

# 免声速迭代式 TDOA 测向研究

侯东升 汪海 崔逊学

(中国人民解放军陆军炮兵防空兵学院 合肥 230031)

**摘要** 针对到达时间差的声源测向问题,如果能够知道声源现场的速度参量,结合线性最小二乘法(Linear Least Squares, LLS)的波达方向(Direction of Arrival, DOA)的估计结果,则可以采用基于最大似然原理的迭代式算法进行求解。但在某些环境下,声信号传播的速度参量无法获得,或测量偏差较大,势必会影响 DOA 的估计精度。根据 LLS 无需声速的特点,以及基于最大似然原理的迭代式算法可直接求解声源方位角与俯仰角的特点,文中提出免声速迭代式模型,并采用泰勒级数展开法以及莱温伯格-马夸特法进行求解,该方法无需预先知道声音信号的速度参量。另外,文中推导了泰勒级数展开法、莱温伯格-马夸特法的测向均方差以及免声速迭代式模型的克拉姆-拉奥下界。模拟实验结果表明,在存在声速测量误差的情况下,所提方法明显优于现有方法。

**关键词** 到达时差,测向,免声速迭代式模型,克拉姆-拉奥下界

中图分类号 TN92 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.07.010

## Study on TDOA Direction Finding of Iterative Model Without Sound Speed

HOU Dong-sheng WANG Hai CUI Xun-xue

(PLA Army Academy of Artillery and Air Defense, Hefei 230031, China)

**Abstract** In view of the time-difference-of-arrival sound-source direction finding problem, if the velocity parameter of propagating signal about sound source is known, combining with estimated result of the Direction of Arrival (DOA) of Linear Least Squares (LLS), the direction finding problem can be solved by iterative algorithm based on maximum likelihood principle. However, in some conditions, it is difficult to obtain velocity parameter of sound source, or measured deviation is large, which will affect the estimation accuracy of DOA. According to the characteristic of LLS about direction finding without sound velocity, and the characteristic of iterative algorithm based on maximum likelihood principle directly solving the azimuth and elevation of sound source, this paper proposed an iterative model without sound speed. The Taylor Series expansion method and the Levenberg-Marquart method are used to solve the problem, without knowing the velocity parameters of the sound signal beforehand. In addition, the mean square error of direction finding about Taylor Series expansion method and the Levenberg-Marquart method, and the Cramer-Rao Lower Bound of iterative model without sound speed are derived. The simulation results show that when measurement errors exist in sound speed, the proposed method is obviously superior to the existing methods.

**Keywords** TDOA, Direction finding, Iterative model without sound speed, Cramer-Rao lower bound

## 1 引言

近年来,随着传感器领域、通信领域的发展,基于到达时间差(Time Difference of Arrival, TDOA)的声阵列定位算法得到了长足的发展<sup>[1]</sup>。当辐射源距离阵列很远时,人们难以直接通过 TDOA 双曲线交叉方法精确估计辐射源坐标。但如果不同位置分散部署多个阵列,便可以利用各阵列所接收到的信号平面波之间的时差来估计辐射源方位。

TDOA 测向,指利用不同位置的传感器所接收到的信号平面波之间的时差来估计波达方向(Direction of Arrival,

DOA)<sup>[2-3]</sup>。目前已有多种技术可从阵列信号中提取 TDOA,如广义互相关法和最大峰值法等<sup>[4]</sup>。

基于 TDOA 辐射源的方向问题最早由 Baruch 等提出,他们设计了一种线性最小二乘(Linear Least Squares, LLS)测向方法<sup>[5-6]</sup>,由 3 个分量构成的 DOA 矢量估计可计算出辐射源的方位角和俯仰角。LLS 法的优点是无需信号传播的速度参量,且提供的解方案是闭式的;但 LLS 法只有应用于对称、均匀的固定结构阵列时,所提供的估计精度才能逼近克拉姆-拉奥下界(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB)<sup>[7]</sup>。

如果能够知道辐射源现场传播信号的速度参量,譬如对

收稿日期:2018-06-08 返修日期:2018-10-12 本文受国家自然科学基金(61672532)资助。

侯东升(1992—),男,硕士生,主要研究方向为传感器网络和目标定位,E-mail:hds213510@163.com;汪海(1994—),男,硕士生,主要研究方向为传感器网络和目标定位;崔逊学(1969—),男,教授,硕士生导师,CCF 会员,主要研究方向为传感器网络和目标定位,E-mail:1637775295@qq.com(通信作者)。

于声信号源而言,那么通过测量现场的气象参数,测得实时位置的声速,并结合 LLS 的 DOA 估计结果,可以采用基于最大似然原理的迭代式的算法进行求解,从而优化 DOA 的估计结果<sup>[8]</sup>。例如,采用泰勒级数展开算法(Taylor Series, TS)<sup>[9]</sup>以及莱温伯格-马夸特法(Levenberg-Marquardt algorithm, LM)<sup>[10]</sup>来对 TDOA 测量方程进行 DOA 估计。具体的操作步骤和过程不难设计,文献[11]与文献[12]就提供了这种方法的设计过程。但基于最大似然原理的迭代式方法需要测得声音的速度参量,如果测量偏差较大,势必会影响 DOA 的估计精度,因此其仅在测量误差较小时才可行,并且基于最大似然原理的迭代式方法不能保证总是收敛。

基于此,文中提出一种免声速迭代式模型,采用泰勒级数展开法和莱温伯格-马夸特法进行求解,无需预先测得声源现场的速度参量,避免测量偏差较高而干扰 DOA 的估计精度。文中还推导了免声速模型的克拉姆-拉奥下界以及两种迭代式算法的测向估计均方差。最后本文通过实验对免声速 TS 法和 LM 法与 LLS 法、带声速 TS 法以及带声速 LM 法进行了性能比较。

