G$，则称$(G,M,I)$为正则形式背景[20]。本文假设所有研究的形式背景均为正则形式背景。

设(G,M,I)为形式背景，$D\subseteq M$。令$I_D=I\cap(G\times D)$，那么(G,D,I_D)也是一个形式背景，称为(G,M,I)的一个子形式背景。为避免混淆，(G,D,I_D)中由式(1)、式(2)定义的算子记为$*_D$。显然，对于任意$A\subseteq G,B\subseteq D$，有$A^{*_D}=A^{*}\cap D$，$B^{*_D}=B^{*}$。

设(G,M,I)，(G,D,J)是具有相同对象集的形式背景。如果$M\cap D=\varnothing$，M和D中的属性分别为条件属性与决策属性，则称$S=(G,M,I,D,J)$为决策形式背景[7]。

2014 年，Qi 等[17]将三支决策理论应用于形式概念分析，提出了三支形式概念。在形式背景(G,M,I)中，对于任意$X\subseteq G,B\subseteq M$，记：

$$X^{\bar{*}}=\{m\in M;\forall x\in X((x,m)\notin I)\}\tag{5}$$

$$B^{\bar{*}}=\{g\in G;\forall b\in B((g,b)\notin I)\}\tag{6}$$

进一步地，对于任意$X\subseteq G,A,B\subseteq M$，记：

$$X^{\lessdot}=(X^{*},X^{\bar{*}})\tag{7}$$

$$(A,B)^{\gtrdot}=\{x\in G;x\in A^{*}\wedge x\in B^{\bar{*}}\}=A^{*}\cap B^{\bar{*}}\tag{8}$$

根据以上算子，Qi 等[17]给出了对象导出三支概念格的定义。

定义 2[17]　设(G,M,I)为一形式背景。对于任意$X\subseteq G$和$A,B\subseteq M$，如果$X^{\lessdot}=(A,B)$且$(A,B)^{\gtrdot}=X$，则称$(X,(A,B))$为一个对象导出三支概念，以下简记为OE概念。其中，X称为$(X,(A,B))$的外延，(A,B)称为$(X,(A,B))$的内涵。

设(G,M,I)为一形式背景，令$OEL(G,M,I)=\{(X,(A,B));X^{\lessdot}=(A,B)$且$(A,B)^{\gtrdot}=X\}$，$V(G,M,I)=\{x\in G;(X,(A,B))\in OEL(G,M,I)\}$。对于任意三支概念$(X,(A,B))$，$(Y,(C,F))\in OEL(G,M,I)$，定义它们之间的序关系为：

$$(X,(A,B))\leqslant(Y,(C,F))\Leftrightarrow X\subseteq Y\Leftrightarrow(C,F)\subseteq(A,B)$$

其中，$(C,F)\subseteq(A,B)$定义为$C\subseteq A$且$F\subseteq B$。

$OEL(G,M,I)$按照此关系构成格，称为对象导出三支概念格，以下简记为OE概念格，其上确界与下确界为：

$$(X,(A,B))\wedge(Y,(C,F))=(X\cap Y,((A,B)\cup(C,F))^{\gtrdot\lessdot}))\tag{9}$$

$$(X,(A,B))\vee(Y,(C,F))=((X\cup Y)^{\lessdot\gtrdot},(A,B)\cap(C,F))\tag{10}$$

对于任意$x\in G$，下文将$\{x\}^{\lessdot}$简记为$x^{\lessdot}$。显然$(x^{\lessdot\gtrdot},x^{\lessdot})=(x^{**}\cap x^{\bar{*}\bar{*}},(x^{*},x^{\bar{*}}))\in OEL(G,M,I)$为一形式概念，且由$x$完全确定，称$(x^{\lessdot\gtrdot},x^{\lessdot})$为三支对象概念。对于$E\subseteq M$，在形式背景$(G,E,I_E)$下，由式(7)、式(8)定义的算子记为$\lessdot_E,\gtrdot_E$。

