

基于 MQHOA 优化算法的尺度变化行为

周岩¹ 王鹏¹ 辛罡^{2,3} 李波^{2,3}

(西南民族大学计算机科学与技术学院 成都 610225)¹

(中国科学院成都计算机应用研究所 成都 610041)² (中国科学院大学 北京 100049)³

摘要 尺度收敛是智能优化算法求解过程的重要环节,不确定性原理和量子隧道效应佐证了这一重要性。在多尺度量子谐振子算法(Multi-scale Quantum Harmonic Oscillator Algorithm, MQHOA)的优化迭代过程中,通过调整尺度收敛幅度,能够影响算法的求解效果和运算性能。对尺度变化进行研究,定义函数在 2 维状态下对应的最佳尺度收敛参数为该函数的尺度系数(Scale Factor, SF)。尺度系数可以作为衡量函数尺度结构复杂程度的定性判据参考,能够协助算法针对不同函数采用最合适的收敛尺度来寻求最优解。

关键词 优化算法,多尺度量子谐振子算法(MQHOA),尺度收敛

中图分类号 TP301.6 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2019.08.044

Scale Change Based on MQHOA Optimization Algorithm

ZHOU Yan¹ WANG Peng¹ XIN Gang^{2,3} LI Bo^{2,3}

(School of Computer Science and Technology, Southwest Minzu University, Chengdu 610225, China)¹

(Chengdu Institute of Computer Application, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610041, China)²

(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)³

Abstract Scale convergence is an important part of the computational process of intelligent optimization algorithm. The uncertainty principle and quantum tunneling effect prove this importance. In the optimization iterative process of the multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm (MQHOA), by adjusting the scale convergence range, the algorithm's solution effect and computational performance can be affected. The scale variation was studied, and the optimal scale convergence parameter corresponding to the function in the 2-dimensional state was defined as the scale factor of the function. The scale factor can be used as a qualitative criterion for measuring the complexity of the function scale structure. The scale factor can help the algorithm to find the optimal solution by using the most suitable convergence scale for different functions.

Keywords Optimization algorithm, Multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm, Scale convergence

1 引言

多尺度操作广泛存在于各类计算智能优化算法中。如 QPSO 的特征变量^[1-2]、量子退火算法的温度递减^[3-4]、粒子群算法的惯性权重^[5]等,都是通过算法在不同尺度下的收敛迭代逐步向全局最优解逼近的。通过调整尺度的幅度,能够改变算法的收敛速度和算法的求解效果,从而对算法的性能产生重要影响。

随着量子理论不断发展,人们尝试通过量子理论体系来构造更有效的算法。多尺度量子谐振子算法 MQHOA 是

一种模仿量子谐振子波函数能级模型的优化算法,由文献[6]在 2013 年首次提出。与其类似的有具备良好收敛特性的量子粒子群算法 QPSO^[7-9],该算法采用 δ 势阱得到的量子波函数来构造算法^[10]。MQHOA 算法依据物理谐振子势能和量子波函数两种物理解释,类比了谐振子势阱在不同能级下的量子波函数,构造了一种以多个高斯采样为基本操作的多尺度采样搜索方法,将多个高斯采样的迭加作为算法波函数来描述当前最优解的概率分布^[11-14]。MQHOA 算法能以较少的迭代次数准确获取全局最优解^[15]。文献[16]研究了具有多个全局最优(多模)的求解问题,文献[17]研究了 MQHOA

到稿日期:2018-07-20 返修日期:2018-09-28 本文受国家自然科学基金资助项目(60702075),国家自然科学基金面上项目(71673032),四川省教育厅 2018 一般项目(18ZB0623),西南民族大学中央高校基本科研业务费专项资金项目(2019NYB22)资助。

周岩(1976—),男,硕士生,主要研究方向为云计算、并行计算、量子算法;王鹏(1975—),男,博士,教授,CCF 会员,主要研究方向为云计算、并行计算、量子算法, E-mail: wp002005@163.com(通信作者);辛罡(1983—),男,博士生,主要研究方向为云计算、量子算法;李波(1980—),男,博士生,主要研究方向为云计算、量子算法。

算法的并行化问题,文献[18]研究了 MQHOA 算法选取聚类中心的问题。同时, MQHOA 算法在组合优化^[19]、多峰优化^[20]等研究领域也取得了不错的进展。