## 2 基于时差的免声速迭代式测向模型

### 2.1 基于时差的测向模型

三维空间辐射源的测向示意图如图 1 所示:假设在三维空间中,传感器的真实坐标为  $s_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T, i=1, 2, \dots, N$ ,且假设这些传感器不在同一直线、同一平面上。真实的目标方位为  $\gamma = [\phi \ \theta]^T, \hat{\tau}_i$  为目标到达第  $i$  个传感器的时间测量值,DOA 的矢量  $\mathbf{K}$  用式(1)表示。

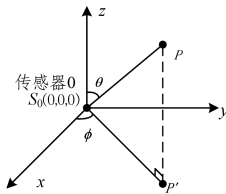


图 1 三维空间辐射源的测向示意图

Fig. 1 Direction finding diagram of three-dimensional space radiation source

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,  $k_x, k_y, k_z$  分别为辐射源 DOA 在 3 个坐标轴上的单位投影。本文中,如果符号上方有  $\wedge$  则表示估计值或测量值,否则为真值。

通常假定将第 0 个传感器作为 TDOA 测量基准,且其位于坐标系原点,则存在如下的 TDOA 测量方程:

$$c(\hat{\tau}_i + \Delta \hat{\tau}_i) = x_i \sin \theta \cos \phi + y_i \sin \theta \sin \phi + z_i \cos \theta \quad (2)$$

其中,  $\hat{\tau}_i$  为该传感器的 TDOA 测量值;  $\Delta \hat{\tau}_i$  为相应的 TDOA 测量误差;  $c$  为信号传播速度。式(2)变为如下矩阵形式:

$$c\boldsymbol{\tau} = \mathbf{S}\mathbf{K} \quad (3)$$

其中,  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_{N-1}] \in R^{(N-1) \times 1}$  矩阵由所有 TDOA 值构成,  $\mathbf{S} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_{N-1}] \in R^{(N-1) \times 3}$  矩阵由其他传感

器减去第 0 个传感器得到。

由于真实的 TDOA 值无法获得,因此实际测量结果均存在测量误差,用  $\Delta \boldsymbol{\tau}$  表示 TDOA 测量误差矢量,则:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} + \Delta \boldsymbol{\tau} \quad (4)$$

传统的 LLS 法通过求解式(3)得到如下估计结果:

$$\hat{\mathbf{K}} = c(\mathbf{S}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{W}^{-1} \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{W} = \text{diag}\{\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \dots \ \sigma_{N-1}^2\}$  是协方差矩阵。在不掌握具体误差向量  $\Delta \boldsymbol{\tau}$  的统计特性的情况下,  $\mathbf{W}$  可以是对角矩阵,可由信噪比来确定对角线上的元素,否则假定每个传感器的测量时钟误差为独立的高斯随机变量,且方差相等,则  $\mathbf{W}$  可简单取为<sup>[13]</sup>:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix} \in R^{(N-1) \times (N-1)} \quad (6)$$

根据 DOA 在三维空间的三角函数关系,方位角和俯仰角的估计值可分别计算如下:

$$\begin{cases} \hat{\phi} = \tan^{-1}(\hat{k}_y / \hat{k}_x) \\ \hat{\theta} = \tan^{-1}(\sqrt{\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2} / \hat{k}_z) \end{cases} \quad (7)$$

### 2.2 免声速迭代式模型

免声速迭代式测向模型中不存在声速参量,避免了声速参量的测量误差干扰 DOA 估计精度。从式(2)的 TDOA 测量方程组本身出发,采取两个方程相除的方式将声速参量消除掉。为降低方程的整体误差,作为除数的分母方程,其数值要尽可能大,这样才会使方程的残差尽可能地小。

本文在构建免声速迭代式测向模型时,将作为分母的传感器称为基准传感器,编号为  $J$ ,相应的到达时间差为  $\hat{\tau}_J$ 。如图 2 所示,依据之前的分析,  $\hat{\tau}_J$  值的选取要尽可能地大,即  $s_J \mathbf{K}$  应该尽可能地大。

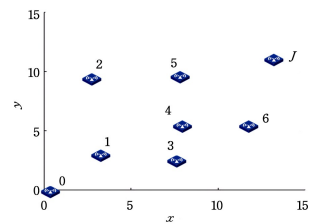


图 2 短基线阵列传感器配置示例图

Fig. 2 Short baseline array sensor configuration example

从传感器布设的角度来说,要选择离原点相对较远的传感器  $J$ ,才能将整体 TDOA 测量方程误差降低,并且保证传感器  $J$  的测量噪声  $n_j$  的取值也尽可能地小,最大程度地减小系统误差的产生。在此,仅说明免声速迭代式测向模型的原理,具体操作将在实验部分进行介绍。

在图 2 中,选取传感器  $J$  作为基准传感器,将式(2)中传感器  $i$  的方程与基准传感器  $J$  的方程相除,得:

$$\begin{aligned} \frac{c(\hat{\tau}_i + \Delta \hat{\tau}_i)}{c(\hat{\tau}_J + \Delta \hat{\tau}_J)} &= \frac{\hat{\tau}_i + \Delta \hat{\tau}_i}{\hat{\tau}_J + \Delta \hat{\tau}_J} \\ &= \frac{x_i \sin \theta \cos \phi + y_i \sin \theta \sin \phi + z_i \cos \theta}{x_J \sin \theta \cos \phi + y_J \sin \theta \sin \phi + z_J \cos \theta} \end{aligned} \quad (8)$$

将上式写成矢量形式,可得到免声速迭代式测向模型为:

$$f_i(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\hat{\tau}_i + \Delta \hat{\tau}_i}{\hat{\tau}_j + \Delta \hat{\tau}_j} = \frac{s_i \mathbf{K}}{s_j \mathbf{K}}, i=1, 2, \dots, N-2 \quad (9)$$