3　决策形式背景基于三支决策规则的约简

Ren 等[18]提出了三支概念格属性约简理论，本文基于该理论进一步提出了决策形式背景下基于三支概念格的规则约简理论。

3.1　三支决策规则的基本定义与性质

定义 3　设$S=(G,M,I,D,J)$为决策形式背景，$E\subseteq M$，$(X,(A,B))\in OEL(G,E,I_E)$，$(Y,(C,F))\in OEL(G,D,J)$。如果$X\subseteq Y$，且$X,Y,X^{\lessdot_E},Y^{\lessdot_E}$都为非空集，则称$(X,(A,B))\rightarrow(Y,(C,F))$为三支决策规则，简记为$(A,B)\rightarrow(C,F)$。

三支决策规则$(A,B)\rightarrow(C,F)$的直观含义为：如果某对象x具有A中所有属性但不具有B中所有属性，则由$x\in A^{*}\cap B^{\bar{*}}=X\subseteq Y=C^{*}\cap F^{\bar{*}}$可知$x$必具有$C$中所有属性且不具有$F$中所有属性。以下令$OER(E,D)$为所有三支决策规则的集合。

设$S=(G,M,I,D,J)$为决策形式背景，$E\subseteq M$。如果存在$(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)\in OER(E,D)\setminus\{(A,B)\rightarrow(C,F)\}$使得$(A_1,B_1)\subseteq(A,B)$，$(C,F)\subseteq(C_1,F_1)$，则称$(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)$蕴涵$(A,B)\rightarrow(C,F)$，记为$(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)\Rightarrow(A,B)\rightarrow(C,F)$。且称$(A,B)\rightarrow(C,F)$是多余的，否则称$(A,B)\rightarrow(C,F)$是必要的。$OER(E,D)$中所有必要三支决策规则的集合记为$\overline{OER(E,D)}$。若三支决策规则$(A,B)\rightarrow(C,F)$是多余的，则存在三支决策规则$(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)$使得$(A_1,B_1)\subseteq(A,B)$，$(C,F)\subseteq(C_1,F_1)$。因此，按照决策规则的直观含义，$(A,B)\rightarrow(C,F)$提供的决策信息包含于$(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)$提供的决策信息。在这个意义下，$(A,B)\rightarrow(C,F)$是多余的。

定义 4 设 $S=(G,M,I,D,J)$ 为决策形式背景，$E\subseteq M$，称 E 为 S 的一个三支规则协调集，记为 $OER(E,D)\Rightarrow OER(M,D)$，如果对于任意的三支决策规则 $(A,B)\rightarrow(C,F)\in OER(M,D)$，存在三支决策规则 $(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)\in OER(E,D)$，使得 $(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)\Rightarrow(A,B)\rightarrow(C,F)$。$S$ 的极小三支决策规则协调集称为 S 的一个三支决策规则约简。

按照定义 4，如果 E 为 S 的一个三支决策规则协调集，则 $OER(E,D)$ 可以提供 $OER(M,D)$ 包含的决策信息。因此，三支决策规则约简可以保证条件属性约简后三支决策规则提供的信息没有丢失。

3.2 三支决策规则协调集的判定

设 $S=(G,M,I,D,J)$ 为决策形式背景，$E\subseteq M$。记 $V^{\Delta}(G,E,I_E)=\{X\in V(G,E,I_E);X\neq\emptyset,X^{\lessdot_E}\neq\emptyset\}$，$V^{\Delta}(G,D,J)=\{Y\in V(G,D,J);Y\neq\emptyset,Y^{\lessdot_D}\neq\emptyset\}$。

定义映射 $\alpha_E,\beta_E,\gamma_E:V^{\Delta}(G,E,I_E)\times V^{\Delta}(G,D,J)\rightarrow\{0,1\}$：

$$\alpha_E(X,Y)=\begin{cases}1, & \text{若 } X\subseteq Y,\forall X_1\in V^{\Delta}(G,E,I_E),\\ & \text{若 } X\subset X_1 \text{ 则 } X_1\not\subset Y\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

$$\beta_E(X,Y)=\begin{cases}1, & \text{若 } X\subseteq Y,\forall Y_1\in V^{\Delta}(G,D,J),\\ & \text{若 } Y_1\subset Y \text{ 则 } X\not\subset Y_1\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

$$\gamma_E(X,Y)=\begin{cases}1, & \alpha_E(X,Y)=\beta_E(X,Y)=1\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