从量子理论分析,在 MQHOA 算法的优化过程中,对收敛幅度进行调整会影响算法的性能和最优解的求解效果。通过对标准测试函数在不同维度下的尺度收敛变化进行比较可以发现,不同的函数在不同的维度下均有一个最佳的尺度收敛幅度 λ_{scale} ,当函数维度改变后, λ_{scale} 值也会相应改变。本文将二维函数的 λ_{scale} 定义为函数的最优尺度系数,以此作为定性判定目标函数结构复杂度的方法。将算法最优解的成功率和算法进化次数的比较作为这一方法的衡量标准。

2 MQHOA 算法的基本原理及实现过程

2.1 MQHOA 算法的物理原理

MQHOA 算法是王鹏等^[6]受物理谐振子势能运行态势和量子理论的启发而提出的。量子力学中采用波函数(Wave Function)来描述事物微观系统的状态。量子系统中的薛定谔方程是对微观粒子出现概率的描述:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

其中, \hbar 为普朗克常数, m 为质量, $V(x)$ 为势阱, $\psi(x)$ 为波函数, E 为能量。该方程描述了在势阱 $V(x)$ 约束下粒子的概率分布情况。MQHOA 算法引入了定态薛定谔方程,将优化问题中的目标函数 $f(x)$ 作为定态薛定谔方程中的势阱,即 $V(x) = f(x)$ 。这样就可以将函数优化问题转化为求粒子在势阱约束条件下的基态波函数问题^[13]。在量子系统中,粒子会以大概率出现在势阱最低点附近,因此基态波函数的概率分布恰恰可以对应为目标函数最优解的概率分布。但通常情况下,薛定谔方程无法求出复杂势阱的精确波函数。在量子物理中,粒子在平衡位置附近的复杂振动常用谐振子势来近似描述。从物理的势能角度分析, MQHOA 算法是以谐振子势能场上的泰勒展开二阶波动曲线来逼近一个复杂目标函数。用泰勒序列将复杂目标函数 $f(x)$ 在全局最优解位置 x_0 的附近展开,具体如下:

$$V(x) = f(x)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots \quad (2)$$

其中, $f(x_0)$ 为常数。在最优解位置 x_0 处,目标函数的一阶导数 $f'(x_0)$ 等于 0,去除高次项,保留二次项之后得到:

$$V(x) = f(x) \approx \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \quad (3)$$

在最优解位置 x_0 附近,用谐振子势阱来近似表示复杂目标函数 $f(x)$,这样,求解目标函数 $f(x)$ 的最小值问题就可以转换为求解谐振子势阱约束下的基态波函数问题(谐振子约束态问题)。将 $f(x)$ 代入定态薛定谔方程可得到:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\right)\psi(x) = E\psi(x) \quad (4)$$

其中, k 为谐振子的倔强系数。根据量子理论可以准确获得谐振子势阱约束下的波函数,不同能级的谐振子波函数如图 1 所示。

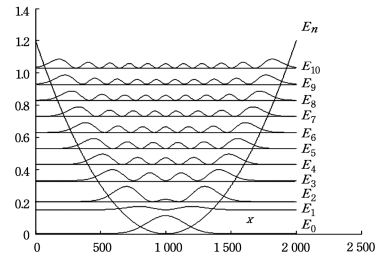


图 1 不同能级下的谐振子波函数示意图

Fig. 1 Harmonic wave function at different energy levels

量子力学中,波函数代表相关粒子出现在该位置的概率。图 1 显示了量子谐振子波函数概率密度从高能态到基态的变化过程,即由高能态多个高斯分布的概率叠加逐渐收敛到单一高斯分布的稳定状态。因此, MQHOA 算法的基本采样概率函数为高斯分布函数。波函数变化的过程反映了在同一尺度下算法的多个高斯采样区域不断聚焦到一个高斯分布的过程^[14]。

2.2 MQHOA 算法的实现过程

MQHOA 算法通过随机生成 k 个采样点,逐级进行能级稳定、能级下降、尺度缩减 3 个迭代过程,如此循环,从而实现目标函数最优解概率的求解。能级稳定过程中, MQHOA 算法将采样点对应的函数值达到当前采样的最小值作为当前能级稳定的判断依据。能级达到暂稳态后,用 k 个采样位置的平均值替换采样位置中最差解的位置,实现系统能级的下降,并开始在下一个低能级上进行能级稳定过程。用采样点平均值取代最差值,能够确保解空间采样的多样性。当采样点的标准差小于当前尺度时,算法认为在当前尺度下达到了最低能量状态,即基态,此时进入尺度缩减过程。用当前尺度除以一个大于 1 的自然数,使尺度收缩,让算法在更小尺度范围内重复能级从高到低的迭代过程。算法对函数从大尺度到小尺度的收缩,相当于逐步从全局搜索过渡到局部搜索。从量子波函数的角度看,这等效于用不同尺度的高斯概率探针目标函数的最优解概率进行探测。多尺度探针可以通过算法的进化次数和最优解的成功率有效将目标函数的尺度结构反映出来^[13]。

