第41卷 第7期
2014年7月

Vol. 41 No. 7
July 2014

Petri网弱公平性和公平性关系的进一步研究

施洲琪 丁志军 陈闳中
(同济大学计算机科学与技术系 上海 200092)

摘 要 在Petri网中,公平性概念的引入是为了讨论网系统中两个变迁发生之间的相互关系。这种关系可以很好地反映出模拟系统的各个事件在资源竞争中的有无饥饿性问题。文中基于弱公平性和公平性的定义与联系,证明了对于有界Petri网,满足弱公平性就满足公平性;同时证明了在两类无界Petri网中,可由弱公平性推导出公平性。并进一步证明其他类型的无界Petri网是不满足公平性的,即无法从弱公平性直接推导出公平性。

关键词 Petri网,弱公平性,公平性,有界性

中图法分类号 TP301 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2014.07.009

Further Study of Relationship between Weak Fairness and Fairness of Petri Nets

SHI Zhou-qi DING Zhi-jun CHEN Hong-zhong
(Department of Computer Science and Technology, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract In Petri net, the introduction of the concept fairness is to discuss the relationship of two transitions happened in net system. This relationship can well reflect whether each part of the concurrent system in the competition for resource has starvation-free problem. According to the definition and the relation of the weak fairness and fairness, it was proved that fairness can be deduced by weak fairness for a bounded Petri net and for two classes unbounded Petri net. Fairness cannot be deduced by weak fairness for other unbounded Petri net.

Keywords Petri net, Weak fairness, Fairness, Boundedness

1 引言

Petri网是分布式系统的建模和分析工具,它特别适于描述系统中进程或部件的顺序、并发、冲突以及同步等关系[1]。有界性是Petri网中一个重要的概念,它反映被模拟系统运行过程中对有关资源的容量要求。公平性也是Petri网中一个重要的概念,它可以反映被模拟系统的无饥饿性,而无饥饿性是系统运行过程中的一个重要性质,因此有很多研究公平性的文章[2-5]。弱公平性是对公平性概念的扩展,文献[5]提出了弱公平性的有关概念,并给出了判别一个网为弱公平网的充分必要条件。

根据弱公平性和公平性的定义,发现弱公平性和公平性之间存在紧密的联系,文献[6]指出公平关系是弱公平关系的子集。本文对它们之间的子集关系进行进一步研究,论证得到3个结论:(1)如果一个有界Petri网是弱公平Petri网,则这个Petri网是一个公平Petri网;(2)对于无界Petri网,若无界库所受到有界库所的限制或无界库所没有后集,那么如果这个Petri网是弱公平Petri网,则这个Petri网也是公平Petri网;(3)除了(2)中的两类无界Petri网,对于其他的无界Petri网都不满足公平性,因此如果这个Petri网是弱公平Petri网,不能得出这个Petri网为公平Petri网。

2 基本概念、术语及有关结论

这里只简述同本文相关的基本概念、术语及已有的结论,对有关的记号进行约定,以便于后面的讨论。

Petri网是一种网状信息流模型,包括库所和变迁两类节点,同时在库所集上添加表示状态信息的托肯分布(标识)。库所表示条件、资源、等待队列和信道等。变迁表示事件、动作、语句执行和消息发送/接受等。一个变迁(事件)有一定数量的输入和输出库所,分别表示事件的前置条件和后置条件。库所中的托肯代表可以使用的资源数量或数据[1]。

定义1[1] 满足下列条件的三元组$N=(S,T;F)$称作一个网:

1)$S\cup T\neq\emptyset$

2)$S\cap T=\emptyset$

3)$F\subseteq(S\times T)\cup(T\times S)$

4)$dom(F)\cup cod(F)=S\cup T$

其中

$dom(F)=\{x\in S\cup T|\exists y\in S\cup T:(x,y)\in F\}$

$cod(F)=\{x\in S\cup T|\exists y\in S\cup T:(y,x)\in F\}$

定义2[1] 设$N=(S,T;F)$为一个网。对于$x\in S\cup T$,记

${}^{\bullet}x=\{y|y\in S\cup T\wedge(y,x)\in F\}$

到稿日期:2013-04-11 返修日期:2013-05-18 本文受国家自然科学基金(61173042),上海市"曙光计划"(10SG23),上海市青年科技启明星跟踪计划(12QH1402300),铁道部科技研究开发计划(2012X014-E)资助。