定理 2 设 $S=(G,M,I,D,J)$ 为决策形式背景，$E\subseteq M$。$(X,(A,B))\in OEL(G,E,I_E)$，$(Y,(C,F))\in OEL(G,D,J)$，且 $(A,B)\rightarrow(C,F)\in OER(E,D)$ 为一个决策规则。$(A,B)\rightarrow(C,F)$ 是多余的当且仅当 $\gamma_E(X,Y)=0$（等价地，$(A,B)\rightarrow(C,F)$ 是必要的当且仅当 $\gamma_E(X,Y)=1$）。

证明：（必要性）假设 $(A,B)\rightarrow(C,F)$ 是多余的。于是存在 $(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)\in OER(E,D)\setminus\{(A,B)\rightarrow(C,F)\}$ 使得 $(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)\Rightarrow(A,B)\rightarrow(C,F)$，因此 $(A_1,B_1)\subseteq(A,B)$ 且 $(C,F)\subset(C_1,F_1)$ 或者 $(A_1,B_1)\subset(A,B)$ 且 $(C,F)\subseteq(C_1,F_1)$。由于 $(X,(A,B))\rightarrow(Y,(C,F))$ 和 $(X_1,(A_1,B_1))\rightarrow(Y_1,(C_1,F_1))$ 都是三支决策规则，因此 $X\subseteq Y,X_1\subseteq Y_1$。若 $(A_1,B_1)\subset(A,B)$ 且 $(C,F)\subseteq(C_1,F_1)$，则由 $(X,(A,B))$ 和 $(X_1,(A_1,B_1))$ 都是三支概念可得 $X\subset X_1$ 且 $X_1\subseteq Y_1\subseteq Y$，因此 $\alpha_E(X,Y)=0$，从而 $\gamma_E(X,Y)=0$。若 $(A_1,B_1)\subset(A,B)$，$(A_1,B_1)\subseteq(A,B)$ 且 $(C,F)\subset(C_1,F_1)$，则由 $(Y,(C,F))$，$(Y_1,(C_1,F_1))$ 都是三支概念可得 $Y_1\subset Y$，且 $X\subseteq X_1\subseteq Y_1$，因此 $\beta_E(X,Y)=0$，$\gamma_E(X,Y)=0$。

（充分性）假设 $\gamma_E(X,Y)=0$，则 $\alpha_E(X,Y)=0$ 或 $\beta_E(X,Y)=0$。若 $\alpha_E(X,Y)=0$，则存在 $(X_1,(A_1,B_1))\in OEL(G,E,I_E)$ 使得 $X\subset X_1$ 且 $X_1\subseteq Y$。由三支决策规则的定义可知 $(A_1,B_1)\rightarrow(C,F)\in OER(E,D)$ 且 $(A_1,B_1)\subset(A,B)$，即 $(A_1,B_1)\rightarrow(C,F)\in OER(E,D)\setminus\{(A,B)\rightarrow(C,F)\}$ 且 $(A_1,B_1)\rightarrow(C,F)\Rightarrow(A,B)\rightarrow(C,F)$。由定义 3 可知 $(A,B)\rightarrow(C,F)$ 是多余的。

若 $\beta_E(X,Y)=0$，则存在 $(Y_1,(C_1,F_1))\in OEL(G,D,J)$ 使得 $Y_1\subset Y$ 且 $X\subseteq Y_1$。由三支决策规则的定义可知 $(A,B)\rightarrow(C_1,F_1)\in OER(E,D)$ 且 $(C,F)\subset(C_1,F_1)$，即 $(A,B)\rightarrow(C_1,F_1)\in OER(E,D)\setminus\{(A,B)\rightarrow(C,F)\}$ 且 $(A,B)\rightarrow(C_1,F_1)\Rightarrow(A,B)\rightarrow(C,F)$。由定义 3 可知 $(A,B)\rightarrow(C,F)$ 是多余的。

设 $S=(G,M,I,D,J)$ 为决策形式背景，$E\subseteq M$。下面给出 E 为 S 的三支决策规则协调集的充要条件。首先定义：

$\overline{V(G,E,I_E)}=\{X\in V^{\Delta}(G,E,I_E);\exists Y\in V^{\Delta}(G,D,J)$ s.t. $\gamma_E(X,Y)=1\}$

$\overline{OER(E,D)}=\{(A,B)\rightarrow(C,F)\in OER(E,D);\gamma((A,B)^{\succcurlyeq_E},(C,F)^{\succcurlyeq_D})=1\}$。