MQHOA 算法的伪代码如下:

```
Initialize k,  $\sigma_{min}$ , LB, UB,  $\sigma_s = UB - LB$ 
Randomly generate  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) in domain [LB, UB]
Calculate the standard deviation  $\sigma_k$  for all  $x_i$ 
Do
  Do
    Do
      Set Flagstable = 0
       $\forall x_i$ , generate  $x_i' \sim N(x_i, \sigma_s^2)$ 
       $\forall x_i$  and  $x_i'$ , if  $f(x_i') < f(x_i)$  then  $x_i = x_i'$ , Flagstable = 1
    While (Flagstable = 1)
    Update the worst solution:  $x^{worst} = x^{mean}$ 
    Calculate the standard deviation  $\sigma_k$  for all  $x_i$ 
  While ( $\sigma_k > \sigma_s$ )
   $\sigma_s = \sigma_s / \lambda$ 
While ( $\sigma_s > \sigma_{min}$ )
Output  $x^{best}$ ,  $f(x^{best})$ 
```

伪代码中,目标函数的定义域为 $[LB,UB]$,算法的初始尺度 $\sigma_s=UB-LB$ 。算法定义采样区域的个数为 k , σ_s 是算法在每一维度的收敛尺度, σ_{\min} 是算法的最小收敛尺度。设置标签 $Flag_{\text{stable}}=0$ 是能级稳定的判断依据,当 $Flag_{\text{stable}}$ 不再被更改时,说明 $f(x_i')$ 不再小于 $f(x_i)$,表明 k 个采样点对应的函数值达到当前采样的最小值,采样点不再发生移动,当前能级达到暂稳态,算法进入能级下降过程。此时,用采样平均值替换最差值,即 $x^{\text{worst}}=x^{\text{mean}}$ 。当上一次采样点的标准差小于或等于当前尺度($\sigma_k \leq \sigma_s$)时,算法达到当前能级的基态,进入尺度收缩过程。将当前尺度除以参数 λ ,即 $\sigma_s = \sigma_s / \lambda$,使算法在更小的尺度下重复能级由高到低的迭代过程。当采样点标准差小于或等于设定的最小尺度 σ_{\min} ($\sigma_s \leq \sigma_{\min}$)时,算法停止并输出 x_i 中的最优结果。算法中3个迭代过程的收敛条件分别是:1)暂稳态判据 $f(x_i') \geq f(x_i)$;2)尺度收敛判据 $\sigma_k \leq \sigma_s$;3)算法终止判据 $\sigma_s \leq \sigma_{\min}$ 。

对于高维目标函数,针对每一维,分别独立生成在该维上的采样值。各维上的 k 个采样点独立进行收敛条件的判断。只有当所有维度的采样点均满足各自迭代过程的收敛判据时,该迭代过程才收敛。

2.3 MQHOA 算法的尺度收敛与量子隧道效应

MQHOA 算法通过尺度收敛,从全局搜索过渡到局部搜索。图2描述了不同尺度下波函数的运行状态,图2(a)为较大尺度下波函数的收敛态势,图2(b)为较小尺度下波函数的收敛态势。由此看出,不同尺度的高斯探针可以反映出目标函数的尺度结构^[11]。