### 3 迭代式算法

#### 3.1 泰勒级数展开法

依据上述免声速测向模型,采用泰勒级数展开法进行迭代求解。将LLS法求解结果式(7)作为初始方位估计,假设 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\phi} \ \hat{\theta}]^T$ ,令方位估计的增量为 $\Delta \boldsymbol{\gamma} = [\Delta \phi \ \Delta \theta]^T$ ,在初始方位估计 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ 处对式(9)进行泰勒级数展开,仅保留前两项,可得:

$$f_i(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) + \mathbf{A}_i \Delta \boldsymbol{\gamma} = f_i(\boldsymbol{\gamma}) + \varepsilon_i, i=1, 2, \dots, N-2 \quad (10)$$

其中, $\mathbf{A}_i = [a_{i1} \ a_{i2}]$ ,  $a_{i1} = \frac{\partial f_i(\hat{\boldsymbol{\gamma}})}{\partial \hat{\phi}}$ ,  $a_{i2} = \frac{\partial f_i(\hat{\boldsymbol{\gamma}})}{\partial \hat{\theta}}$ ,  $\varepsilon_i$  包含时间差的测量误差以及线性误差。

如果所有  $f_i(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$  对  $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\phi} \ \hat{\theta}]^T$  的一阶偏导构成矩阵  $\mathbf{A} = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_{N-2}] \in R^{(N-2) \times 1}$ 。所有方位角真值对应的函数值与估计值对应的函数值的差值构成  $\mathbf{g} = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{N-2}] \in R^{(N-2) \times 1}$ , 其中  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_{N-2}] \in R^{(N-2) \times 1}$  为误差矩阵, 则式(10)的方程组可以表示为如下矩阵形式:

$$\mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

则式(11)的加权最小二乘解为:

$$\Delta \boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_T^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{A}^T \mathbf{W}_T^{-1} \mathbf{g} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{W}_T = \text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon})$  是  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的协方差矩阵,最后,根据式(13)来更新迭代估计:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k+1} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}^k + \Delta \boldsymbol{\gamma} \quad (13)$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k$  是第  $k$  次迭代的方位估计。连续求解方位估计,直至  $\Delta \boldsymbol{\gamma}$  小于阈值时停止。

结合前文对算法的描述,泰勒级数展开的操作步骤如下:

步骤1 根据式(5)计算初始的波达方向估计值 $\hat{\mathbf{K}}$ ;

步骤2 根据式(7)估计目标的初始方位 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\phi} \ \hat{\theta}]^T$ ;

步骤3 将初始估计代入(10)式,根据式(11)~式(12)计算方位估计的增量 $\Delta \boldsymbol{\gamma} = [\Delta \phi \ \Delta \theta]^T$ ;

步骤4 更新方位估计值 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}} + \Delta \boldsymbol{\gamma}$ ,再转至步骤3;

步骤5 若方位估计的增量 $\Delta \boldsymbol{\gamma} = [\Delta \phi \ \Delta \theta]^T$  小于

EPS,则停止迭代,输出 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\phi} \ \hat{\theta}]^T$ 。

#### 3.2 莱温伯格-马夸特法

依据式(9)的免声速模型,首先定义目标(成本)函数<sup>[12]</sup>,然后计算成本函数最小化时,所对应的方位估计,即得到所求的辐射源波达方向。

为了方便表述,由式(9)定义:

$$h_i(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\hat{\tau}_i}{\hat{\tau}_j} - \frac{s_i \mathbf{K}}{s_j \mathbf{K}}, i=1, 2, \dots, N-2$$

所有  $h_i(\boldsymbol{\gamma})$  构成矩阵:

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}) = [h_1(\boldsymbol{\gamma}) \ h_2(\boldsymbol{\gamma}) \ \dots \ h_{N-2}(\boldsymbol{\gamma})]^T \in R^{(N-2) \times 1}$$

则目标函数定义为:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{W}_T^{-1} \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}) \quad (14)$$

如果 $\hat{\tau}_i$ 的测量噪声为 $\eta_i$ ,由于测量噪声相互独立,TDOA测量值的信噪比方差为 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{N-2}^2$ ,则其协方差矩阵为 $\mathbf{W}_T$ 。

将LLS法的DOA估计结果式(7)作为初始方位估计 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\phi} \ \hat{\theta}]^T$ ,并在此处将目标函数进行泰勒级数展开,保留少于三阶项,得:

$$\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \Delta \boldsymbol{\gamma}) \approx \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) + \nabla^T(\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})) \Delta \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) \Delta \boldsymbol{\gamma} \quad (15)$$

其中, $\Delta \boldsymbol{\gamma}$ 为待确定的方向矢量,即方位估计增加矢量 $\Delta \boldsymbol{\gamma} = [\Delta \phi \ \Delta \theta]^T$ ;  $\nabla \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$ 是目标函数的梯度; $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$ 为目标函数的海森函数。

将式(15)右边取最小化,则:

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) \Delta \boldsymbol{\gamma} = -\nabla \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) \quad (16)$$

为了避免计算海森函数的二阶信息,将式(6)化简, $\nabla^T(\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}))$ 是 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ 上 $\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$ 的jacobian矩阵。由于:

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = 2 \nabla^T(\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})) \mathbf{W}_T^{-1} \nabla(\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})) \\ \nabla \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = 2 \nabla^T(\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})) \mathbf{W}_T^{-1} \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) \end{cases}$$

因此:

$$(\nabla^T(\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})) \mathbf{W}_T^{-1} \nabla(\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})) + \lambda \mathbf{I}) \Delta \boldsymbol{\gamma} = -\nabla^T(\mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})) \mathbf{W}_T^{-1} \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) \quad (17)$$

