

复杂网络上多智能体系统的一致性研究

张 森 刘文奇 赵 宁
(昆明理工大学理学院 昆明 650500)

摘 要 如何有效提高多智能体系统的一致性收敛速度是一致性问题中的一个重要研究内容。一致性收敛速度可通过拉普拉斯矩阵的最小非零特征值来衡量,文中通过计算机仿真发现,对于不同的复杂网络模型,影响其一致性收敛速度的因素也不同。提高网络一致性收敛速度的具体方法是:在最近邻耦合网络中,减少节点数 N 或增大耦合数 K ;在 NW 小世界网络中,增加节点数 N 或者增大随机化加边概率 p ,因为收敛速度与二者具有良好的线性关系;在 Waxman 随机图网络中,增加节点数 N 或增大其模型中的参数 α 和 β ,当 β 增大时,收敛速度整体上呈线性增长,但会出现较小的波动。该研究结果对优化多智能体网络的一致性收敛速度有一定的指导作用。

关键词 复杂网络,多智能体系统,一致性,最近邻耦合网络,NW 小世界网络,随机图网络

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.04.015

Research of Consensus in Multi-agent Systems on Complex Network
ZHANG Sen LIU Wen-qi ZHAO Ning
(Faculty of Science,Kunming University of Science and Technology,Kunming 650500,China)

Abstract How to improve uniform convergence rate of multi-agent systems is an important issue in uniform research. The uniform convergence rate can be well performed by the smallest non-zero eigenvalues of the Laplacian matrix. According to the computer simulation,this paper found that the uniform convergence rate is significantly led by different factors in different complex networks. The methods for improving uniform convergence rate on the different complex networks are listed as follows. For the nearest-neighbor coupled network,the number of nodes N should be reduced,or the number of coupling K should be increased. For the NW small-world network,the number of nodes N should be increased,or the probability of random edges p should be increased. This paper found that the convergence rate has a good linear relationship between the number of nodes N and the probability of random edges p . For the Waxman random graph network,the number of the nodes N should be increased,or the network parameters α and β should be increased. The convergence rate is linear when β increases,but there is a slight fluctuation. The results can help to optimize the convergence rate of multi-agent network.

Keywords Complex network, Multi-agent systems, Consensus, Nearest-neighbor coupled network, NW small-world network, Random graph network

1 引言

随着信息科技的高速发展,地面无人汽车的驾驶、多无人机的编队飞行、电网系统的智能调度、传感器网络等^[1-2]有关多智能体系统的一致性问题受到了越来越多研究人员的关注。2004 年,Olfati-Saber 等^[3]在 Fax 等^[4]的研究基础上,针对多智能体系统中的无向图网络,设计了经典的一阶一致性算法并指出在网络图连通的情况下,多智能体系统一定能达到一致性状态,且网络的代数连通度也表征了系统的收敛速度。对多智能体系统的一致性收敛速度的研究也受到学者的持续关注^[5-8]。在多智能体系统中,“一致”意味着各个智能体在某一状态量上趋于相同,例如,在无人机系统中通过个体之间的相互协同,最终使得各个无人机在运动速度上能达到一致。而一致性算法则是智能体之间信息交流的一种规则,因此智能体之间的信息交流可以简单地用拓扑结构图来表示,图中节点表示智能体,而边表示智能体之间有信息的交流^[9]。本文以复杂网络为工具展开对多智能体一致性收敛速度的研究。

简而言之,复杂网络是由数量巨大的节点和节点之间错综复杂的关系共同组成的网络^[10]。在现实生活中复杂网络与我们的生活密切相关,如 Internet 网、交通网络、社交网络、推荐网络、卫星网络等。而在科学研究领域,复杂网络的研究也一直备受关注。20 世纪 80 年代,Waxman 根据当时的 Internet 网络,提出了随机图产生器^[11]。1998 年,Watts 等提出了一种新的小世界网络模型,我们称之为 WS 小世界模型^[12]。WS 小世界网络模型实质上是规则网络向完全随机网

到稿日期:2018-09-14 返修日期:2018-11-13 本文受国家自然科学基金(61573173)资助。

张 森(1993—),男,硕士生,主要研究方向为复杂网络与分布式;刘文奇(1965—),男,硕士,教授,主要研究方向为数据博弈、数据库和决策分析,E-mail:liuwenq2215@sina.com(通信作者);赵 宁(1980—),女,博士后,副教授,主要研究方向为排队论、储存论。