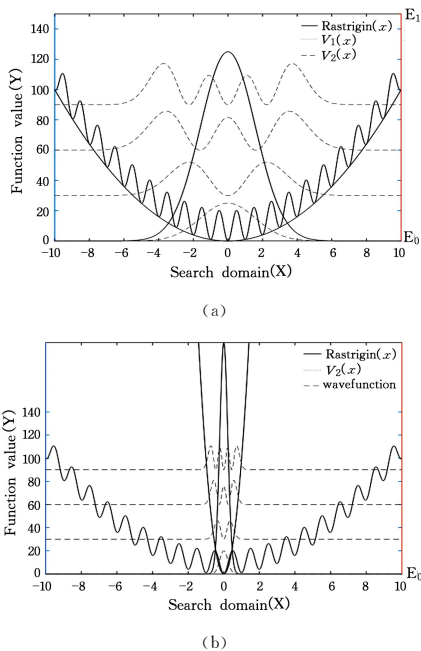


图2 不同尺度下波函数的收敛态势

Fig. 2 Convergence state of wave function at different scales

MQHOA 算法在整个搜索过程中进行采样操作的核心机制是当前 k 个采样位置 x_i 所对应的 k 个高斯概率分布 $N(x_i, \sigma_s^2)$,我们定义算法当前的波函数 $\psi(x)$ 为 k 个高斯概率分布 $N(x_i, \sigma_s^2)$ 的叠加:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^k N(x_i, \sigma_s^2) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma_s^2}} \quad (5)$$

从概率上理解,波函数 $\psi(x)$ 就是当前迭代过程中全局最优解的可能概率分布。MQHOA 算法的迭代过程是为了使波函数的概率分布向最优解位置集中^[13]。

尺度变换的必要性来源于不确定性原理,不确定性原理普遍适用于函数优化问题。对于优化算法来说,全局搜索精度和局部搜索精度通常无法完全兼顾。MQHOA 算法的物理模型源于量子谐振子模型,因此存在量子理论中的不确定性关系,即单一尺度的量子谐振子收敛过程无法同时获得精确的全局搜索精度和局部搜索精度,也就是单一尺度下算法不能同时精确测定最优解的宏观位置(全局搜索)和微观位置(局部搜索),必须要进行从大尺度收缩到小尺度的尺度变换,才能兼顾全局搜索的广度和局部搜索的精度,从而找到函数的全局最优解。测不准原理具有深刻的物理内涵,它解释了MQHOA 算法采用尺度收敛的原因^[21]。

从量子理论分析,随着尺度的收缩,量子隧道效应会逐渐减弱,算法跳出局部最优的概率也就逐渐变小。图3给出了双井函数曲线, $[a,b]$ 为全局最优区域。在大尺度 Scale A 下,量子隧道效应明显,落入局部最优区域的高斯采样有较大概率跳出局部最优,可使采样位置进入全局最优区域。对于小尺度 Scale B,跳出局部最优区域的概率就小得多,易随采样的进行陷入局部最优而无法跳出。从微分 $\int_a^b \psi(x) dx$ 计算波函数在区间 $[a,b]$ 的采样概率,表征了发生量子隧道效应的概率。从图3中阴影部分的面积可以看出,大尺度下的采样位置跳出局部最优的概率会更大。

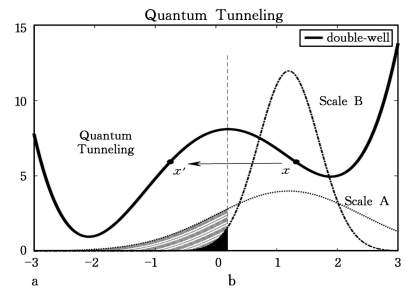


图3 量子隧道效应示意图

Fig. 3 Schematic diagram of quantum tunneling effect

前文从理论角度证明了算法尺度收敛的幅度决定着量子隧道效应衰减的速度;而量子隧道效应衰减的速度会影响算法的正确率,衰减得越快,算法越不容易找到最优解。因此,选择适当的尺度收敛幅度可以让量子隧道效应得到充分显现,使算法收敛于全局最优位置,避免陷入早熟,以确保较高的成功率。

3 目标函数的最佳收敛参数 λ_{scale}

本节讨论 MQHOA 算法在不同尺度收敛状态下的表现。MQHOA 算法的伪代码中, $\sigma_s = \sigma_s / \lambda$ 决定了迭代过程中尺度收敛的幅度。实验尝试通过改变 λ 的大小来观察其对算法性能的影响。

