

多个体切换网络中带有时延通信的分布式次梯度优化算法

王俊雅 李甲地 李德权

(安徽理工大学数学与大数据学院 安徽 淮南 232000)

摘要 在一般的非平衡有向切换网络中,网络中的个体间可能存在通信时延现象。针对该情况,文中提出了多个体切换网络中带有时延通信的分布式次梯度优化算法。在该算法中,通过对通信网络进行扩维,将存在通信时延的无约束凸优化问题转化为无时延的无约束凸优化问题进行解决。利用非二次李雅普诺夫函数法证明了只要非平衡有向切换网络是周期强连通的以及通信时延有上界,那么基于时延通信的分布式次梯度优化算法就是收敛的。由于集中考虑了网络拓扑与通信时延,该算法更贴合实际情况。最后通过仿真实验验证了算法的有效性。

关键词 切换网络,通信时延,随机矩阵,次梯度方法,非二次李雅普诺夫函数

中图分类号 TP301 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.07.012

Distributed Subgradient Optimization Algorithm with Communication Delays for Multi-agent Switched Networks

WANG Jun-ya LI Jia-di LI De-quan

(School of Mathematics and Big Data, Anhui University of Science and Technology, Huainan, Anhui 232000, China)

Abstract In the general non-balanced directional switching network, there may be communication delays among agents in networks. In light of this, this paper proposed a distributed subgradient optimization algorithm with communication delays for multi-agent switched networks. In this method, the unconstrained convex optimization problem with communication delays is converted into the unconstrained convex optimization problem without communication delays by augmenting delay nodes in communication network. The convergence of the multi-agent distributed subgradient optimization algorithm with communication delays is proved by using the non-quadratic Lyapunov function method, as long as the non-balanced directional switching network is periodical strong connectivity and the communication delays are upper bounded. Because the network topology conditions and communication delay are both intensively considered, this algorithm is more general and practical. Finally, a simulation example was given to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords Switched networks, Communication delays, Stochastic matrix, Subgradient method, Non-quadratic Lyapunov function

1 引言

对于一般的分布式无约束凸优化问题,通常可以用梯度方法和非梯度方法进行研究,本文主要讨论梯度方法。一般的分布式无约束凸优化问题(式(1))是通过求得个体间协调信息交流的最小化 $f(x)$ 得到的:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \sum_{i=1}^N f_i(x) \\ \text{s. t. } x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $f_i(x)$ 是个体 i 的目标函数且仅为个体 i 所知。文献[1]首次提出基于次梯度的分布式优化算法:

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(k) x_j(k) - \alpha d_i(k) \quad (2)$$

解决上述无约束分布式凸优化问题(1),即是求得最优解

x^* 使 $f_i(x)$ 达到最优值 $f_i(x^*)$ 。因为 $f_i(x)$ 是可微的,所以最优解 x^* 满足条件 $\nabla f_i(x^*) = 0$ 。这样,问题(1)便等价于求解 N 个关于 x_1, x_2, \dots, x_N 的方程。由于 $f_i(x)$ 不一定可微,因此用梯度解决问题(1)存在一定的局限性,算法(2)基于次梯度来解决问题(1)。其中, α 是常步长, $d_i(k)$ 是 $f_i(x)$ 在 $x_i(k)$ 处的次梯度,在权重平衡图和次梯度有界的假设下,给出了多个体网络达到与局部目标函数最优值逼近的一个估计值。

权重平衡图意味着网络中的个体间的信息交流是互惠的,但在实际应用中不具有一般性。不仅如此,当个体间进行信息交流时,信息传输中的丢包行为以及异步时钟的存在或者其他故障,将使得个体不能及时接收到邻居个体发送的状态信息,从而导致个体间的通信出现时延现象。当多个体网络出现通信时延时,相应的信息交流图的平衡性和对称性遭

到破坏。文献[1-2]研究的次梯度优化算法都是基于一种理想的假设:多个体网络对应的信息交流图是权重平衡图,并且不考虑多个体网络中个体之间的信息交流存在时延的情况。因此,本文统一考虑网络拓扑条件和通信时延的情况下,可以忽略由通信时延导致的对信息交流图的平衡性和对称性的破坏。在非平衡有向切换网络中,研究存在通信时延的分布式次梯度优化算法有着很强的现实意义和应用背景。