络的一种过渡模型。1999 年,Newman 等^[13]在 Watts 等^[12]提出的 WS 小世界网络的基础上,用“随机化加边”替换了网络构建中的“随机化重连”,从而得到了网络连通度更好的 NW 小世界网络。此外,复杂网络也吸引了其他领域研究者的持续关注^[14-17]。

本文基于 Olfati-Saber 等^[4]提出的连续时间多智能体系统的控制协议,通过构建几类经典的复杂网络模型,即最近邻耦合网、waxman 随机图网络、NW 小世界网络,并分析模型中各个参数发生变化时所引起的邻接矩阵的变化,进而通过求得其对应的拉普拉斯矩阵的第二小特征值来发现并分析这几类经典网络模型的网络一致性收敛速度是如何变化的。

本文第 2 节给出了图论知识、多智能体的一致性和几类经典复杂网络模型构造的基本概念;第 3 节通过具体的计算机仿真来说明各个模型参数与网络一致性收敛速度之间的关系;最后总结全文。

2 背景知识

2.1 代数图论知识

令 $G=(V,E,A)$ 表示一个图^[18]。其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是图中 N 个节点的集合, $E\in V\times V$ 是图中节点之间边的集合, $A=[a_{ij}]$ 是图 G 的邻接矩阵, $a_{ij}\geq 0$ 。本文所研究的对象都为无向图。 A 可定义为:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{如果定点 } i \text{ 和 } j \text{ 之间有边} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{1}$$

对于一个无向网络图,其邻接矩阵 A 是一个对角线为 0 的对称矩阵。图 $G(A)$ 的拉普拉斯矩阵 $L=[l_{ij}]\in R^{N\times N}$ (简称 L), 定义为:

$$l_{ij}=\begin{cases} \sum_{k=1, k\neq i}^n a_{ik}, & j=i \\ -a_{ij}, & j\neq i \end{cases} \tag{2}$$

2.2 多智能体的一致性

考虑一个由 N 个智能体组成的单积分多智能体系统,假设其网络拓扑结构图固定并用 $G=(V,E,A)$ 来表示。基于 Olfati-Saber 等提出的连续时间多智体系统的一致性算法为^[2]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= u_i(t) \\ u_i &= \sum_{j\in N_i} a_{ij} (x_j - x_i) \end{aligned} \tag{3}$$

其中, $\dot{x}_i(t)$ 和 $u_i(t)$ 分别为第 i 个智能体在 t 的信息状态和信息控制输入。 $N_i=\{j:a_{ij}>0\}$ 表示节点 i 的邻居节点集合。式(3)可以写成矩阵的形式:

$$\dot{x}=Lx \tag{4}$$

如果图 G 为连通的无向图,那么多智能体系统在式(3)的控制下一定能收敛到一致性状态^[4]。图 G 的拉普拉斯矩阵 L 的所有特征值可写为以下形式^[17]: $0=\lambda_1<\lambda_2\leq\lambda_3\leq\cdots\leq\lambda_n$, 其中第二小特征值 λ_2 可用来衡量一致性算法的收敛速度, λ_2 越大时,网络的收敛速度越快^[4,20], 并且在图论中, 对于一个连通图,拉普拉斯矩阵的第二小特征值代表了该网络图的代数连通度^[21]。

2.3 几类复杂网络模型

2.3.1 全耦合网络和最近邻耦合网络

(1)全局耦合网络也称为完全图网络,即网络中任意两点

之间都有边,如图 1 所示。

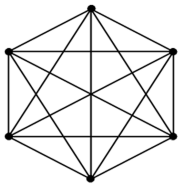


图 1 全局耦合网络(N=6)

Fig. 1 Globally coupled network(N=6)

(2)在最近邻耦合网络中每一个点先与相邻的节点连接,它们围成一个环,然后每个节点再与它左右各 $K/2$ 个邻居节点相连,这里的 K 是一个偶数,如图 2 所示。

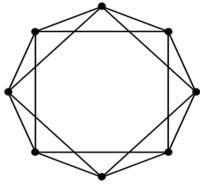


图 2 最近邻耦合网络(N=6, K=4)

Fig. 2 Nearest-neighbor coupled network(N=6, K=4)

2.3.2 NW 小世界网络

NW 小世界网络的模型构造算法如下^[4]:

在确定的最近邻耦合网络的基础上以概率 p 随机地选取一对节点并在两节点间加上一条边,即将边的一个端点确定下来,而另一个端点选取为网络中随机的一个节点。任意两点之间至多有一条边,且不出现自边,如图 3 所示。