实验选择了7种标准测试函数,如表1所列。

表 1 7 种测试函数

Table 1 Seven benchmark functions

函数名	公式	说明
Rastrigin	$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - A \cos(2\pi x_i) + A), -5.12 \leq x_i \leq 5.12, A = 10$	密集的多峰函数,多个局部最优
Griewank	$f(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos(\frac{x_i}{\sqrt{i}}) + 1$	多峰函数,有多个广泛分布的局部最优
Levy	$f(x) = \sin^2(\pi \omega_1) + \sum_{i=1}^{d-1} (\omega_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi \omega_i + 1)] + (\omega_d - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi \omega_d)]$	多峰函数,有多个广泛分布的局部最优
Zakharov	$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\sum_{i=1}^n \frac{i}{2} x_i)^2 + (\sum_{i=1}^n \frac{i}{2} x_i)^4$	只有一个全局最优值,但在全局最优附近存在大量局部最优
Ackley	$f(x) = -20 \exp(-0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}) - \exp(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i)) + 20 + e$	典型的多峰函数,在函数搜索中容易陷入局部最优
Sphere	$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$	连续单峰凸函数
Sum Square	$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} i x_i^2$	连续单峰凸函数

实验设定统一的运行环境:采样点 k 值为 50,最小收敛尺度 $\sigma_{\min} = 0.000001$,初始定义域为 $[-10, 10]$,函数维度为 2,算法进化次数的上限为当前维度乘以 10^5 ,即 $\max FE = 1 * 10^5 * DIM$,重复运算次数 $Repeat$ 为 51。将 λ 分别取值为 1.5, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100。

理论上, λ 的取值范围可以设定为 $[1, +\infty]$,但如果 λ 取值过大,将造成尺度剧烈收缩,使算法无法有效搜索全局最优解,因此实验中将 λ 的取值设定在 $[1, 100]$ 的范围内,并比较不同取值对算法性能造成的影响。实验分别基于最优解成功率和算法进化次数进行比较。实验约定,当算法找到的最优解与理论最优解之差的绝对值小于或等于 $1 * 10^{-4}$ 时,则认为成功找到最优解,并以此作为测算成功率的依据。算法进化次数表示求解过程中代入目标函数的次数,以进化次数评估算法的计算代价能够更清晰地比较算法在不同函数上的计算量差异。

在 λ 的取值范围内,除 Rastrigin 函数外,其余函数在 2 维状态下求解最优解的成功率均是 100%。在此基础上比较算法的进化次数,结果发现不同的 λ 值对不同函数的进化次数有不同程度的影响。从算法性能上判断,算法进化次数越少,说明计算代价越低,算法在当前 λ 值下的运算效率就越高。图 4 中比较了 7 个测试函数在不同 λ 取值下的进化次数。

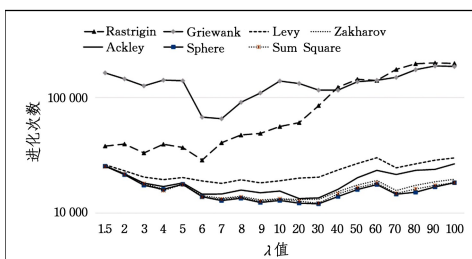


图 4 不同 λ 值下算法进化次数的对比

Fig. 4 Comparison of algorithm evolution times of different λ values

从实验数据中提取不同函数在 2 维状态下最小算法进化次数对应的 λ 值,如表 2 所列。

表 2 最小算法进化次数对应的 λ 值

Table 2 λ values corresponding to minimum algorithm

evolution times	
函数	λ 值
Rastrigin	6
Griewank	7
Levy	7
Zakharov	9
Ackley	20
Sphere	30
Sum Square	30

通过表中数据可以看出,在 MQHOA 算法中,不同函数都对一个最佳的收敛参数,这个参数可以使算法在找到最优解的前提下实现最佳性能。本文将目标函数对应的最佳收敛参数命名为 λ_{scale} ,并对其做以下条件约定:1)同维度下,对应最优解成功率最高的 λ 值为 λ_{scale} ;2)同维度下,最优解求解成功率为 100% 时,对应算法进化次数最小的 λ 值为 λ_{scale} 。

满足以上两个条件的尺度收敛值 λ ,即可认为是函数在当前维度下的最佳收敛参数 λ_{scale} 。该参数能够体现函数在特定维度下的尺度结构复杂度。 λ_{scale} 的值越小,表明函数在进行尺度收敛时的收缩幅度越小,尺度收敛相对越慢,在搜索最优解的过程中高斯探针需要更大的搜索密度,对应目标函数的尺度结构也就越复杂。反之,说明函数尺度结构越简单。需要明确,函数尺度结构的复杂程度并不完全等同于函数体求解的复杂程度。

4 函数不同维度下 λ_{scale} 的比较分析

上文将函数的最佳收敛参数命名为 λ_{scale} ,并比较了 λ_{scale} 在各测试函数 2 维状态下的异同。本节通过实验分析函数其他维度下对应的 λ_{scale} 的变化特点。