由定理 2 可知，$\overline{OER(E,D)}$ 为 $OER(E,D)$ 的所有必要三支决策规则的集合。

定理 3 设 $S=(G,M,I,D,J)$ 为决策形式背景，$E\subseteq M$，则 $OER(E,D)\Rightarrow\overline{OER(E,D)}$，$\overline{OER(E,D)}\Rightarrow OER(E,D)$。

定理 4 设 $S=(G,M,I,D,J)$ 为决策形式背景，$E\subseteq M$，E 为 S 的一个三支决策规则协调集的充分必要条件是：$\overline{V(G,E,I_E)}=\overline{V(G,M,I)}$。

证明：（必要性）若 E 为 S 的三支决策规则协调集，即 $OER(E,D)\Rightarrow OER(M,D)$，由定理 3 可得 $\overline{OER(E,D)}\Rightarrow OER(E,D)\Rightarrow OER(M,D)\Rightarrow\overline{OER(M,D)}$。下面证明 $\overline{V(G,M,I)}=\overline{V(G,E,I_E)}$。

对于任意 $X\in\overline{V(G,M,I)}$，有 $(X,(A,B))\in OEL(G,M,I)$ 且存在 $(Y,(C,F))\in OEL(G,D,J)$ 使得 $\gamma_A(X,Y)=1$，因此 $(A,B)\rightarrow(C,F)\in\overline{OER(M,D)}$。

由于 $\overline{OER(E,D)}\Rightarrow\overline{OER(M,D)}$，则存在 $(A_1,B_1)\rightarrow(C_1,F_1)\in\overline{OER(E,D)}$ 使得 $(A_1,B_1)\subseteq(A,B)$ 且 $(C,F)\subseteq(C_1,F_1)$，其中 $(X_1,(A_1,B_1))\in OEL(G,E,I_E)$，$(Y_1,(C_1,F_1))\in OEL(G,D,J)$ 且 $X_1\subseteq Y_1$，因此有 $X\subseteq X_1$ 且 $Y_1\subseteq Y$。假设 $X\neq X_1$，有 $X\subset X_1\subseteq Y_1\subseteq Y$。注意到 $X_1\in V(G,E,I_E)\subseteq V(G,M,I)$，因此 $\gamma_A(X,Y)=0$，矛盾。因此 $X=X_1\in\overline{V(G,E,I_E)}$，于是 $\overline{V(G,M,I)}\subseteq\overline{V(G,E,I_E)}$。

对于任意 $X\in\overline{V(G,E,I_E)}$，有 $(X,(A,B))\in OEL(G,E,I_E)$ 且存在 $(Y,(C,F))\in OEL(G,D,J)$ 使得 $\gamma_E(X,Y)=1$。因此 $\alpha_E(X,Y)=1$ 且 $\beta_E(X,Y)=1$。因为 $V(G,E,I_E)\subseteq V(G,M,I)$，所以 $X\in V(G,M,I)$。假设 $X\notin\overline{V(G,M,I)}$，则 $\gamma_M(X,Y)=0$。由于 $\beta_M(X,Y)=\beta_E(X,Y)=1$，因此 $\alpha_M(X,Y)=0$，从而存在 $X'\in V^{\Delta}(G,M,I)$ 且 $X\subset X'$，使得 $\alpha_M(X',Y)=1$。由 $\beta_M(X,Y)=1$ 和 $X\subset X'$ 可得 $\beta_M(X',Y)=1$。因此 $\gamma_M(X',Y)=1$ 且 $X\subset X'$，即 $X'\in\overline{V(G,M,I)}$ 且 $X\subset X'\subseteq Y$。由 $\overline{V(G,A,I)}\subseteq\overline{V(G,E,I_E)}$ 可得 $X'\in\overline{V(G,E,I_E)}$。故 $\alpha_E(X,Y)=0$，矛盾。因此 $X\in\overline{V(G,M,I)}$，即 $\overline{V(G,E,I_E)}\subseteq\overline{V(G,M,I)}$。综上可得，$\overline{V(G,E,I_E)}=\overline{V(G,M,I)}$。