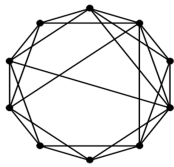


图 3 NW 小世界网络(N=10, K=4, P=0.2)

Fig. 3 NW small-world network(N=10, K=4, P=0.2)

2.3.3 Waxman 随机图网络

Waxman 随机图网络的构造算法如下^[2]:

(1)在平面中选取 $m\times n$ 个网络节点,再从中均匀地选取 N 个节点。

(2)两个节点 u 和 v 之间建立边的概率为: $\Pi(u,v) = \alpha e^{-\frac{d(u,v)}{\beta L}}$ 。其中, $d(u,v)$ 为节点 u 和节点 v 之间的欧几里得距离, L 为图中相距最远的两个节点间的欧几里得距离, α 为平均连接度($\alpha>0$), β 决定了边的平均长度($\beta\leq 1$),如图 4 所示。

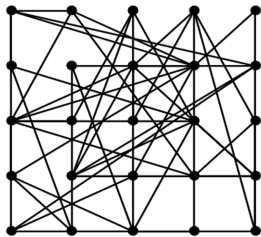


图 4 Waxman 随机图网络(L=4√2, m=n=5, α=0.5, β=0.5)

Fig. 4 Waxman random graph network(L=4√2, m=n=5, α=0.5, β=0.5)

3 仿真分析

本节通过改变最近邻耦合网络、NW 小世界网络、Waxman 随机图网络中的各个参数,同时确保网络图是连通的,从而分析拉普拉斯矩阵的特征值的变化情况。

情形 1 在 $K=4$ 和 $K=8$ 的情况下,分别建立具有不同网络节点数 N 的最近邻耦合网络模型,其中节点 N 从 20 增长到 200,步长为 10。求出每次 N 变化时对应图的拉普拉斯矩阵的第二小特征值 λ_2 ,结果如图 5 所示。

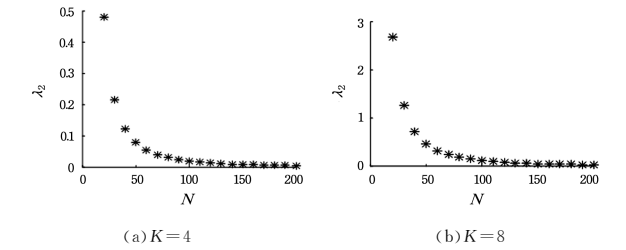


图 5 N 变化时的最近邻耦合网络

Fig. 5 Nearest-neighbor coupled network when N changes

由图 5 可看出,在 K 值不同的情况下, λ_2 随 N 的增加而减小,最后 λ_2 趋于 0,即在最近邻耦合网络中,在连接规则确定的情况下,网络规模越大,网络的一致性收敛速度越慢。这主要因为相连接节点间的距离随 N 的增加而增大。由此可知,在 K 值确定的最近邻耦合网络中,网络的规模越大,其到达一致性状态的时间越长。

情形 2 在 $N=200$ 和 $N=500$ 的情况下,分别建立具有不同耦合数 K 的最近邻耦合网络模型,其中节点 K 从 10 增长到 200,步长为 10($K \leq N$)。求出每次 K 变化时对应图的拉普拉斯矩阵的第二小特征值 λ_2 ,结果如图 6 所示。

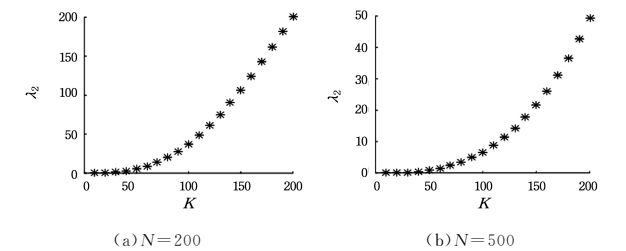


图 6 K 变化时的最近邻耦合网络

Fig. 6 Nearest-neighbor coupled network when K changes

由图 6 可看出,在 N 值不同的情况下, λ_2 随 N 的增加而增大,最后在 $K=N$ 时最近邻耦合网络对应为全局耦合网络, λ_2 达到最大值,即网络的一致性收敛速度达到最大值。这主要因为当 K 值增大时相连接的节点间的距离变小,从而使得网络中节点间的边增多,进而增加网络的连通性。由此可知,在节点数 N 确定的最近邻耦合网络中,网络中的 K 越大,其到达一致性状态的时间越短。