施洲琪(1989—),男,硕士生,主要研究方向为分布式计算;**丁志军**(1974—),博士,副教授,主要研究方向为Petri网、服务计算,E-mail:zhijun_ding@outlook.com(通信作者);**陈闳中**(1951—),男,教授,主要研究方向为分布式计算、操作系统。

$x^{\cdot}=\{y \mid y \in S \cup T \wedge (x,y) \in F\}$

称$^{\cdot}x$为x的前集或输入集,$x^{\cdot}$为x的后集或输出集。

定义 3[1] 设$\Sigma=(S,T;F,M_0)$为一个 Petri 网,$s\in S$。若存在正整数B,使得$\forall M\in R(M_0):M(s)\leqslant B$,则称库所$s$为有界的,并称满足此条件的最小正整数$B$为库所$s$的界,记为$B(s)$。即

$B(s)=\min\{B \mid \forall M\in R(M_0):M(s)\leqslant B\}$

定义 4[1] 设$\Sigma=(S,T;F,M_0)$为一个 Petri 网,如果每个$s\in S$都是有界的,则称Σ为有界 Petri 网。称$B(\Sigma)=\max\{B(s)\mid s\in S\}$为$\Sigma$的界。

定理 1[1] 设$\Sigma=(S,T;F,M_0)$为一个 Petri 网,$R(M_0)$为有限集当且仅当Σ是有界的。

定义 5[1] 设$\Sigma=(S,T;F,M_0)$为一个 Petri 网,$t_1,t_2\in T$。如果存在正整数k,使得$\forall M\in R(M_0)$和$\forall \sigma\in T^*:M[\sigma\rangle$,都有$\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_j/\sigma)\leqslant k$,其中$i,j\in\{1,2\}$且$i\neq j$,则称$t_1$和$t_2$处于公平关系。如果$\Sigma$中任意两个变迁都处于公平关系,则称$\Sigma$为公平 Petri 网。$\#(t/\sigma)$表示序列$\sigma$中变迁$t$出现的次数。

定义 6[1] 设$\Sigma=(S,T;F,M_0)$为一个 Petri 网,$t_1,t_2\in T$。如果对任意$M\in R(M_0)$,都存在正整数k,使得$\forall\sigma\in T^*:M[\sigma\rangle$,都有$\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_j/\sigma)\leqslant k$,其中$i,j\in\{1,2\}$且$i\neq j$,则称$t_1$和$t_2$处于弱公平关系。如果$\Sigma$中的任意两个变迁都处于弱公平关系,则称$\Sigma$为一个弱公平 Petri 网。

3 有界 Petri 网中弱公平性和公平性的关系

定理 2 设$\Sigma=(S,T;F,M_0)$为一个有界 Petri 网,如果Σ是一个弱公平 Petri 网,则Σ是一个公平 Petri 网。

证明:根据条件$\Sigma=(S,T;F,M_0)$为一个有界 Petri 网,由定理 1 可知$R(M_0)$为有限集,因此可以假设$R(M_0)$的个数为N^+。同样由条件可知,Σ是一个弱公平 Petri 网,由定义 6 可知,对于任意$t_1,t_2\in T$,t_1和t_2处于弱公平关系,即对于每一个$M_j\in R(M_0)$,都存在正整数k_j,使得$\forall\sigma\in T^*:M_j[\sigma\rangle$,都有$\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_{3-i}/\sigma)\leqslant k_j$,其中,$i=1,2,j=1,2,\cdots,N^+$。取$k=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_{N^+}\}$,则对于每一个$M\in R(M_0)$,使得$\forall\sigma\in T^*:M[\sigma\rangle$,都有$\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_{3-i}/\sigma)\leqslant k,i=1,2$。由公平关系的定义(定义 5)可知,$t_1$和$t_2$处于公平关系。又由$t_1$和$t_2$的任意性,可得$\Sigma$为一个公平 Petri 网。证毕。

例 1 如图 1 所示的 Petri 网$\Sigma_1=(S_1,T_1;F_1,M_{01})$的每个库所都是有界的,因此这个 Petri 网为有界 Petri 网,根据定义 6,易知这个 Petri 网为弱公平 Petri 网。因此由定理 2,这个 Petri 网一定是公平 Petri 网。根据定义 5 很容易验证这个 Petri 网确实满足公平性的条件。