（充分性）假设 $\overline{V(G,E,I_E)}=\overline{V(G,M,I)}$，对于任意 $(X,(A,B))\rightarrow(Y,(C,F))\in\overline{OER(M,D)}$，有 $X\in\overline{V(G,M,I)}=\overline{V(G,E,I_E)}$，因此 $(X,(X^{*_E},X^{\bar{*}_E}))\in OEL(G,E,I_E)$。再由 $X\subseteq Y$ 可得 $(X,(X^{*_E},X^{\bar{*}_E}))\rightarrow(Y,(C,F))\in OER(E,D)$。又 $X^{*_E}=X^{*}\cap E=A\cap E\subseteq A$，$X^{\bar{*}_E}=X^{\bar{*}}\cap E=B\cap E\subseteq B$，因此 $(X,(X^{*_E},X^{\bar{*}_E}))\rightarrow(Y,(C,F))\Rightarrow(X,(A,B))\rightarrow(Y,(C,F))$。于是由定理得 $OER(E,D)\Rightarrow\overline{OER(M,D)}\Rightarrow OER(M,D)$。即 E 是一个三支决策规则协调集。

例1　参考文献[8]所给的决策形式背景 $S=(G,M,I,D,J)$,如表1所列。其中,$G=\{1,2,3,4,5\}$,$M=\{a,b,c,d,e,f\}$,$D=\{d_1,d_2,d_3\}$。

表1　决策形式背景(G,M,I,D,J)

Table 1　Decision formal contexts (G,M,I,D,J)

G	a	b	c	d	e	f	d_1	d_2	d_3
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
2	1	0	0	0	0	0	0	1	1
3	1	1	1	1	0	1	1	1	0
4	0	1	0	1	1	1	0	1	1
5	1	0	0	0	0	0	1	0	0

由定义可得 $OEL(G,M,I)$,分别记为:$f_1=(12345,(\emptyset,\emptyset))$,$f_2=(1235,(a,e))$,$f_3=(1245,(\emptyset,c))$,$f_4=(134,(bf,\emptyset))$,$f_5=(125,(a,cde))$,$f_6=(34,(bdf,\emptyset))$,$f_7=(14,(bf,c))$,$f_8=(13,(abf,e))$,$f_9=(25,(a,bcdef))$,$f_{10}=(1,(abf,cde))$,$f_{11}=(3,(abcdf,e))$,$f_{12}=(4,(bdef,ac))$,$f_{13}=(\emptyset,(M,M))$。$OEL(G,D,J)$为:$\{(13,(d_1d_2,d_3)),(24,(d_2d_3,d_1)),(5,(d_1,d_2d_3)),(1234,(d_2,\emptyset)),(135,(d_1,d_3)),(12345,(\emptyset,\emptyset)),(\emptyset,(D,D))\}$。

因此,由定义可得:$\overline{V(G,E,I_E)}=\{\{13\},\{14\},\{134\}\}$。再由定义可知决策形式背景中的所有必要三支决策规则为:$(bf,\emptyset)\rightarrow(d_2,\emptyset)$,$(abf,e)\rightarrow(d_1d_2,d_3)$,$(bdef,ac)\rightarrow(d_2d_3,d_1)$。由定理4可验证$\{a,b\}$,$\{b,e\}$,$\{a,f\}$,$\{e,f\}$均为 S 的三支规则协调集。

3.3　决策形式背景下的三支决策规则的约简方法

本节讨论决策形式背景基于三支决策规则的约简问题,给出规则协调集的判定定理,借助区分属性及区分函数给出决策形式背景的三支决策规则约简方法。

定义5　设 $S=(G,M,I,D,J)$为决策形式背景,$(X_i,(A_i,B_i))$,$(X_j,(A_j,B_j))\in OEL(G,M,I)$,令 $\omega(X_i,X_j)$表示条件 $X_i\not\subset X_j\in\overline{V(G,M,I)}$或 $X_j\not\subset X_i\in\overline{V(G,M,I)}$,且

$$D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(X_j,(A_j,B_j)))=\begin{cases}(A_i,B_i)\blacksquare(A_j,B_j), & \omega(X_i,X_j)\text{成立}\\ \emptyset, & \text{否则}\end{cases}$$

其中,

$$\begin{aligned}(A_i,B_i)\blacksquare(A_j,B_j)&=(A_i,B_i)\cup(A_j,B_j)-(A_i,B_i)\cap(A_j,B_j)\\&=(A_i\cup A_j-A_i\cap A_j)\cup(B_i\cup B_j-B_i\cap B_j)\end{aligned}$$