情形 3 在 $K=4, N=200$ 和 $K=4, N=400$ 的情况下,分别建立以不同概率 p 进行随机化加边的 NW 小世界网络模型。概率 p 从 0 增加到 1,步长为 0.05,求出每次 p 变化时对应图的拉普拉斯矩阵的第二小特征值 λ_2 ,结果如图 7 所示。

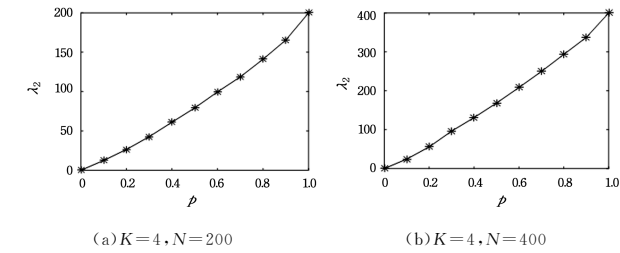


图 7 p 变化时的 NW 小世界网络

Fig. 7 NW small-world network when p changes

由图 7 可看出,在 N 值不同的情况下, λ_2 随 p 的增加而近似线性增加。当 $p=0$ 时,NW 小世界网络对应为 $K=4$ 的最近邻耦合网络,此时 λ_2 近似为 0,例如图 7(a)中 $\lambda_2=0.0049$,图 7(b)中 $\lambda_2=0.0012$,网络的一致性收敛速度最慢。 p 从 0 增加到 1 的过程中,即在最近邻耦合网络的基础上以概率 p 不断地重新加入新边,当 p 增大时网络的连通度也在增大,从而加快了收敛速度。从图 7 中看出 λ_2 呈近似线性增加。当 $p=1$ 时,NW 小世界网络对应为全局耦合网络,此时 $\lambda_2=N$,网络的一致性速度达到最大。由此可知,在固定的最近邻耦合网络的基础上,随机化加边概率 p 正比于网络的一致性收敛速度。

情形 4 当 $K=4$ 时,在随机化加边概率 $p=0.2, p=0.4$ 和 $p=0.6$ 的情况下,分别建立具有不同网络节点数 N 的 NW 小世界网络模型。其中节点 N 从 100 增长到 500,步长为 20,求出每次节点数 N 变化时对应图的拉普拉斯矩阵的第二小特征值 λ_2 ,结果如图 8 所示。

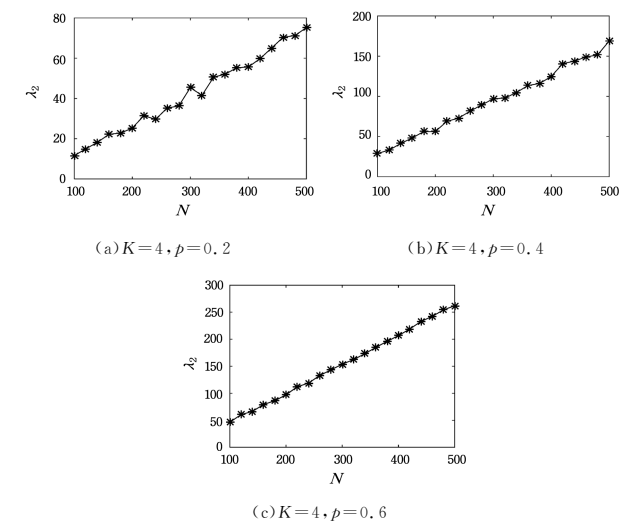


图 8 N 变化时的 NW 小世界网络

Fig. 8 NW small-world network when N changes

由图 8 可看出,在随机化加边概率 p 相同的情况下, N 越大 λ_2 越近似线性增加;并且从实验所得数据可以看出, N 和 λ_2 之间的线性关系也随着 p 值的增加而越来越严格。由此可知,在 NW 小世界网络中当 K 和 p 固定时,网络的规模越大其一致性收敛速度越快。

情形 5 网络节点边长为 10, $\beta=0.3$,在 $n=m=20$ 和

$n=m=30$ 的情况下,分别建立平均连接度 α 不同时的 Waxman 随机图网络模型。其中 α 从 0.3 增长到 1,步长为 0.05 (当 α 过小时,Waxman 随机图可能不连通,因此其网络不能达到一致),求出每次 α 变化时对应图的拉普拉斯矩阵的第二小特征值 λ_2 ,结果如图 9 所示。