文献[3]研究了基于一致有约束的分布式最优化问题,提出了分布式次梯度投影算法。文献[4]研究了在非平衡有向切换网络中的多个体分布式次梯度优化算法。文献[5-6]研究了有向网络中个体之间的交流,使用分布式次梯度算法克服了定向通信网络造成的不对称性。文献[7]研究了关于有向图的通信时延分布式优化问题。文献[8]研究了具有通信时延的多个体网络量化一致性问题,证明了只要通信时延有上界,提出的量化一致性协议就是可接受的。文献[9]研究了基于量化交流的分布式次梯度优化算法。在给定两种类型的量化器的条件下,分析了量化过程对算法收敛速度的影响,给出了收敛速度的误差界,突出了对量化水平的依赖。文献[10]研究了通信时延对分布式一致性以及优化算法的影响,提出了固定时延和随机时延两种时延模型,并通过非可逆Markov链的相关知识证明了算法的收敛性。

在上述文献研究的基础上,受文献[1]的启发,本文提出了多个体切换网络中带有时延通信的分布式次梯度优化算法。通过对通信网络进行扩维,将存在通信时延的非平衡有向网络的分布式无约束优化问题转化成无时延的非平衡网络的分布式无约束优化问题,并证明了基于时延通信的有向非平衡切换网络的多个体分布式次梯度优化算法的收敛性。值得注意的是,文献[10]对网络进行扩维后,对应的邻接矩阵发生了变化,即由双随机矩阵变成随机矩阵,从而说明网络中每个个体的重要性发生了变化,进而影响到所提算法;而本文由于考虑的是更具一般性的非平衡有向切换网络,因此统一考虑扩维后对网络的影响与网络的拓扑条件,从而在非平衡有向切换网络下尽可能减小通信时延对次梯度优化算法的影响。

2 基于通信时延的多个体分布式次梯度优化算法及相关假设

考虑含有 N 个个体的有向网络 $G=(V, E(t), A)$, 其中 $V=(1, 2, \dots, N)$ 表示节点集, $E(t)=V \times V$ 表示边集。有向边 $(j, i) \in E(t)$ 表示个体 j 向 i 发送信息。定义 i 的入度邻居集合 $N(i)=\{j | (j, i) \in E, i \neq j\}$, 同理可定义出度邻居集合。 $A=(a_{ij})_{N \times N}$ 表示权重矩阵, $a_{ij} \geq 0$ 刻画了个体 i 发送给个体 j 的信息的重要性。若 $\sum_{i=1}^N a_{ij}=1$, 则称矩阵 A 是随机矩阵; 若 $\sum_{j=1}^N a_{ij}=1$, 则称矩阵 A 是双随机矩阵。当 A 是双随机矩阵时, 说明网络中每个个体的重要性相同, 即所对应的信息交流图是平衡的。因此, 下面将考虑更一般的非平衡有向切换网络出现通信时延的情况, 提出了非平衡有向切换网络的多个体分布式次梯度优化算法来解决无约束凸优化问题(1)。

假设个体 i 发送信息给个体 j 的通信时延为 b , 即个体 j 经过 b 时间步长才接收到个体 i 发送的信息。为了将问题简化, 假设每条有向边 (i, j) 都存在固定时延 b_{ij} , 即每个信息离

开个体 i 需要 b_{ij} 次迭代才能到达个体 j 。在有自环的非平衡网络具有通信时延的情况下, 提出分布式次梯度优化算法:

$$x_i(t+1)=x_i(t)a_{ii}(t)+\sum_{j \in N_i} a_{ij}(t)x_j(t-b_{ij})-a_i(t)d_i(t) \quad (3)$$

其中, a_{ij} 表示随机矩阵 $A=(a_{ij})_{N \times N}$ 的第 i 行、第 j 列的元素, $a_i(t)$ 表示个体 i 在 t 时刻的步长, $d_i(t)$ 是 $f_i(x)$ 在 $x_i(t)$ 处的次梯度。

算法(3)包括3部分:1)每个个体自身状态信息的更新;2)每个个体与其邻居个体进行具有时延的信息交换;3)每个个体沿着其目标函数的次梯度方向进行迭代计算。当所有的 $b_{ij}=0$ 时, 所提出的存在时延的多个体分布式次梯度优化算法(3)即转化成了文献[4]中的无时延分布式次梯度优化算法。文献[1]中考虑的是平衡有向网络, 而由所提算法(3)转化的无时延分布式次梯度优化算法考虑的是文献[4]中更一般的非平衡有向切换网络。