其中, $\lambda$ 为非负阻尼因数。如果目标函数减小得较快,则可以用一个更小的阻尼系数来增加增长矢量的量值,因而可以加速搜索过程。另一方面,如果迭代不能充分减小目标函数,那么应当增加阻尼系数,以便达到梯度下降的目的。

具体操作过程如下:给定 $k-1$ 次迭代的方位估计为 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}$ ,正阻尼因数为 $\lambda^{k-1}$ ,采用式(17)计算方位估计增加矢量 $\Delta \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}$ ,则第 $k$ 次方位估计为:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k = \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1} + \Delta \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1} \quad (18)$$

使用式(14)分别在 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k$ 处得到目标函数 $\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1})$ 和 $\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k)$ ,选定相应的步长参数 $\alpha$ ,然后将 $\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1})$ 与 $\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k)$ 进行比较。如果 $\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}) \leq \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k)$ ,则减小阻尼系数: $\lambda^k = \lambda^{k-1} / (1 + \alpha)$ 。如果 $\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}) > \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k)$ ,则增加阻尼系数: $\lambda^k = \lambda^{k-1} + (\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}) - \mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k)) / (1 + \alpha)$ 。

更新后的阻尼因数根据式(17)更新增长矢量,根据式(18)来更新方位估计,继续运行该过程,直至方位估计增加矢量足够小。

总结上述过程,可将莱温伯格-马夸特法的操作步骤总结如下:

步骤1 根据式(5)计算初始的波达方向估计值 $\hat{\mathbf{K}}$ ;

步骤2 根据式(7)估计目标的初始方位 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\phi} \ \hat{\theta}]^T$ ;

步骤3 假设 $k-1$ 次迭代的方位估计为 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}$ ,将其代入式(17)计算方位估计的增量 $\Delta \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}$ ;

步骤4 更新第 $k$ 次方位估计为 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k = \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1} + \Delta \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}$ ;

步骤5 将 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k$ 代入式(14)得到目标函数为 $L(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1})$ 和 $L(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k)$ ,选定相应的步长参数 $\alpha$ ,然后将 $L(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{k-1})$ 与 $L(\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k)$ 进行比较,更新阻尼系数 $\lambda^k$ ;

步骤6 将 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^k$ 作为新的方位估计,再次执行步骤3;

步骤7 若方位估计的增量 $\Delta \boldsymbol{\gamma} = [\Delta \phi \ \Delta \theta]^T$ 小于EPS,停止迭代,输出 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\phi} \ \hat{\theta}]^T$ 。

## 4 误差分析

### 4.1 克拉姆-拉奥下界

由式(9)可得测量方程为:

$$\hat{\tau}_i = \hat{\tau}_j \frac{s_i K}{s_j K} + \eta_i, i=1, 2, \dots, N-2 \quad (19)$$

其中, $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_{N-1}] \in R^{(N-2) \times 1}$ 。为方便表述观测噪声向量,令:

$$F_i = \hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j \frac{s_i K}{s_j K}, i=1, 2, \dots, N-2$$

$$\mathbf{F} = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_{N-2}] \in R^{(N-2) \times 1}$$

$$\nabla(\mathbf{F}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \phi} \ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} \right] \in R^{(N-2) \times 2}$$

其中,观测噪声 $\eta_i$ 相互独立,TDOA测量值的信噪比协方差为 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_{N-2}^2$ ,则其协方差矩阵为 $\mathbf{W} = \text{diag}\{\sigma_1^2 \ \sigma_2^2 \ \dots \ \sigma_{N-2}^2\}$ 。因此,条件概率密度函数为:

$$P(\hat{\boldsymbol{\gamma}}/\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N-2} \prod_1 \sigma_i^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{F})\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{F})\right\} \quad (20)$$

通过一些数学处理可以得出费歇尔信息矩阵如下:

$$\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\gamma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{FIM}_{\phi\phi} & \mathbf{FIM}_{\phi\theta} \\ \mathbf{FIM}_{\theta\phi} & \mathbf{FIM}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{FIM}_{\phi\phi} = \frac{\partial(\mathbf{F})^T}{\partial \phi} \mathbf{W}^{-1} \frac{\partial(\mathbf{F})}{\partial \phi} \\ \mathbf{FIM}_{\phi\theta} = \mathbf{FIM}_{\theta\phi} = \frac{\partial(\mathbf{F})^T}{\partial \phi} \mathbf{W}^{-1} \frac{\partial(\mathbf{F})}{\partial \theta} \\ \mathbf{FIM}_{\theta\theta} = \frac{\partial(\mathbf{F})^T}{\partial \theta} \mathbf{W}^{-1} \frac{\partial(\mathbf{F})}{\partial \theta} \end{cases}$$

得到克拉姆-拉奥下界为:

$$\mathbf{CRLB} = \mathbf{FIM}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}) = [\nabla^T(\mathbf{F})\mathbf{W}^{-1}\nabla(\mathbf{F})]^{-1} \quad (22)$$

### 4.2 泰勒级数展开法的误差分析

命题1 TS估计结果的均方差为:

$$\text{MSE}(\Delta \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \quad (23)$$

证明:当估计结果 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ 收敛于真值时,由于矩阵 $\mathbf{g} = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{N-2}] \in R^{(N-2) \times 1}$ 中每一个元素 $g_i$ 服从正态分布, $\mathbf{g}$ 也服从正态分布。则:

$$\text{bias}(\boldsymbol{\gamma}) = E[\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}] = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} E(\mathbf{g}) = 0 \quad (24)$$

由式(12)得:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\gamma}) &= E\left\{((\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g})((\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{g})^T\right\} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} E[\mathbf{g} \mathbf{g}^T] ((\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1})^T \end{aligned} \quad (25)$$