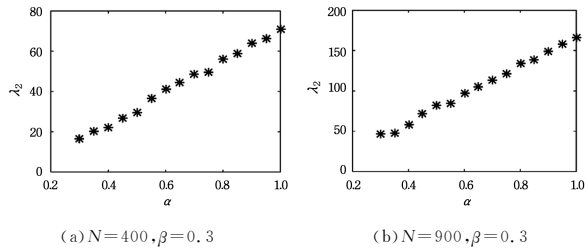


图 9 α 变化时的 Waxman 随机图网络

Fig. 9 Waxman random graph network when α changes

由图 9 可看出, α 从 0.3 增加到 1 时对应的 λ_2 也在增加。由此可知,在 Waxman 随机图模型中,当 N 和 β 相同且网络节点边长相同时,网络的一致性收敛速度随 α 的增加而加快。

情形 6 网络节点边长为 10, $\alpha=0.3$,在 $n=m=20$ 和 $n=m=30$ 的情况下,分别建立 β 不同时的 Waxman 随机图网络模型。其中 β 从 0.3 增长到 1,步长为 0.05(当 β 过小时,Waxman 随机图可能不连通,因此其网络不能达到一致),求出每次 β 变化时对应图的拉普拉斯矩阵的第二小特征值 λ_2 ,结果如图 10 所示。

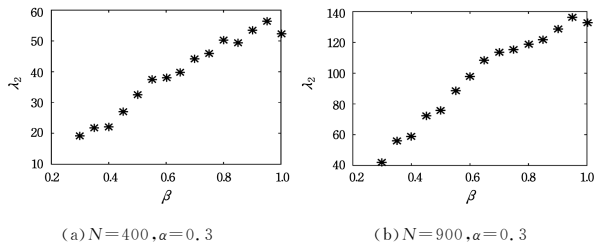


图 10 β 变化时的 Waxman 随机图网络

Fig. 10 Waxman random graph network when β changes

由图 10 可看出, β 从 0.3 增加到 1 时对应的 λ_2 也在整体增加。但是并不是当 $\beta=1$ 时, λ_2 的值到达最大。由此可知在 Waxman 随机图模型中,当 N 和 α 相同且网络节点距离相同时,整体上 λ_2 随 β 的增加而增加,即其网络的一致性速度随 β 的增加而变快。

情形 7 网络节点边长为 10,在 $\alpha=0.3$ 且 $\beta=0.3$; $\alpha=0.5$ 且 $\beta=0.3$,及 $\alpha=0.5$ 且 $\beta=0.5$ 的情况下,分别建立具有不同网络节点数 $N(N=(m \times n))$ 的 Waxman 随机图网络模型。其中节点 N 从 25 增长到 2500(图 11 中 $m=n$,步长为 5),求出每次 N 变化时对应图的拉普拉斯矩阵的第二小特征值 λ_2 ,结果如图 11 所示。

由图 11 可看出,节点 N 从 25 增加到 2500 时, λ_2 也对应地线性增加,节点数 N 正比于其对应的第二小特征值 λ_2 。由此可知在 Waxman 随机图中,当 α 和 β 相同且网络节点距离固定时,增加网络的节点数可以线性地提高该网络的收敛速度。