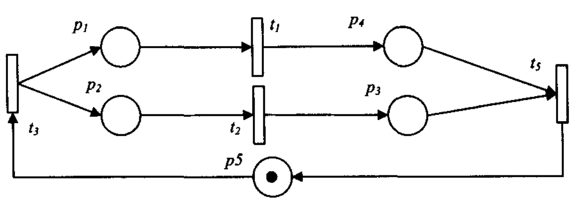

图 1 Petri 网模型$\Sigma_1=(S_1,T_1;F_1,M_{01})$

4 无界 Petri 网中弱公平性和公平性的关系

对无界 Petri 网进行深入的研究,发现了在两种类型的无界 Petri 中,同样可以得出相同的结论,即:可以根据一个 Petri 网为弱公平 Petri 网推导得出这个 Petri 网也是公平 Petri 网。下面分别对这两个类型的无界 Petri 网和其他无界 Petri 网进行分析。

定理 3 设$\Sigma=(S,T;F,M_0)$为一个无界 Petri 网,且对于所有无界库所$s\in S$,都有$s^{\cdot}=\emptyset$。如果Σ是一个弱公平 Petri 网,则Σ是一个公平 Petri 网。

证明:根据条件可知,Σ是一个弱公平 Petri 网,根据定义 6,可知对于$\forall t_1,t_2\in T$,t_1,t_2处于弱公平关系。又由条件可知,对于所有无界库所$s\in S$,都有$s^{\cdot}=\emptyset$,则无界库所中标识的数量不影响变迁序列,因此可以确定有界库所中的标识个数确定,把无界库所中标识的个数任意的所有标识归为一类,记为M_j,设Σ有N^+类这样的标识(N^+是有限的),对于每一类$M_j\subset R(M_0)$,都存在正整数k_j,使得$\forall\sigma\in T^*:M_j[\sigma\rangle$都有$\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_{3-i}/\sigma)\leqslant k_j$,其中,$i=1,2,j=1,2,\cdots,N^+$。取$k=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_{N^+}\}$,则对于每一个$M\in R(M_0)$,使得$\forall\sigma\in T^*:M[\sigma\rangle$,都有$\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_{3-i}/\sigma)\leqslant k,i=1,2$。由公平关系的定义(定义 5)可知,$t_1$和$t_2$处于公平关系。又由$t_1$和$t_2$的任意性,可得$\Sigma$为一个公平 Petri 网。证毕。

例 2 如图 2 所示的 Petri 网$\Sigma_2=(S_2,T_2;F_2,M_{02})$的库所$s$是无界的,其他库所的界都是 1,因此这个 Petri 网是无界 Petri 网,且这个 Petri 网的无界库所s没有后集,而且根据定义 6 容易判断,这个 Petri 网是弱公平 Petri 网,由定理 3 可知,这个 Petri 网是公平 Petri 网。再根据定义 5 进行验证,这个 Petri 网是公平 Petri 网。

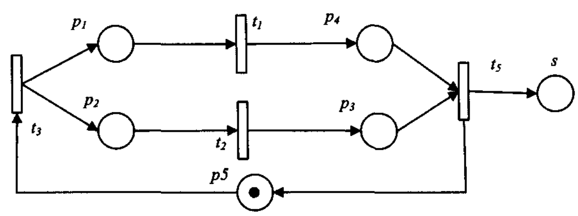

图 2 Petri 网模型$\Sigma_2=(S_2,T_2;F_2,M_{02})$

定理 4 设$\Sigma=(S,T;F,M_0)$为一个无界 Petri 网,且对于每个无界库所$s_i\in S$的后集变迁t,都存在至少一个有界库所$s_j\in S$,使得$t\in s_j^{\cdot}$。如果Σ是一个弱公平 Petri 网,则Σ是一个公平 Petri 网。