由于 $E[\mathbf{g} \mathbf{g}^T] = \mathbf{W}_T$ ,经过化简,可得:

$$\text{cov}(\Delta \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \quad (26)$$

将式(26)与克拉姆-拉奥下界进行比对,可得:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\gamma}) &= (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \\ &= \left( \left( \frac{1}{\tau_j} \nabla(\mathbf{F}) \right)^T \mathbf{W}^{-1} \left( \frac{1}{\tau_j} \nabla(\mathbf{F}) \right) \right)^{-1} \\ &= \left( \left( \frac{1}{\tau_j} \nabla(\mathbf{F}) \right)^T \left( \frac{1}{\tau_j^2} \mathbf{W} \right)^{-1} \left( \frac{1}{\tau_j} \nabla(\mathbf{F}) \right) \right)^{-1} \\ &= \mathbf{CRLB} \end{aligned}$$

此结果证明 TS算法可以达到CRLB下界。

### 4.3 莱温伯格-马夸特法的误差分析

命题2 LM算法估计结果的均方差为:

$$\text{MSE}(\Delta \boldsymbol{\gamma}) = (\nabla^T(\mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}))\mathbf{W}_T^{-1}\nabla(\mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma})))^{-1} \quad (27)$$

证明:

当估计结果 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ 收敛于真值时,得:

$$\text{bias}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = E[\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma}] = -[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})]^{-1} E[\nabla L(\hat{\boldsymbol{\gamma}})] \quad (28)$$

由式(16)可得:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\gamma}) &= \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})^{-1} E[\nabla L(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\nabla L(\hat{\boldsymbol{\gamma}})^T] \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})^{-1} \\ &= 4\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})^{-1} E[\nabla^T \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{W}_T^{-1} \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{W}_T^{-1} \nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma})] \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

经过化简,可得:

$$\text{cov}(\Delta \boldsymbol{\gamma}) = (\nabla^T \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{W}_T^{-1} \nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}))^{-1} \quad (30)$$

由于 $\mathbf{W}_T^{-1} = \frac{1}{\tau_j^2} \mathbf{W}^{-1}$ , $\nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{\tau_j} \nabla(\mathbf{F})$ ,将式(30)与克拉姆-拉奥下界进行比对,可得:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\gamma}) &= (\nabla^T \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{W}_T^{-1} \nabla \mathbf{h}(\boldsymbol{\gamma}))^{-1} \\ &= \left( \frac{1}{\tau_j} \nabla(\mathbf{F}) \right)^T \left( \frac{1}{\tau_j^2} \mathbf{W}^{-1} \right) \left( \frac{1}{\tau_j} \nabla(\mathbf{F}) \right)^{-1} \\ &= (\nabla^T(\mathbf{F})\mathbf{W}^{-1}\nabla(\mathbf{F}))^{-1} = \mathbf{CRLB} \end{aligned}$$

此结果证明 LM算法可以达到测向误差的CRLB。

## 5 仿真实验

### 5.1 参数设置

本文实验将测向误差的累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF)作为性能评估指标。CDF描述的是实数随机变量的概率分布情况,方位角误差就是辐射源的方位角与真实方位角之间的差值。俯仰角误差就是辐射源的俯仰角与真实俯仰角之间的差值。

模拟实验以声源测向为背景,具体参数设置如下。

(1)采用MATLAB工具进行仿真,每轮蒙特卡洛模拟次数为10000,迭代算法的精度阈值为 $10^{-5}$ 。

(2)由于带声速的TS法与LM法需要声音的速度参量,因此模拟现场测量的气象条件:气温 $20^\circ\text{C}$ ,风速 $10\text{m/s}$ ,风向为 $\pi/3$ 。野外环境下气象参数通常随着时间变化而发生改变,假定气温变化范围为 $\pm 5^\circ\text{C}$ ,风速变化范围为 $\pm 6\text{m/s}$ ,风向变化范围为 $\pm \pi/8$ 。根据文献[14],计算现场声速的估计值。

(3)设置传感器数目为6,各传感器位置随机部署,其 $x$ 轴和 $y$ 轴坐标在 $15\text{m}$ 半径的圆形内, $z$ 轴坐标在 $[-5, 5]\text{m}$ 的范围内。这与通常的声探测野外外部署条件相似,且DOA估计结果在合理范围内。

(4) TOA 测量误差服从高斯分布,不考虑测量的系统偏差问题。TOA 测量的标准偏差取值范围为 $[0, 15]$ (单位为 ms)。

(5) 考虑到不同环境的影响,声速测量误差服从高斯分布,其标准偏差 $\sigma_c$ 的取值分别为 5 m/s, 15 m/s, 30 m/s。

(6) 辐射源方位角的取值范围为 $[30^\circ, 60^\circ]$ ,俯仰角范围为 $[30^\circ, 60^\circ]$ 。

(7) 如果迭代后输出的结果包含如下情况:方位角超出其周期 $2\pi$ 的整数倍、俯仰角超出其周期 $\pi$ 的整数倍,则相应加上或者减去若干个各自的周期值,使得估计结果位于合理的角度范围。否则,在统计测向误差和精度时,将产生很大的不合理偏差。

## 5.2 实验设计步骤

依据前文的分析, $\hat{\tau}_j$ 值的选取要尽可能地大,即 $s_j \mathbf{K}$ 尽可能地大,从传感器布设来讲,也即要选择离原点相对较远的传感器 $J$ ,具体设计步骤如下:

(1) 在随机部署的 6 个传感器中随机选取一个传感器,将其放置在原点,坐标为 $(0 \ 0 \ 0)$ ,重新调整其余传感器的坐标,得到一组传感器阵列,最后一个位置为基准传感器,标号为 $J$ 。