对于通信图 G 、有向边 (i, j) 的固定时延 b_{ij} 以及目标函数 $f(x)$, 有如下假设:

假设 1 存在常量 $\omega > 0$, 使得对于所有个体 i , 有 $\|d_i\| \leq \omega, \forall d_i \in \partial f_i(x)$ 。其中, $\partial f_i(x)$ 表示目标函数 $f_i(x)$ 在 x 处的次梯度集合。

假设 2 假设时延存在最大误差界 B , 使得任意个体 i 满足 $0 \leq b_{ij} \leq B$, 即所有时延一致有上界。

假设 3 邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{N \times N}$ 是一个具有正对角元素的随机矩阵, 存在常量 $0 < \mu < 1$, 使得对于 $\forall i \in V, a_{ii}(x) = 1 - \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x) \geq \mu > 0$ 一致成立。其中, $a_{ij}(t) \in \{0\} \cup [\mu, 1]$ ($i \neq j$)。

假设 4^[11] 假设每个个体的目标函数 f 满足如下定义: 若函数 f 满足 $\forall x_1, x_2 \in R^n, \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq l \|x_1 - x_2\|$, 则称函数 $f: R^n \rightarrow R^n$ 是 l -Lipschitz ($l > 0$)。

假设 5 最优解集 X^* 是非空的。

假设 6 存在正整数 $T \geq 1$, 使得在每个时刻 $t(t \geq 0)$ 的子图联合图 $(V, E(t) \cup E(t+1) \cup \dots \cup E(t+T-1))$ 是强连通的。

假设 6 说明在某个周期 T 内, 每个子图的有向联合图是强连通的; 也就是说在该周期内, 个体之间进行了充分且有效的信息交流。

3 网络扩维

一般地, 在平衡有向网络中, 通信图所对应的邻接矩阵是双随机矩阵, 通过添加时延节点, 扩大所对应的邻接矩阵, 使其转化成随机矩阵。但是, 这种操作破坏了信息通信图的平衡性和对称性, 会对所使用的分布式优化算法产生影响。因此, 本文考虑更一般的非平衡有向切换网络, 将通过添加时延节点来进行网络扩维对算法的影响与网络拓扑条件进行统一考虑, 尽可能减小对所使用优化算法的影响。

若个体 i 发出信息后经过 b_{ij} 步延迟后到达个体 j , 则可在个体 i 和个体 j 之间添加 b_{ij} 个时延节点 $d_1, d_2, \dots, d_{b_{ij}}$ 来描述时延, 没有发生时延的个体之间则无需增加时延节点, 因此增加的时延节点的个数为 $b = \sum_{(i, j) \in E} b_{ij}$ 。

如图 1 所示, 设有 3 个个体的非平衡有向网络。假设个体 1 和个体 2 之间的时延为 2, 其他节点之间无时延, 如图 2 所示。

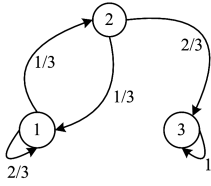


图 1 有 3 个个体的非平衡有向网络

Fig. 1 Unbalanced directed network with 3 individuals

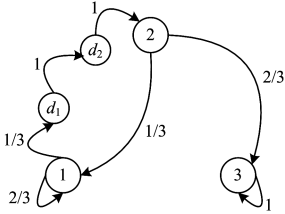


图 2 有向边(1,2)添加时延节点的非平衡有向网络

Fig. 2 Unbalanced directed networks of adding delay nodes to edge (1,2)

设在图 1 无时延的情况下通信网络对应的邻接矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

假设当图 1 所示的多个体网络中个体 1 和个体 2 之间存在时延 2,即图 2 中添加两个时延节点 d_1, d_2 后,无时延的邻接矩阵 A 可写成存在通信时延的邻接矩阵 A_1 (式(5)).具体过程如下:用时延链 d_1, d_2 代替有向边 (i, j) ,所有从个体 i 发送的信息经过时延节点 d_1 然后经过时延节点 d_2 到达个体 j .信息从个体 i 发送到第一个时延节点 d_1 的过程,可被视为无时延的信息交换过程,权重 $a_{1,N+1} = 1$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

由于考虑的是时变有向切换网络下的具有时延的分布式次梯度优化算法,假设网络中存在时延的个体是随机的两个个体,且时延为 b_{ij} ,因此当两个个体在某一时刻不连通时,可依然默认存在时延,须进行网络扩维,但对应的权重均为零.当个体 1 和个体 2 不进行信息交流时,以上述模型为例,其非平衡有向网络如图 3 所示.