称 $D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(Y_j,(A_j,B_j)))$为$(X_i,(A_i,B_i))$和$(Y_j,(A_j,B_j))$的区分属性集。

定理5(协调集判定定理)　设 $S=(G,M,I,D,J)$为决策形式背景,$E\subseteq M$,E 为 S 的三支决策规则协调集的充分必要条件为:若 $D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(X_j,(A_j,B_j)))\neq\emptyset$,则 $E\cap D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(X_j,(A_j,B_j)))\neq\emptyset$。

证明:(必要性)设 E 为三支决策规则协调集,由定理得 $\overline{V(G,E,I_E)}=\overline{V(G,M,I)}$。若 $D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(X_j,(A_j,B_j)))\neq\emptyset$,则 $X_i\not\subset X_j$ 且 $X_j\in\overline{V(G,M,I)}$或 $X_j\not\subset X_i$ 且 $X_i\in\overline{V(G,M,I)}$。不妨假设 $X_j\not\subset X_i$ 且 $X_i\in\overline{V(G,M,I)}$,则 $X_i\in\overline{V(G,E,I_E)}$,从而 $X_i=X_i^{*_E*_E}\cap X_i^{\overline{*}_E\overline{*}_E}=(A_i\cap E)^{*_1}\cap(B_i\cap E)^{\overline{*}_E}$。因为 $X_j\not\subset X_i$,所以存在 $x\in X_j$ 且 $x\notin X_i$。若 $x\notin(A_i\cap E)^{*_E}$,则存在 $e\in A_i\cap E$ 使得$(x,e)\notin I$。又因为 $x\in X_j=X_j^{**}\cap X_j^{\overline{*}\overline{*}}\subseteq X_j^{**}=A_j^{*}$,所以 $e\notin A_j$。于是由 $e\in E$,$e\in A_i$,$e\notin B_j$ 可得 $e\in A_i\cup A_j-A_i\cap A_j\subseteq D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(X_j,(A_j,B_j)))$,即 $E\cap D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(X_j,(A_j,B_j)))\neq\emptyset$。

若 $x\notin(B_i\cap E)^{\overline{*}_E}$,则存在 $e\in B_i\cap E$ 使得$(x,e)\in I$。又因为 $x\in X_j=X_j^{**}\cap X_j^{\overline{*}\overline{*}}\subseteq X_j^{\overline{*}\overline{*}}=B_j^{\overline{*}}$,所以 $e\notin B_j$。于是由 $e\in E$,$e\in B_i$,$e\notin B_j$ 可得 $e\in B_i\cup B_j-B_i\cap B_j\subseteq D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(X_j,(A_j,B_j)))$,即 $E\cap D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(X_j,(A_j,B_j)))\neq\emptyset$。

(充分性)对于任意 $X\in\overline{V(G,M,I)}$,存在 $A,B\subseteq M$,$C,F\subseteq D$,$Y\subseteq G$ 使得$(X,(A,B))\in OEL(G,M,I)$,$(Y,(C,F))\in OEL(G,D,J)$,$X\subseteq Y$ 且 $\gamma_E(X,Y)=1$。若要证 $X\in\overline{V(G,E,I_E)}$,先证 $X\in V(G,E,I_E)$,即证 $X^{\lessdot_E\gtrdot_E}=X$。假设 $X^{\lessdot_E\gtrdot_E}\neq X$,则由 $X\subseteq X^{\lessdot_E\gtrdot_E}$ 可得 $X\subset X^{\lessdot_E\gtrdot_E}$。由于$(X^{\lessdot_E\gtrdot_E},X^{\lessdot_E\gtrdot_E\lessdot})=(X^{\lessdot_E\gtrdot},X^{\lessdot_E\gtrdot\lessdot})\in OEL(G,M,I)$,其中 $X^{\lessdot_E\gtrdot\lessdot}=(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{\lessdot}=((X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{*},(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{\overline{*}})$,因此有 $X^{\lessdot_E\gtrdot}=X^{\lessdot_E\gtrdot_E}\not\subset X$。由归纳假设,$E\cap((A-(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{*})\cup(B-(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{\overline{*}}))\neq\emptyset$。若 $E\cap((A-(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{*})\neq\emptyset$,则存在 $e\in E$ 使得 $e\in A$ 且 $e\notin(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{*}$。因为$(A\cap E)^{**}=(X^{*}\cap E)^{**}=(X^{*_E*})^{*}\subseteq(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{*}$,所以 $e\notin(A\cap E)^{**}$,与 $e\notin A\cap E$ 矛盾。若 $E\cap(B-(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{\overline{*}})\neq\emptyset$,则存在 $e\in E$ 使得 $e\in B$ 且 $e\notin(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{\overline{*}}$。因为$(B\cap E)^{\overline{*}\overline{*}}=(X^{\overline{*}}\cap E)^{\overline{*}\overline{*}}=(X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{\overline{*}}\subseteq(X^{*_E*}\cap X^{\overline{*}_E\overline{*}})^{\overline{*}}$,所以 $e\notin(B\cap E)^{\overline{*}\overline{*}}$,与 $e\notin B\cap E$ 矛盾。