(2) 假设在真实的波达方向上,距离原点 3 km 处,有一点状声源。计算声源到达各个传感器的时间,模拟真实场景,依据到达时间测量的标准偏差,为到达时间添加噪声,将最小的噪声赋值给传感器 $J$ ,获得到达时间阵列。选取点状声源是为了方便计算到达时间。由于距离较远,球面波与平面波效果几乎一致,可以近似。

(3) 将各个传感器与原点传感器的到达时间相减,可以得到到达时间差阵列。

(4) 利用传感器阵列、到达时间差阵列,采用 LLS 法可以计算辐射源波达方向的方位角估计值 $\hat{\phi}$ 和俯仰角估计值 $\hat{\theta}$ 。

(5) 依据波达方向估计值,计算传感器 $i$ ( $i=1, 2, \dots, N-1$ )与传感器 $J$ 之间的 $s_j \mathbf{K}$ ,找到 $s_j \mathbf{K}$ 的最大值,将对应的传感器 $i$ 放置在原点,调整其余传感器的坐标,将传感器 $J$ 仍然放在最后一个位置,重新得到传感器阵列,符号为 $\mathbf{S}$ 。

(6) 重新调整到达时间差阵列,阵列中最后一个位置为 $\hat{\tau}_J$ 。

(7) 最终的传感器阵列为 $\mathbf{S}$ ,到达时间差阵列为 $\boldsymbol{\tau}$ 。将 LLS 法得到的波达方向估计值 $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\phi} \ \hat{\theta}]^T$ 作为迭代的初值,依据免声速迭代式测向模型,采用泰勒级数展开法、莱温伯格-马夸特法来进行迭代运算,并与带声速参量的泰勒级数展开法、带声速参量的莱温伯格-马夸特法以及线性最小二乘法进行性能比较。

模拟实验结果中的对比算法如下:1)线性最小二乘测向法(LLS);2)带声速参量的泰勒级数展开算法(TS-1);3)免声速泰勒级数展开算法(TS-2);4)带声速参量的莱温伯格-马夸特算法(LM-1);5)免声速莱温伯格-马夸特算法(LM-2)。

## 5.3 DOA 估计结果

当 $\sigma_c$ 为 5 时,实验结果如图 3 所示;当 $\sigma_c$ 为 15 时,实验结

果如图 4 所示;当 $\sigma_c$ 为 30 时,实验结果如图 5 所示。综合图 3—图 5 可知,当 $\sigma_c$ 较大时,即声速 $c$ 标准偏差 $\sigma_c$ 取 15 和 30 时,免声速的 LM 法和 TS 法的性能最佳,LLS 法次之,带声速参量的 LM 法与 TS 法性能最差。当 $\sigma_c$ 较小时,即声速 $c$ 标准偏差 $\sigma_c$ 取 5 时,在俯仰角的测量精度方面,相比于免声速的 LM 法、TS 法、LLS 法,以及带声速参量的 TS 法,带声速参量的 LM 法的性能较好;在方位角的测量精度方面,免声速的 LM 法与 TS 法更具优势。总体来看,当声速测量存在偏差时,免声速的 LM 法与 TS 法可以表现出更好的性能。

免声速 LM 法与免声速 TS 法的模型参数中不存在声速参量,因此,当声速 $c$ 的标准偏差 $\sigma_c$ 较大时,免声速 LM 法与 TS 法受声速偏差的影响较小,而带声速参量的 LM 法和 TS 法依据的是传统的 TDOA 测向模型,其模型中存在声速参量,所以带声速参量的 LM 法和 TS 法受其的影响较大。当声速 $c$ 的标准偏差 $\sigma_c$ 较小时,带声速参量的 LM 法和 TS 法受其影响较小,在俯仰角测量精度上,由于免声速迭代式测向模型中引入了系统偏差,免声速 LM 法与 TS 法的精度相对带声速参量的 LM 法和 TS 法较差。