保持其他实验条件不变,将函数维度从 1 维逐级升到 20 维。提取实验数据中各测试函数不同维度下对应的 λ_{scale} ,如表 3 所列。

函数 Rastrigin 和 Griewank 的尺度结构相对复杂,最优解成功率在不同维度时变化较大,其余 5 个测试函数 Levy, Zakharov, Ackley, Sphere 和 Sum Square,在 λ 的取值范围

[1.5,100]内,每个函数将维度从1维升至20维,分别以19组不同的 λ 值进行计算,最优解成功率均为100%。这时对算法的进化次数进行比较,进化次数最少时所对应的 λ 取值即为 λ_{scale} 。作为结构相对简单的凸函数,随维度的增加, λ_{scale} 值相对趋同,变化不明显。例如,对于Sum Square函数,其在高维部分的 λ_{scale} 值基本稳定在30;Ackley和Sphere函数在高维度时, λ_{scale} 值趋近于9;Levy函数的 λ_{scale} 值在7和9之间调整。Zakharov函数随着维度的增加,对应的 λ_{scale} 值有逐渐递减的趋势,这说明随着维度的增加,该函数结构的复杂程度也在增加。函数Rastrigin和Griewank随着维度的增加,最优解成功率在下降,对应较高成功率的 λ_{scale} 值也不尽相同。Griewank在9维之后,对应的 λ_{scale} 值稳定在4上。Rastrigin在6维之后,对应的 λ_{scale} 为4时的最优解成功率相对最高,该函数在有些维度下对应的 λ_{scale} 不止一个。比如维度为4时, λ 取3或5函数都能达到最高的成功率94.1%;维度为17时, λ 取4和5函数的最高成功率都只有7.8%。

表3 函数不同维度下的最佳收敛参数 λ_{scale}

Table 3 Best convergence parameters λ_{scale} for different dimensions of functions

维度	Rastrigin	Griewank	Levy	Zakharov	Ackley	Sphere	Sum Square
1	4	7	70	30	30	30	30
2	4	7	7	9	20	30	30
3	3	80/90	7	7	7	9	9
4	3/5	100	9	7	7	9	7
5	20	6	7	7	7	7	7
6	4	3	9	7	7	9	9
7	4	6	9	9	9	7	9
8	4	5	7	9	6	7	9
9	4	4	9	9	9	7	30
10	4	4	7	7	9	7	30
11	4	4	7	7	9	9	30
12	4	4	9	7	9	7	30
13	4	4	7	7	9	9	9
14	4	4	9	7	9	9	30
15	4	4	9	7	9	9	30
16	4	4	7	3	9	9	30
17	4/5	4	9	3	9	9	30
18	4	4	9	5	9	9	30
19	4	4	7	3	9	9	30
20	4	4	9	2	9	9	30

在算法的尺度收敛过程中采用 λ_{scale} 值作为收敛幅度,可以实现算法的最佳性能,这为算法寻找函数不同维度时的最佳效果提供了依据。

5 函数尺度系数

通过研究MQHOA算法的尺度变化行为发现,尺度收敛的幅度可以对函数尺度结构的复杂程度进行定性描述。在前文分析的基础上,本文提出了一种对比函数尺度结构的方法,为此定义专有名词:函数尺度系数。通过函数尺度系数,可以对比研究不同目标函数的尺度结构复杂度,协助算法采用最合适的收敛尺度,以最有效的方式寻找最优解,提高算法性能。