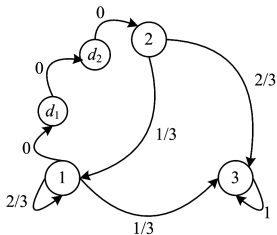


图 3 有向边(1,2)不连通时的非平衡有向网络

Fig. 3 Unbalanced directed network with disconnected directional edges (1,2)

此时,通信网络对应的邻接矩阵 A_3 如下:

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

简而言之,由于网络是非平衡有向切换的,因此当通信时延的个体间不连通时,依然考虑个体间存在时延.为了网络扩维后的统一性,将 N 维矩阵统一扩展为 $N+b$ 维矩阵.

在文献[1]的基础上,本文考虑了更一般的非平衡有向网络,即所对应的邻接矩阵是随机矩阵,弱化了文献[1]中关于网络的若干假设,从而使所提算法具有更广泛的应用范围.不仅如此,文献[12]还研究了在平衡有向网络中具有时延的分布式次梯度优化算法.网络扩维会破坏通信网络的平衡性与对称性,使通过网络扩维后的通信网络不一定是平衡有向网络,对所提算法的适用性产生了影响且只考虑了固定网络的情况.因此,本文考虑更一般的非平衡有向切换网络,将网络扩维对算法的影响统一为网络拓扑对算法的影响.

通过文献[8]中的网络扩维方法,无约束凸优化问题(1)可转化为如下形式:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \sum_{i=1}^{N+b} f_i(x) \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ f_i = 0, i = N+1, \dots, N+b \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

相应地,算法(3)可写为:

$$x_i(t+1) = x_i(t)a_{ii}(t) + \sum_{j \in N_i \cup \{b\}} a_{ij}(t)x_j(t) - \alpha_i(t)d_i(t) \quad (8)$$

其中, $\{b\}$ 代表增加的时延节点与个体 i 有直接信息交流的时延节点集合.

4 收敛性分析

在进行收敛性分析前,对算法(8)进行变形,将假设 3 代入算法(8),结合问题(7),得:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) \left(1 - \sum_{j \in N_i \cup \{b\}} a_{ij}(t) \right) + \sum_{j \in N_i \cup \{b\}} a_{ij}(t)x_j(t) - \alpha_i(t)d_i(t) \\ &= x_i(t) + \sum_{j \in N_i \cup \{b\}} a_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)) - \alpha_i(t)d_i(t) \end{aligned} \quad (9)$$

由于考虑的是时变有向切换网络,文献[1,10,12]中利用过渡矩阵 $\Phi(k,s)$ 证明算法收敛性的方法不再适用.下面利用非二次李雅普诺夫函数法^[13-14]以及文献[15-16]中的相关引理来证明算法的收敛性.定义:

$$\begin{aligned} M(t) &= \max_{i \in V} x_i(t), m(t) = \min_{i \in V} x_i(t) \\ \Delta r_{\max}(t) &= \max_{i \in V} \Delta r_i, \Delta r_{\min}(t) = \min_{i \in V} \Delta r_i \\ D(t) &= M(t) - m(t) \end{aligned}$$

$$\Delta R(t) = \max_{i \in V} \Delta r_i(t) - \min_{i \in V} \Delta r_i(t)$$

根据算法(7)的定义: $\Delta r_i(t) = -\alpha_i(t)d_i(t)$.

由假设 2 得 $\Delta R(t) = 2\alpha_i(t)w$;并由假设 3 和假设 6 得,可

将扩维后的个体集合 V^* 分割成 $C_0, C_1, \dots, C_L (C_0 = h)$, 其中 $L \leq N + b$. 由于满足文献[15]中的所有假设条件, 因此可引用文献[15]中的引理 3.1 进行类似定义.