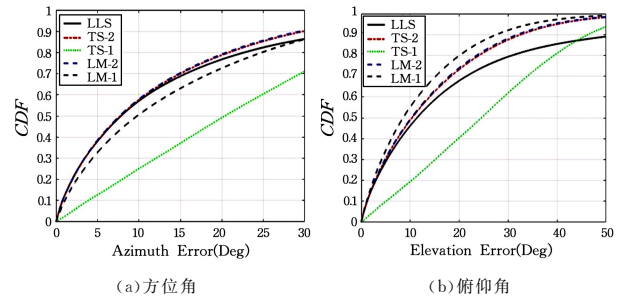


图 3  $\sigma_c$  为 5 时 DOA 估计误差的 CDF

Fig. 3 CDF of DOA estimation error when  $\sigma_c$  is 5

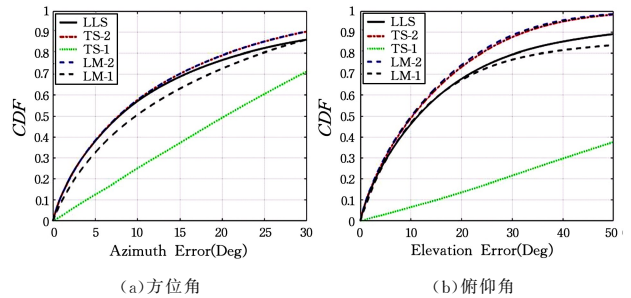


图 4  $\sigma_c$  为 15 时 DOA 估计误差的 CDF

Fig. 4 CDF of DOA estimation error when  $\sigma_c$  is 15

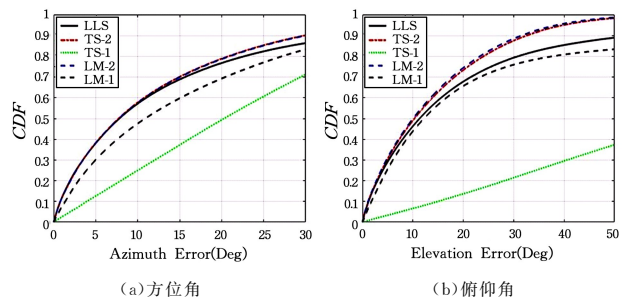


图 5  $\sigma_c$  为 30 时 DOA 估计误差的 CDF

Fig. 5 CDF of DOA estimation error when  $\sigma_c$  is 30

另外,从实验结果中可以看出,免声速的 LM 法、TS 法与 LLS 对方位角的估计性能较为接近,这主要是因为  $x$  轴和  $y$  轴坐标均在半径为 15 m 的圆内取值,平面的区域足够大,而且传感器数目足够多,非迭代式的 LLS 对方位角的估计性能也比较高,导致三者之间性能较为接近。

在进行 CDF 仿真实验时,对带声速参量的泰勒级数展开法和莱温伯格-马夸特法以及免声速的泰勒级数展开法和莱温伯格-马夸特法的不收敛率与平均迭代次数进行了统计,以此比较各个算法的性能。当  $\sigma_c$  为 5, 15, 30 时,算法的性能分别如表 1—表 3 所列。

表 1  $\sigma_c$  为 5 时迭代算法的性能

Table 1 Performance of iterative algorithm when  $\sigma_c$  is 5

迭代算法	不收敛率/%	平均迭代次数
TS-1	4.6	6.7
TS-2	3.4	5.6
LM-1	22.4	11.3
LM-2	0.7	10.8

表 2  $\sigma_c$  为 15 时迭代算法性能

Table 2 Performance of an iterative algorithm with  $\sigma_c$  at 15

迭代算法	不收敛率/%	平均迭代次数
TS-1	5.4	7.3
TS-2	4.2	6.1
LM-1	25.7	11.6
LM-2	0.8	10.8

表 3  $\sigma_c$  为 30 时迭代算法的性能

Table 3 Performance of iterative algorithm when  $\sigma_c$  is 30

迭代算法	不收敛率/%	平均迭代次数
TS-1	6.9	7.8
TS-2	4.8	6.5
LM-1	29.2	11.8
LM-2	1.0	10.9

根据表 1—表 3 的统计结果,当声速存在偏差时,带声速参量的泰勒级数展开法和莱温伯格-马夸特法的不收敛率以及平均迭代次数较高,随着声速偏差的增大,二者的不收敛率以及平均迭代次数也随之上升;而免声速泰勒级数展开法和莱温伯格-马夸特法的不收敛率以及平均迭代次数则较低,特别是免声速莱温伯格-马夸特法的不收敛率只有 0.8% 左右,平均迭代次数也较为稳定。综合来看,免声速的泰勒级数展开法和莱温伯格-马夸特法均具有较好的性能,并且免声速莱温伯格-马夸特法更具优势。

此外,实验中还统计了不同 TDOA 测量噪声时免声速 TS 法(免声速 LM 法)的测向精度优于带声速参量 TS 法(带声速参量 LM 法)的次数,即免声速 TS 法(免声速 LM 法)所占的比率。每个 TDOA 测量噪声级模拟 500 次,每次模拟时运行免声速 TS 法和带声速参量的 TS 法(免声速 LM 法和带声速参量的 LM 法) 200 次,统计其中免声速 TS 法(免声速 LM 法)的精度高于带声速参量的 TS 法(带声速参量的 LM 法)的次数,即免声速 TS 法(免声速 LM 法)所占的比率,统计结果采用平均统计箱线图(boxplot)显示。

本文根据声速标准偏差  $\sigma_c$  的 3 种取值情况分别进行实

验,具体参数同上。当  $\sigma_c$  取值为 5 时,实验结果如图 6 所示;当  $\sigma_c$  取值为 15 时,实验结果如图 7 所示;当  $\sigma_c$  取值为 30 时,实验结果如图 8 所示。

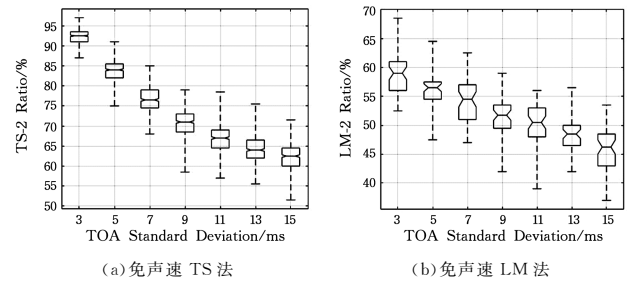


图 6  $\sigma_c$  为 5 时采用辨识的免声速迭代法所占的比率

Fig. 6 Ratio of free sound speed iteration method with recognition when  $\sigma_c$  is 5

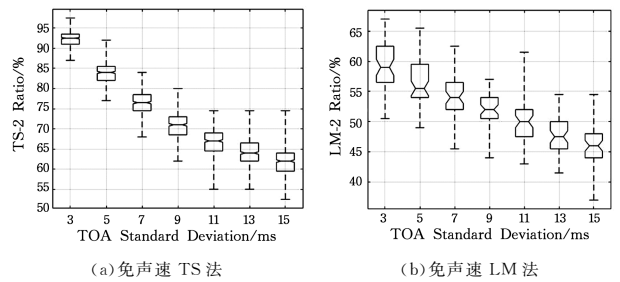


图 7  $\sigma_c$  为 15 时采用辨识的免声速迭代法所占的比率

Fig. 7 Ratio of free sound speed iteration method with recognition when  $\sigma_c$  is 15