下面证明 $X\in\overline{V(G,E,I_E)}$。由 $X\subseteq Y$ 可得$(X,X^{\lessdot_E})\rightarrow(Y,(C,F))\in OER(E,D)$且 $\beta_E(X,Y)=\beta_M(X,Y)=1$。若 $\alpha_E(X,Y)=0$,则存在 $X_1\in V(G,E,I_E)$使 $X\subset X_1$ 且 $X_1\subseteq Y$。由于 $V(G,E,I_E)\subseteq V(G,M,I)$,因此 $X_1\in V(G,M,I)$,从而 $\alpha_M(X,Y)=0$ 与 $\alpha_M(X,Y)=1$ 矛盾。故 $\alpha_E(X,Y)=1$,从而 $\gamma_E(X,Y)=1$,$X\in\overline{V(G,E,I_E)}$。

对于任意 $X\in\overline{V(G,E,I_E)}$,存在 $A,B\subseteq M$,$C,F\subseteq D$,$Y\subseteq G$ 使得$(X,(A,B))\in OEL(G,E,I_E)$,$(Y,(C,F))\in OEL(G,D,J)$,$X\subseteq Y$ 且 $\gamma_E(X,Y)=1$。由于 $V(G,E,I_E)\subseteq V(G,M,I)$,因此$(X,X^{\lessdot})\rightarrow(Y,(C,F))\in OER(M,D)$,且 $\beta_E(X,Y)=\beta_M(X,Y)=1$。若 $\alpha_M(X,Y)=0$,则存在 $X_1\in V(G,M,I)$使得 $X\subset X_1$,$X_1\subseteq Y$ 且 $X_1\in\overline{V(G,M,I)}\subseteq\overline{V(G,E,I_E)}$。由于 $X\subset X_1\subseteq Y$ 可得 $\alpha_E(X,Y)=0$,从而 $\gamma_M(X,Y)=1$,因此 $X\in\overline{V(G,M,I)}$。

定义6　设 $S=(G,M,I,D,J)$为决策形式背景,$D^{\blacktriangle}$为 S 的区分矩阵,称 $F_{\blacktriangle}=\wedge\vee D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(Y_j,(A_j,B_j)))$为 S 的区分函数。其中,$D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(Y_j,(A_j,B_j)))\neq\emptyset$ 且 $D^{\blacktriangle}((X_i,(A_i,B_i)),(Y_j,(A_j,B_j)))\in D^{\blacktriangle}$。

通过使用吸收律和分配律,可以将辨识函数 $F_{\blacktriangle}$ 变换为极小的析取范式,这个极小析取范式的所有合取子式是决策形式背景的全部约简。

例2:考虑例1中的决策形式背景 $S=(G,M,I,D,J)$,由定义可得:$\overline{V(G,E,I_E)}=\{\{13\},\{14\},\{134\}\}$。由定义5得出三支决策规则区分矩阵,如表2所列。

表 2 三支决策规则区分矩阵

Table 2 Discernibility matrix of three-way decision rules

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}
f_1				bf				$abfe$				M	
f_2				$adfe$				bf				M	
f_3				bcf				$abcef$				$abdef$	
f_4	bf	$adfe$	bcf		M			ae	M			$acde$	
f_5				M				$bcdf$				$abdef$	
f_6								ade				ace	
f_7								ace				ade	
f_8	$abfe$	bf	$abcef$	ae	$bcdf$	ade	ace		$bcdf$			$aced$	
f_9				M				$bcdf$				$abdef$	
f_{10}												ade	
f_{11}												ace	
f_{12}	M	M	$abdef$	$acde$	$abdef$	ace	ade	$aced$	$abdef$	ade	ace		
f_{13}													