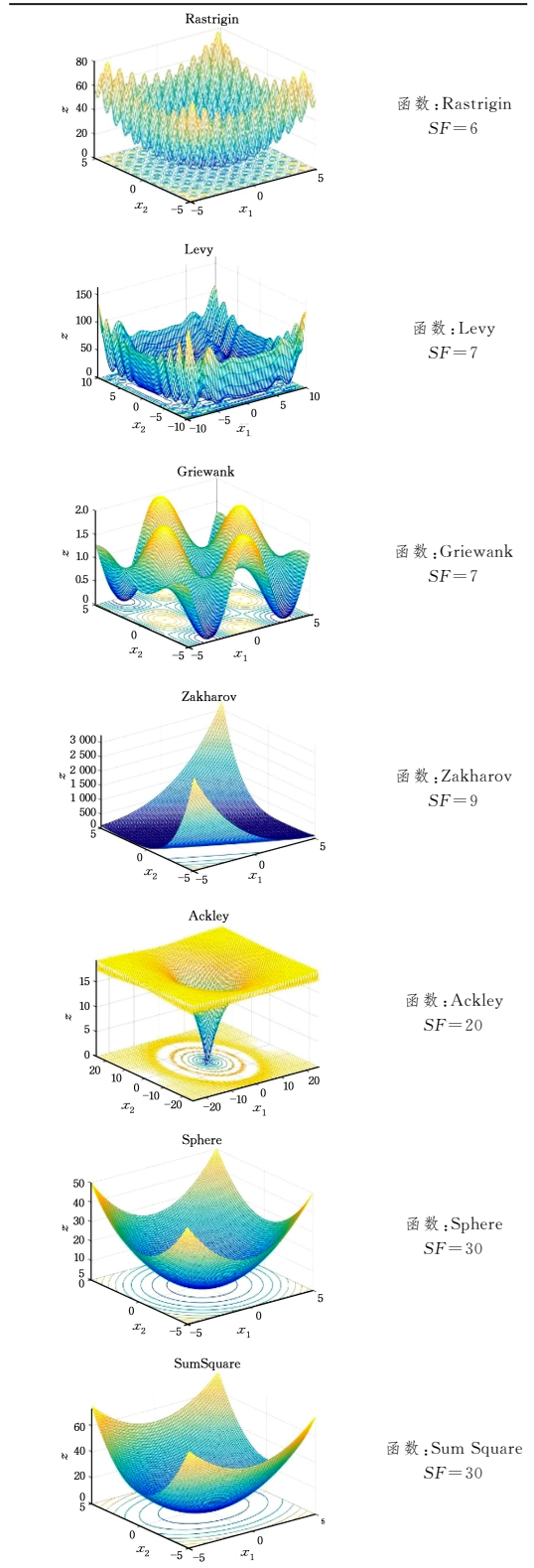
λ_{scale} 值的不同,反映出函数尺度结构复杂程度的不同。通过第4节的分析可知,在不同维度下, λ_{scale} 的值并不固定。为了统一对比标准,将函数在2维状态下的 λ_{scale} 作为该函数的函数尺度系数。

函数尺度系数的定义为:在算法MQHOA中,目标函数在2维状态下,函数定义域为 $[-10,10]$,最小收敛尺度 $\sigma_{min}=0.000001$,采样值 k 为50,函数最优尺度参数 λ_{scale} 为该函数的尺度系数 SF 。

表4列出了标准测试函数在2维状态下的3维图像及其对应的 SF 值。

表4 函数图像及其对应的 λ 值

Table 4 Function images and corresponding λ values



通过对比表 4 中的图像可以直观地看出:一个函数的 SF 值的大小与函数尺度复杂度相关联,即 SF 值越小,函数尺度结构相对越复杂; SF 值越大,函数尺度结构相对越简单。比如, Sphere 函数和 Sum Square 函数在当前定义域下是简单的凸函数构造,只有一个全局最优解,不存在局部最优,因此 SF 值为 30,在测试函数中最大。

通过实验数据和图像的对比可以看出, Sphere 和 Sum Square 函数已是结构最简单的一类函数。前述实验受实验条件的限制,并没有将 λ 取值的频度设置得过于密集;今后的研究中还将增加 λ 取值的频度,期望找到不同函数对应的更精确的 SF 值,同时探索出更便捷地找寻尺度系数 SF 的方法。

尺度系数 SF 本身具有一定的局限性,需要满足一定的适用条件。对于 MQHOA 算法暂时还无法求得精确解的测试函数,比如 Rosenbrock, Schwefel, Dixon 等,暂不能用尺度系数 SF 对函数的结构复杂度进行判定。笔者对算法及尺度变化的研究还在继续,未来将通过调整函数定义域的范围,改变 λ 的取值密度,进行更多实验,以获取更详实的实验数据,逐步加强尺度系数 SF 的适用性,使其成为一个衡量函数尺度结构的标准。

结束语 研究发现,尺度变换的必要性来源于不确定性原理,不同的尺度收敛表征了不同的量子隧道效应。根据调整尺度收敛幅度 λ 对算法最优解的求解效果和算法性能所造成的影响,可以分析函数的尺度结构复杂度。将不同函数在收敛过程中的最佳收敛参数约定为 λ_{scale} 。定义函数在 2 维状态下的 λ_{scale} 值为该函数的尺度系数 SF 。在适用范围内, SF 可以作为对不同函数尺度结构复杂程度进行定性判断的标准,能够对主要的测试函数尺度结构进行判别,优化算法的收敛尺度,提高算法的求解效率。