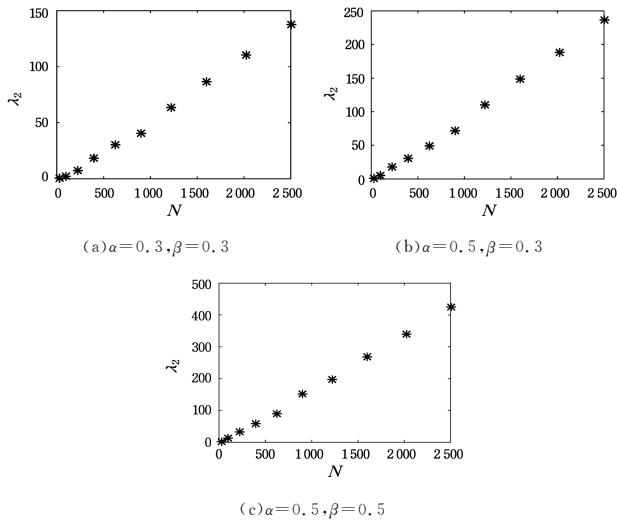


图 11 N 变化时的 Waxman 随机图网络

Fig. 11 Waxman random graph network when N changes

实验中选取了大量的节点和参数进行比较,避免了较少节点或特殊参数所带来的偶然性。表 1 对以上 7 种情况进行了汇总。

表 1 7 种情形的汇总

Table 1 Summary of seven cases

最近邻耦合网络	耦合数 K 固定时,增加节点数 N ,网络收敛速度变慢,随着 N 的增大,网络收敛速度的变化率也变小
	节点数 N 固定时,增大耦合数 K ,网络收敛速度变快,随着 K 的增大,网络收敛速度的变化率也变大
NW 小世界网络	节点数 N 固定时,增大概率 p ,网络收敛速度变快,二者大致服从线性关系,且 p 越大线性关系越明显
	概率 p 固定时,增加节点数 N ,网络收敛速度变快
Waxman 随机图网络	节点数 N 和 α 固定时,增大 β ,网络收敛速度会变快
	节点数 N 和 β 固定时,增大 α ,网络收敛速度会变快,并且 β 较大时, α 和收敛速度的线性关系会更加明显
	α 和 β 固定时,增加节点数 N ,网络收敛速度会变快

结束语 本文分别研究了规则网络、随机网络、小世界网络中的某一特定模型,主要考虑了网络拓扑结构变化对网络收敛速度的影响,并且针对各个变量是如何影响其收敛速度的这一问题给出了具体的结论。这些结论在我们设计多智能体通信网络时能提供一定的帮助。在接下来的研究中还可以考虑结合现实分析更加贴近现实的网络模型拓扑结构是如何影响网络收敛速度的,并且观察它们的特征参数-度分布、聚类系数等是如何变化的。

参 考 文 献

[1] WANG K, GU L, HE X, et al. Distributed Energy Management for Vehicle-to-Grid Networks[J]. IEEE Network, 2017, 31(2): 22-28.

[2] GIL P, MARTINS H, JANUÁRIO F. Detection and accommodation of outliers in Wireless Sensor Networks within a multi-agent framework[J]. Applied Soft Computing, 2016, 42: 204-214.

[3] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J].

IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49 (9): 1520-1533.

[4] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49 (1): 115-120.

[5] MOREAU L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links[J]. IEEE transactions on Automatic Control, 2005, 50(2): 169-182.

[6] ZHAO J C. Pinning control of general complex dynamical networks with optimization[J]. Science China, 2010, 53(4): 813-822.

[7] LIU X, CHEN T. Cluster Synchronization in directed Networks Via Intermittent pinning control[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(7): 1009-1020.

[8] HATANO Y, MESBAHI M. Agreement over random networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(11): 1867-1872.

[9] YANG W. Consensus problem in multi-Agent Systems[D]. Shanghai: Shaihai Jiao Tong University 2009. (in Chinese)
杨文. 多智能体系统一致性问题研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2009.

[10] 孙玺菁, 司守奎. 复杂网络算法与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015: 3-5.

[11] WAXMAN B M. Routing of multipoint connections [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1988, 6(9): 1617-1622.

[12] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.

[13] NEWMAN M E J, WATTS D J. Renormalization group analysis of the small-world network model [J]. Physics Letters A, 1999, 263(4-6): 341-346.

[14] MENG Y, JIANG C, CHEN H H, et al. Cooperative Device-to-Device Communications: Social Net working Perspectives [J]. IEEE Network, 2017, PP(99): 12-18.

[15] BENSON A R, GLEICH D F, LESKOVEC J. Higher-order organization of complex networks[J]. Science, 2016, 353(6295): 163-166.

[16] BOCCALETTI S, BIANCONI G, CRIADO R, et al. The structure and dynamics of multilayer networks[J]. Physics Reports, 2014, 544(1): 1-122.

[17] XU L L, DONG Y H, PAN J F. Survey of Graph Sparsification Algorithms for Complex Networks[J]. Computer Science, 2018, 45(5): 24-30, 43. (in Chinese)
徐丽丽, 董一鸿, 潘剑飞, 等. 面向复杂网络的图稀疏算法综述 [J]. 计算机科学, 2018, 45(5): 24-30, 43.

[18] GIRVAN M, NEWMAN M E J. Community structure in social and biological networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2002, 99(12): 7821-7826.

[19] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[20] OLFATI-SABER R. Ultrafast consensus in small-world networks[C]// Proceedings of American Control Conference. New York: IEEE Press, 2005: 2371-2378.

[21] FIEDLER M. Algebraic Connectivity of Graphs[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 1973, 23(23): 298-305.