引理 1 假设 3 和假设 6 成立, 有个体集合 V^* 的分割 C_1, C_2, \dots, C_L , 则对于任意 $l \in \{1, 2, \dots, L\} (L < N + b - 1)$, 一定存在一个 $\eta_l \geq 0$, 其中满足 $\eta_0 = \mu^{(N+b)T-1}$, 使得对于正整数 $p \in [lT, lT+1]$, 当 $k = s + p$ 时下面两式成立:

$$x_i(k) \geq m(s) + \sum_{q=0}^{p-1} \Delta r_{\min}(s+q) + \eta_l(x_h(s) - m(s)) \quad (10)$$

$$x_i(k) \geq M(s) + \sum_{q=0}^{p-1} \Delta r_{\max}(t_1+q) - \eta(M(s) - x_h(s)) \quad (11)$$

进一步地, 令 $\eta = \mu^{\frac{1}{2}(N+b)(N+b-1)T-1}$, 则对于 $\forall l \in \{1, 2, \dots, L\} (L < N + b - 1)$, 使 $\eta_l \leq \eta$ 成立. 令 $s = k, t_1 = k = t + LT + T - 1$, 则有:

$$M(t_1) \leq M(t) + \sum_{q=t}^{t_1} \Delta r_{\max}(q) - \eta(M(t) - x_h(t)) \quad (12)$$

$$m(t_1) \geq m(t) + \sum_{q=t}^{t_1} \Delta r_{\min}(q) + \eta(x_h(t) - m(t)) \quad (13)$$

由式(12)、式(13)以及 $D(t)$ 的定义得出如下引理.

引理 2 设假设 3 和假设 6 成立. 令 $\eta = \mu^{\frac{1}{2}(N+b)(N+b-1)T-1}$, 对于任意的 $t > 0$, 令 $t_1 = t + LT + T - 1$, 则有:

$$D(t_1) \leq (1 - \eta)D(t) + \sum_{q=t}^{t_1} \Delta R(q) \quad (14)$$

定理 1 令步长为常数 α , 个体初始状态值 $x_i(0)$ 满足 $\|x_i(0)\| = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i(0)| \leq C_x, D(0) = M(0) - m(0) \leq C_\delta$, 其中 C_x 与 C_δ 为非负常数, 则如下不等式成立.

$$\begin{aligned} & \|f(M(k)) - f(m(k))\| \\ & \leq l \left(1 - \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}(N+B)(N+B+1)-1}}\right)^{\frac{t-1}{(N+B)T-1}} C_\delta + 2l((N+B)T - \\ & 2) \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}(N+B)(N+B+1)-1}} \alpha \omega \end{aligned}$$

证明: 令 s 为满足下式的最大整数:

$$s((N+b)T-1) = S \leq t < (s+1)((N+b)T-1)$$

由定理 1 可得:

$$\begin{aligned} D(t) & \leq (1 - \eta)D(S) + \sum_{q=S}^{t-1} \Delta R(q) \\ & \leq (1 - \eta)^s D(0) + (1 - \eta)^{s-1} \sum_{q=S}^{t-1} \Delta R(q) + \dots + \\ & (1 - \eta) \sum_{q=S}^{t-1} \Delta R(q) \\ & \leq (1 - \eta)^{\frac{t}{(N+B)T-1}} \frac{1}{1 - \eta} D(0) + \Omega(t) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \Omega(t) & = (1 - \eta)^{s-1} \sum_{q=S}^{t-1} \Delta R(q) + \dots + (1 - \eta) \sum_{q=S}^{t-1} \Delta R(q) \\ & \leq 2((N+b)T-2) [(1 - \eta)^{s-1} + \dots + (1 - \eta)] \alpha \omega \\ & = 2((N+B)T-2) \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}(N+B)(N+B+1)T-1}} \alpha \omega \end{aligned}$$

因此, 引理 2 中的式(14)可以写成:

$$\begin{aligned} D(t) & \leq (1 - \eta)^{\frac{t}{(N+B)T-1}} \frac{1}{1 - \eta} D(0) + 2((N+B)T - 2) \\ & \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}(N+B)(N+B+1)T-1}} \alpha \omega \end{aligned} \quad (15)$$