尺度系数 SF 本身还具有一定局的限性:对于 MQHOA 算法暂时无法求解的函数, SF 并不适用。今后将进一步探索在高维度和不同定义域的条件下函数尺度的收敛状况,提高算法对更复杂问题的求解能力,使其在实际应用中发挥更有效的作用。

参 考 文 献

- [1] SUN J, XU W, FENG B. Adaptive parameter control for quantum-behaved particle swarm optimization on individual level [C]//IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. IEEE Press, 2006:3049-3054.
- [2] TIAN N. Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization with Cooperative Coevolution for Large Scale Optimization [C]//International Symposium on Distributed Computing and Applications for Business Engineering and Science. IEEE Press, 2016: 82-85.
- [3] FINNILA A B, GOMEZ M A, SEBENIK C, et al. Quantum annealing: A new method for minimizing multidimensional functions[J]. Chemical Physics Letters, 1994, 219(5/6):343-348.
- [4] BROOKE J, BITKO D, ROSENBAUM T F, et al. Quantum Annealing of a Disordered Spin System [J]. Science, 2001, 284(5415):779-781.
- [5] LIAO W, WANG J, WANG J. Nonlinear Inertia Weight Variation for Dynamic Adaptation in Particle Swarm Optimization [M]//Advances in Swarm Intelligence. Berlin: Springer, 2011: 80-85.
- [6] WANG P, HUANG Y, REN C, et al. Multi-scale quantum harmonic oscillator for high dimensional function global optimization algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(12):2468-2473.
- [7] SUN J, FANG W, PALADE V, et al. Quantum-behaved particle swarm optimization with Gaussian distributed local attractor point[J]. Applied Mathematics & Computation, 2011, 218(7): 3763-3775.
- [8] SUN J, XU W, FENG B. A global search strategy of quantum-behaved particle swarm optimization [C]//2004 IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems. IEEE Xplore, 2004:111-116.
- [9] SUN J, WU X J, PALADE V, et al. Convergence analysis and improvements of quantum-behaved particle swarm optimization [J]. Information Sciences, 2012, 193(15): 81-103.
- [10] SUN J, FANG W, WU X J, et al. Quantum-behaved particle swarm optimization; analysis of individual particle behavior and parameter selection [J]. Evolutionary Computation, 2011, 20(3):349-393.
- [11] WANG P, YE XG, LI B, et al. Multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm for global numerical optimization[J]. Applied Soft Computing, 2018, 69(5):655-670.
- [12] WANG P, HUANG Y, YUAN Y N, et al. Convergence characteristics of multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(8):1988-1993.
- [13] WANG P, HUANG Y. MQHOA algorithm with energy level stabilizing process[J]. Journal on Communications, 2016, 37(7): 79-86.
- [14] WANG P, HUANG Y. Physical model of multi-scale quantum harmonic oscillator optimization algorithm[J]. Journal of Frontiers of Computer Science & Technology, 2015, 9(10): 1271-1280.
- [15] YUAN Y N, WANG P, LIU F. Performance analysis of multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm [J]. Journal of Computer Applications, 2015, 35(6):1600-1604.
- [16] WANG P, CHENG K, HUANG Y, et al. Multiscale quantum harmonic oscillator algorithm for multimodal optimization[J]. Computational Intelligence and Neuroscience, 2018, 2018(95001): 1-12.
- [17] HUANG Y, WANG P, CHENG K, et al. Parallelism of multi-scale quantum harmonic oscillator algorithm [J]. Journal on Communications, 2016, 37(9): 68-74.
- [18] YAN J J, WANG P, FAN J B, et al. Clustering center selecting algorithm based on quantum harmonic oscillator model[J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(2):405-412.
- [19] WANG P, HUANG Y, AN J X, et al. Performance analysis of multi-scale quantum harmonic oscillator global optimization algorithm in combinatorial optimization problems[J]. Journal of University of Electronic Science & Technology of China, 2016, 45(3):469-474.
- [20] LU Z J, AN J X, WANG P. Partition-based MQHOA for multimodal optimization[J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(2): 235-245.
- [21] 王鹏. 多尺度量子谐振子优化算法[M]. 北京:人民邮电出版社, 2016:52-54.