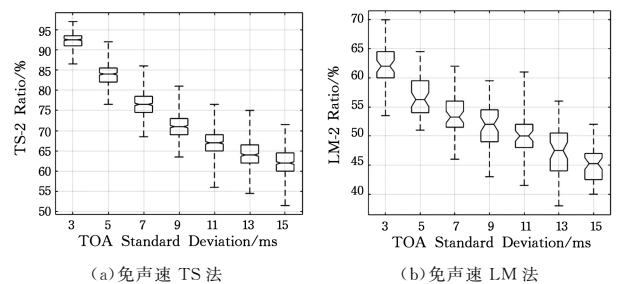


图 8  $\sigma_c$  为 30 时采用辨识的免声速迭代法所占的比率

Fig. 8 Ratio of free sound speed iteration method with recognition when  $\sigma_c$  is 30

这些箱线图的上下两条线分别表示样本的上下四分位数,中间的水平线为样本的中位数,上下的虚线表示样本的其余部分,样本最大值为虚线顶端,样本最小值为虚线底端。可以看出,在声速标准偏差  $\sigma_c$  的 3 种不同取值情况下,免声速 TS 法的占比较高,随着 TDOA 测量误差的增大,免声速 TS 法的占比下降,但也可以基本达到 60% 左右,总体来说,能采用免声速 TS 法的情形大约在 75%。在声速标准偏差  $\sigma_c$  为 3 种不同取值的情况下,免声速 LM 法的占比较高,随着  $\sigma_c$  的增大,免声速 LM 法的占比逐渐升高,即使随着 TDOA 测量误差的增大,免声速 LM 法的占比下降,但也基本可以达到 50% 左右,总体来说,能采用免声速 LM 法的情形大约在 50%。因此,可认为免声速迭代式测向法在实际应用中具有良好的性能,被使用的概率超过一半。

**结束语** 针对基于到达时间差测向问题,本文以脉冲声源探测为背景,将 TDOA 测向问题建模为最优化问题,采取 TDOA 测量方程相除的方式,消除声速参量,提出免声速迭代式测向模型,并采用莱温伯格-马夸特法和泰勒级数展开法进行迭代求解,无需声音传播的速度参数。文中推导了两种迭代式算法的均方差,并与免声速模型的测向误差 CRLB 进行了比对,证明其均能达到 CRLB。模拟实验表明,存在声速偏差时,本文提出的免声速迭代式 TDOA 测向法明显优于传统的线性最小二乘法和带声速迭代式方法,具有实用性强的特点。

然而,本文仅仅消除了声速对测量精度的影响,并未考虑传感器位置的误差,在数据的获取过程中,由于某种物理的、机械的或作业人员等观测条件的限制,传感器位置误差不可避免,进而会影响测向的结果。对传感器的位置误差予以考虑,并降低传感器位置误差的影响是下一步研究的方向。

### 参 考 文 献

- [1] HAO B J, LI Z, REN Y M, et al. Passive Multiple Disjoint Sources Localization Using TDOAs and GROAs[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(12): 2374-2381. (in Chinese)  
郝本建, 李赞, 任姮梅, 等. 基于 TDOAs 与 GROAs 的多信号源被动定位[J]. 电子学报, 2012, 40(12): 2374-2381.
- [2] YIN J, WAN Q, HOK C. A Simple and Accurate TDOA-AOA Localization Method Using Two Stations[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 23(1): 144-148.
- [3] 孙仲康, 郭福成, 冯道旺. 单站无源定位跟踪技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
- [4] GH Z, DZ F, H X, et al. An approximately efficient bi-iterative method for source position and velocity estimation using TDOA and FDOA measurements [J]. Signal Processing, 2016, 125: 110-121.
- [5] BARUCH B, DORON M A, ROSENHOUSE J, et al. On direction finding of an emitting source from time delays[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1999, 105(6): 3355-3363.
- [6] WANG S Q, NIE J N. An Approach of Performance Analysis and Optimization for Wireless Sensor Networks[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(4): 882-886. (in Chinese)  
王绍青, 聂景楠. 一种无线传感器网络性能评估及优化方法[J]. 电子学报, 2010, 38(4): 882-886.
- [7] NIELSEN R O. Estimation of azimuth and elevation angles for a plane wave sine wave with a 3-D array[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(11): 3274-3276.
- [8] WANG H D, SUN L M. A Study of Localization Mechanisms in Wireless Sensor Networks[J]. Computer Science, 2006, 33(4): 36-39. (in Chinese)  
王海东, 孙利民. 无线传感器网络的定位机制[J]. 计算机科学, 2006, 33(4): 36-39.
- [9] W Z, J B, J Y. Sensitivity analysis of static displacement using Taylor series expansion and combined approximate method[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2016, 53(5): 953-959.
- [10] MARQUARDT D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1963, 11(2): 431-441.
- [11] CHEN D Z, TANG H, WU J D. Research of TDOA Cooperative Location Algorithm Based on Chan and Taylor[J]. Computer Science, 2011, 38(10): 406-411. (in Chinese)  
陈德章, 唐皓, 吴季达. 基于 Chan 和 Taylor 的 TDOA 协同定位算法研究[J]. 计算机科学, 2011, 38(10): 406-411.
- [12] KEGEN Y, IAN S, JAY G Y. Ground-Based Wireless Positioning [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2012. (in Chinese)  
KEGEN Y, IAN S, JAY G Y. 地面无线定位技术[M]. 北京: 电子工业出版社, 2012.
- [13] FY Q, XW M. Source localization using TDOA and FDOA measurements based on Constrained Weighted Least Square algorithm[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(5): 1075-1081.
- [14] CUI X X, YU K G, LU S S. Direction finding for transient acoustic source based on biased TDOA measurement[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2016, 65(11): 2442-2453.