由式(15)与假设 4, 有:

$$\begin{aligned} & \|f(M(t)) - f(m(t))\| \\ & \leq l \|D(k)\| \\ & \leq l \left(1 - \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}(N+B)(N+B+1)-1}}\right)^{\frac{t-1}{(N+B)T-1}} C_\delta + 2l((N+B)T - \\ & 2) \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}(N+B)(N+B+1)-1}} \alpha \omega \end{aligned}$$

上式表明, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由式(15)可知网络中的所有个体达到一致, 即 $x_1 = x_2 = \dots = x_N = x^*$; 并且由定理 1 可知, 所有目标函数 f_i 可达到最优值 f^* , 即所有个体的目标函数收敛到最优值的邻域内; 同时, 收敛速度与网络个体数、状态初始值、步长, 以及周期 T 、时延上界 B 、次梯度上界 ω 有关.

5 仿真分析

下面将通过仿真实验来验证理论结论的正确性. 如图 4 所示, 假设有 4 个个体的周期切换多个体网络, 并设周期 $T=3$.

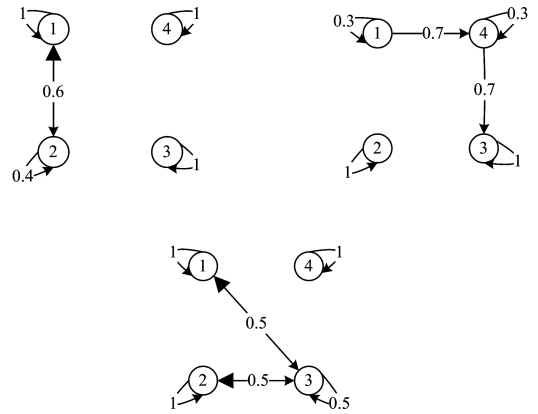


图 4 具有 4 个个体的周期切换网络

Fig. 4 Cycle switching network with 4 individuals

设目标函数为二次函数, 即非平衡有向切换网络中个体对应的局部目标函数 $f_i(x) = (x - a_i)^2, a_i \in R, i = 1, 2, 3, 4$. 由假设可知, 增加的虚拟节点即时延个体所对应的局部目标函数 $f_j(x) = 0, i = 5, 6, 7, 8$, 其中 a_i 为随机选取的实数. 利用 MATLAB 软件, 在多个体网络存在通信时延和无通信时延这两种情况下, 运行本文所提出的多个体分布式次梯度优化算法, 并分别绘制多个体网络中每个个体的状态轨迹图以及全局目标函数的轨迹图.

如图 5 所示, 横轴表示仿真实验的迭代次数, 纵轴表示多个体网络中个体的状态值. 当该算法迭代到 70 次左右时, 个体状态值收敛到最优值为 3.2 的邻域内, 网络中的个体达到一致. 图 6 表明, 当多个体网络中个体间通信出现通信时延时, 该算法经过 150 次左右的迭代, 仍然可使个体状态值收敛到最优值为 3.2 的邻域内; 但是相较于没有通信时延的情况, 收敛速度较慢, 并且存在一定的误差. 图 7 中横轴表示仿真实验的迭代次数, 纵轴表示多个体网络的全局目标函数值, 虚线表示理论上的最优值. 当存在通信时延时, 在该算法运算下仍然可使全局目标函数收敛到全局最优值为 150 的邻域内, 但是相较于不存在通信时延的情况, 收敛速度明显较慢.

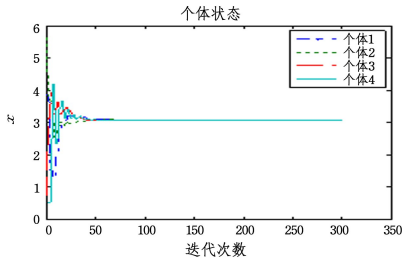
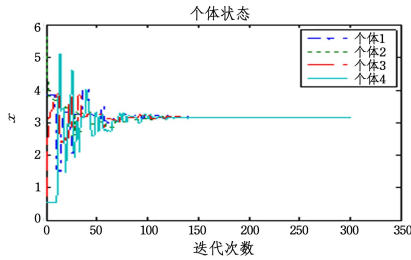
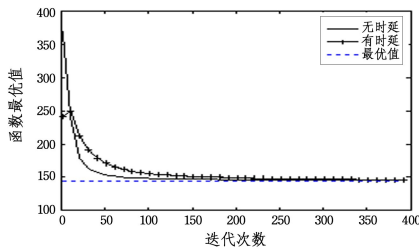
图5 无通信时延的4个个体的状态 $x(t)$ 轨迹图Fig. 5 State trajectories $x(t)$ of four individuals without communication delay图6 存在通信时延的4个个体的状态 $x(t)$ 轨迹图Fig. 6 State trajectories $x(t)$ of four individuals with communication delay