该决策形式背景的可辨识函数为 $F_{\blacktriangle}=(a\wedge b)\vee(e\wedge b)\vee(f\wedge a)\vee(f\wedge e)$。

因此三支决策规则约简为：$\{a,b\}$，$\{b,e\}$，$\{a,f\}$，$\{e,f\}$。

结束语 决策形式背景属性约简理论与方法是 FCA 的研究重点。本文针对决策形式背景讨论了基于三支决策规则的属性约简理论与方法，给出了三支规则协调集的等价描述方法，借助区分矩阵与区分函数给出了基于三支决策规则的属性约简方法。基于本文的研究结果可以进一步讨论三支决策规则获取方法。另外，决策形式背景基于三支决策规则的约简与决策形式背景基于粗糙集模型的约简之间的关系也值得研究。

参 考 文 献

[1] WILLE R . Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[M]. Dordrecht-Boston: Reidel, 1982: 445-470.

[2] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept Lattice[J]. Science in China F, 2005, 48(6): 713-726.

[3] LIU M, SHAO M W, ZHANG W X, et al. Reduction method for concept lattices based on rough set theory and its application[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(9): 1390-1410.

[4] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2009, 21(10): 1461-1474.

[5] SHAO M W, YANG H Z, WU W Z. Knowledge reduction in formal fuzzy contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 73: 265-275.

[6] LI J H, LV Y J, LIANG B M. Algorithm for attribute reduction based on information quantity of concept latticeextension[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(10): 144-146. (in Chinese)
李金海，吕跃进，梁斌梅. 基于概念格外延信息量的属性约简算法[J]. 计算机工程与应用，2009，45(10)：144-146.

[7] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China F, 2008, 38(2): 195-208. (in Chinese)
魏玲，祁建军，张文修. 决策形式背景的概念格属性约简[J]. 中国科学 E 辑：信息科学，2008，38(2)：195-208.

[8] LI J H, MEI C L, LV Y J. Knowledge reduction in decision formal contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(5): 709-715.

[9] LI J H, MEI C L, LV Y J. Knowledge reduction in real decision formal contexts[J]. Information Sciences, 2012, 189(7): 191-207.

[10] LI J H, MEI C L, WANG J H, et al. Rule-preserved object compression in formal decision contexts using concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 71: 435-445.

[11] LI J H, LV Y J. Attribute reduction and rules extraction in decision formal context based on concept lattice[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(7): 182-188. (in Chinese)
李金海，吕跃进. 基于概念格的决策形式背景属性约简及规则提取[J]. 数学的实践与认识，2009，39(7)：182-188.

[12] SHAO M W, YEUNG Y, WU W Z. Rule acquisition and complexity reduction in formal decision contexts[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 259-274.

[13] LI J J, ZHANG Y L, WU W Z, et al. Attribute reduction for formal context and consistent decision formal context and concept lattice generation [J]. Chinese Journal of Computer, 2014, 37(8): 1768-1774. (in Chinese)
李进金，张燕兰，吴伟志，等. 形式背景与协调决策形式背景属性约简与概念格生成[J]. 计算机学报，2014，37(8)：1768-1774.

[14] YAO Y. Three-way decisions and cognitive computing[J]. Cognitive Computation, 2016, 8(4): 543-554.

[15] YAO Y. Three-Way Decision: An Interpretation of Rules in Rough Set Theory[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer-Verlag, 2009: 642-649.

[16] YAO Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.

[17] QI J, WEI L, YAO Y. Three-Way Formal Concept Analysis [C] // International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer, Cham, 2014: 732-741.

[18] REN R, WEI L. The attribute reductions of three-way concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99(C): 92-102.

[19] LIU L, QIAN T, WEI L. Rules extraction in formal decision contexts based on attributes-Induced three-way concept lattices [J]. Journal of Northwest University(Natural Science Edition), 2016, 46(4): 481-487. (in Chinese)
刘琳，钱婷，魏玲. 基于属性导出三支概念格的决策背景规则提取[J]. 西北大学学报(自然科学版)，2016，46(4)：481-487.

[20] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept Lattice [J]. Science in China F, 2005, 48(6): 713-726.