证明:根据条件可知,Σ是一个弱公平 Petri 网,根据定义 6,可知对于$\forall t_1,t_2\in T$,t_1,t_2处于弱公平关系。又因为已知条件,对于所有无界库所s_i的后集变迁t,都存在至少一个有界库所$s_j\in S$,使得$t\in s_j^{\cdot}$,即对于任意的$t\in s_i^{\cdot}$,有$t\in s_j^{\cdot}$,当$M(s_i)>M(s_j)$时,无界库所s_i的托肯数对变迁t的使能没有影响。因此可令每一个时刻$M(s_i)=M(s_j)$,此时$R(M_0)$的个数是有界的,设有N^+个。因为t_1,t_2处于弱公平关系,对于每一个$M_j\in R(M_0)$,都存在正整数k_j,使得$\forall\sigma\in T^*:M_j[\sigma\rangle$都有$\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_{3-i}/\sigma)\leqslant k_j$,其中,$i=1,2,j=1,2,\cdots,N^+$。取$k=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_{N^+}\}$,则对于每一个$M\in R(M_0)$,使得$\forall\sigma\in T^*:M[\sigma\rangle$,都有$\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_{3-i}/\sigma)\leqslant k,i=1,2$。由公平关系的定义(定义 5)可知,$t_1$和$t_2$处于公平关系。又由$t_1$和$t_2$的任意性,可得$\Sigma$为一个公平 Petri 网。证毕。

例 3 如图 3 所示的 Petri 网$\Sigma_3=(S_3,T_3;F_3,M_{03})$的库所$s$是无界的,其他库所的界都是 1,因此这个 Petri 网是无界 Petri 网。又因为存在一个库所c,使得$s^{\cdot}\subset c^{\cdot}$,而且根据定

义 6 容易判断，这个 Petri 网是弱公平 Petri 网，根据定理 4 可知，这个 Petri 网一定是公平 Petri 网。再根据定义 5 进行验证，这个 Petri 网是公平 Petri 网。

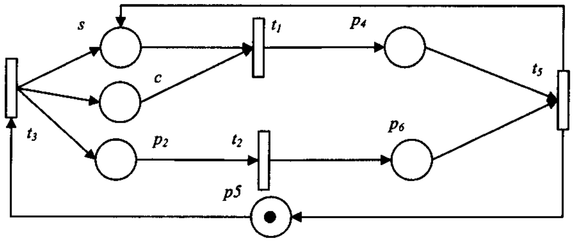

图 3　Petri 网模型 $\Sigma_3=(S_3,T_3;F_3,M_{03})$

定理 5　设 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$ 为一个无界 Petri 网，如果存在一个变迁 $t\in T$，对于 $\forall s\in {}^{\cdot}t$，s 是无界的，则 Σ 不是公平 Petri 网。

证明：这里用反正法，假设 Σ 是一个公平 Petri 网，则由定义 5 可知，对于任意 $t_1,t_2\in T$ 都是公平关系，即存在正整数 k，使得 $\#(t_i/\sigma)=0\rightarrow\#(t_j/\sigma)\leqslant k$。根据条件可知存在一个变迁 $t\in T$，对于 $\forall s\in {}^{\cdot}t$，s 是无界的。因为 s 是无界的，不妨取 $M\in R(M_0)$，其中 $M(s)=k+1$，$\exists\sigma=t,t,\cdots,t\in T^*$：$M[\sigma\rangle$，其中有 $k+1$ 个 t。即对于任意的变迁 $t'\neq t$，有 $\#(\sigma,t')=0\rightarrow\#(\sigma,t)=k+1>k$，则 t,t' 不是公平关系，出现矛盾。证毕。

定理 5 表明如果存在一个变迁 $t\in T$，使得对于 $\forall s\in {}^{\cdot}t$，s 是无界的，则不能由 Σ 是一个弱公平 Petri 网得出 Σ 是一个公平 Petri 网。

例 4　如图 4 所示的 Petri 网 $\Sigma_4=(S_4,T_4;F_4,M_{04})$ 的库所 s 和 c 是无界的，其他库所的界都是 1，因此这个 Petri 网是无界 Petri 网。又因为存在一个变迁 $t\in T$，使得对于 $\forall s\in {}^{\cdot}t$，s 是无界的，根据定义 6 可以判断，这个 Petri 网是弱公平 Petri 网。但根据定理 5 可知，这个 Petri 网不是公平 Petri 网。再根据定义 5 也易证这个 Petri 网不是公平 Petri 网。