图7 通信时延对多个体分布式次梯度优化算法的影响

Fig. 7 Influence of communication delay on multi-agent distributed subgradient optimization algorithm

结束语 在文献[1,4,7-8,12]研究的基础上,文中考虑了非平衡有向切换网络中个体间通信存在时延的分布式次梯度优化算法,通过网络扩维,把有时延转化为无时延的情况,考虑了更一般的网络拓扑,把网络扩维对算法的影响降到最低;利用非二次李雅普诺夫函数法证明了非平衡有向切换网络中存在时延时多个体分布式次梯度算法是收敛的;最后通过仿真算例验证了算法的有效性,并与无时延情形进行了比较,说明了通信时延对算法收敛速度的影响。

参考文献

[1] NEDIC A, OZDAGLAR A. Distributed subgradient methods for Multi-Agent optimization [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(1): 48-61.

[2] LEE S, NEDIC A. Distributed random projection algorithm for convex optimization [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2013, 7(2): 221-229.

[3] LIU S, QIU Z, XIE L. Convergence rate analysis of distributed

optimization with projected subgradient algorithm [J]. Automatica A Journal of Ifac the International Federation of Automatic Control, 2017, 83: 162-169.

- [4] LI J D, LI D Q. Distributed Subgradient Optimization Algorithm for Multi-agent Switched Networks [J]. Computer Science, 2018, 45(1): 229-232. (in Chinese)
- 李甲地, 李德权, 切换网络分布式次梯度优化算法[J]. 计算机科学, 2018, 45(1): 229-232.
- [5] XI C G, KHAN U A. Distributed Subgradient Projection Algorithm Over Directed Graphs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 3986-3992.
- [6] MAKJDOUMI A, OZDAGLAR A. Graph balancing for distributed subgradient methods over directed graphs [C] // Proceedings of the 2016 IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2016: 1364-1371.
- [7] NEDIC A, OLSHEVSKY A. Distributed optimization over time-varying directed graphs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 60(3): 601-615.
- [8] ZHANG D D. On quantized consensus multi-agent networks under communication delays [J]. Journal of Heifei University of Technology, 2015, 38(7): 923-928. (in Chinese)
- 张丹丹. 具有通信时延的多个体网络量化一致性分析[J]. 合肥工业大学学报, 2015, 38(7): 923-928.
- [9] LI J, CHEN G, WU Z, et al. Distributed subgradient method for multi-agent optimization with quantized communication [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2017, 40(4): 1201-1213.
- [10] TSIANOS K I, RABBAT M G, et al. Distributed Consensus and Optimization under Communication Delays [C] // Proceedings of the 2011 Annual Allerton Conference under Communication, Control, and Computing. IEEE Press, 2011: 974-982.
- [11] YANG S F, LIU Q S, WANG J. Distributed Optimization Based on a Multi agent System in the Presence of Communication Delays [J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Systems, 2017, 47(5): 717-728.
- [12] LIU J, LI D Q, YIN Z X. Distributed subgradient method for multi-agent optimization with communication delays [J]. Journal of Heifei University of Technology, 2013, 36(5): 559-565. (in Chinese)
- 刘军, 李德权, 殷志祥. 具有通信时延的多个体分布式次梯度优化算法[J]. 合肥工业大学学报, 2013, 36(5): 559-565.
- [13] TSITSIKLIS J N. Problems in decentralized decision making and computation [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1984: 1-134.
- [14] TSITSIKLIS J N, ATHANS M. Convergence and asymptotic agreement in distributed decision problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1983, 29(1): 692-701.
- [15] ZHU M H, MARTINEZ S. Discrete-time dynamic average consensus [J]. Automatica, 2014, 50(12): 3131-3138.
- [16] SUNDARAM S, GHARESI B. Distributed Optimization Under Adversarial Nodes [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, PP(99): 1.