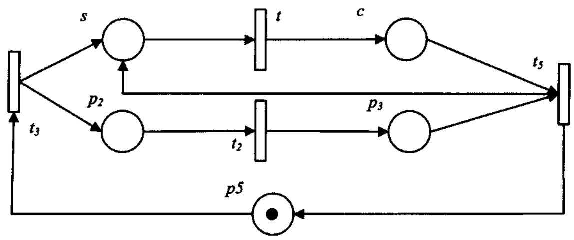

图 4　Petri 网模型 $\Sigma_4=(S_4,T_4;F_4,M_{04})$

结束语　本文通过对 Petri 网弱公平性和公平性的研究，得出两者之间的关系，提出了 4 个定理。定理 1 说明在有界 Petri 网中，可以由弱公平 Petri 网推出公平 Petri 网。定理 2 和定理 3 说明在无界 Petri 网中，无界库所没有后集或者无界库所后集变迁受到有界库所的制约，在这种情况下，同样可以由弱公平 Petri 网推出公平 Petri 网。定理 4 说明，在除了定理 2、定理 3 两种无界 Petri 网的情况下，都不能由弱公平 Petri 网推出公平 Petri 网。

参 考 文 献

[1]　吴哲辉. Petri 网导论[M]. 北京：机械工业出版社，2006

[2]　吴哲辉，王培良，赵茂先. 无界公平 Petri 网的进程表达式[J]. 计算机学报，2000，23(4)：337-344

[3]　王廷刚，吴哲辉. Petri 网有界性和公平性关系的进一步研究[J]. 系统仿真学报，2009，20(增刊)：13-15

[4]　宁华，蒋树强，吴哲辉. Petri 网中的广义公平关系[J]. 计算机学报，2000，23(10)：1102-1107

[5]　王培良，吴哲辉. 公平网的一组直接判定条件[J]. 计算机学报，1993，16(1)：53-58

[6]　王培良，吴哲辉. Petri 网弱公平性的判定[J]. 计算机学报，1994，8(7)：608-611

[7]　郭玉彬，杨桂珍. Petri 网中的公平依赖体系研究[J]. 小型微型计算机系统，2003，24(7)：1031-1035

(上接第 14 页)

[5]　李德毅，刘常昱. 论正态云模型的普适性[J]. 中国工程科学，2004，6(8)：28-34

[6]　Li D Y，Liu C Y，Gan W Y. A new cognitive model：cloud model [J]. Int. J. of Intelligent Systems，2009，24(3)：357-375

[7]　刘常昱，冯芒，戴晓军，等. 基于云 X 信息的逆向云新算法[J]. 系统仿真学报，2004，16(11)：2417-2420

[8]　王立新. 正态云的基本数学性质及云滤波器[J]. 个人通信，2011

[9]　Wang G Y，Xu C L，Zhang Q H，et al. A multi-step backward cloud generator algorithm[C]// The 8th International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC'12). Chengdu，China，2012：313-322

[10]　许昌林，王国胤. 实现稳定双向认知映射的逆向云变换算法[J]. 模式识别与人工智能，2013，26(7)：634-642

[11]　Kullback S，Leibler R A. On information and sufficiency[J]. The Annals of Mathematical Statistics，1951，22(1)：79-86

[12]　Budka M，Gabrys B，Musial K. On accuracy of PDF divergence estimators and their applicability to representative data sampling [J]. Entropy，2011，13：1229-1266

[13]　Moreno P J，Ho P P，Vasconcelos N. A Kullback-Leibler divergence based kernel for SVM classification in multimedia applications[J]. Advances in Neural Information Processing Systems，2004，16：1385-1392

[14]　De Domenico M，Insolia A. Entropic approach to multiscale clustering analysis[J]. Entropy，2012，14：865-879

[15]　Contreras-Reyes J E，Arellano-Valle R B. Kullback-Leibler divergence measure for multivariate skew-normal distributions [J]. Entropy，2012，14：1606-1626

[16]　Villena S，Vega M，Babacan S D，et al. Using the Kullback-Leibler divergence to combine image priors in super-resolution image reconstruction[C]// Proceedings of 2010 IEEE 17th International Conference on Image Processing. Hong Kong，China，2010：893-896

[17]　Jeffreys H. An invariant form for the prior probabili ty in estimation problems[J]. Proceedings of the Royal Society A：Mathematical，Physical and Engineering Science，1946，186(1007)：453-461

[18]　王国胤，许昌林，张清华，等. 双向认知计算的 p 阶正态云模型的递归定义及分析[J]. 计算机学报，2013，36(11)：2316-2329

[19]　王甦，汪安圣. 认知心理学[M]. 北京：北京大学出版社，2006

[20]　Lindsay P H，Norman D A. Human Information Processing：An Introduction to Psychology[M]. New York：Academic Press，1977

[21]　张文修，徐伟华. 基于粒计算的认知模型[J]. 工程数学学报，2007，24(6)：957-971