

基于二维工程图的三维 CAD 模型自动构建方法

孙 金 孙长乐 关广丰

(大连海事大学船舶机电装备研究所 辽宁 大连 116026)

摘 要 在产品的设计和使用中,对产品做性能分析和后期使用维护时,需要产品的三维 CAD 模型。在设计过程中,设计人员通常使用 AutoCAD 设计二维工程图,如何在短时间内将二维工程图转换为三维模型是缩短产品研制周期和快速维护产品的关键。文中基于 B 样条曲线和 B 样条曲面理论知识,利用曲面拟合技术,介绍了基于二维工程图自动构建三维 CAD 模型的过程,并提出了一种数据点筛选优化算法,其减少了使用的数据点数量,提高了模型构建效率。该方法解决了在人工将二维工程图转换为三维 CAD 模型过程中耗时耗力及其它容易出错的问题,缩短了产品研制的周期。通过对船舶模型的构建处理,验证了该方法的可行性。

关键词 二维工程图,三维 CAD 模型,B 样条曲线,B 样条曲面,曲面拟合技术
中图分类号 TP391.41 文献标识码 A

Method of Automatic Construction of 3D CAD Model Based on 2D Engineering Sketch

SUN Jin SUN Chang-le GUAN Guang-feng

(Institute of Ship and Electromechanical Equipment, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, China)

Abstract In the process of product design and use, the performance analysis and maintenance of the product requires its 3D CAD model. In the design process, designers usually use AutoCAD to design the 2D engineering drawing. How to convert the 2D engineering drawing into 3D model in a short time is the key to shorten engineering cycles time and rapidly maintain product. Based on the knowledge of B-spline curve and B-spline surface theory, this paper proposed a process of automatically constructing 3D CAD model from 2D engineering drawing by using surface fitting technology, and proposed a data point screening optimization algorithm to reduce the amount of used data points. It solves the problem that the manual conversion from the 2D engineering drawings to the 3D CAD model is time-consuming and labor-intensive, and shortens the cycle of product development. Taking a ship model as example, the paper validated the feasibility of the method for the construction of model.

Keywords 2D engineering drawing, 3D CAD model, B-spline surface, B-spline curve, Fitting technique of surface

近年来,随着计算机技术和工业的蓬勃发展,计算机软件在工程应用与模型性能分析方面的作用愈发重要。2D 图纸与 3D 模型间的互相转换为 CAD 应用工程中的重用课题^[1]。在工程应用中,工程设备与零件的 3D 模型图可以给工作人员带来很大便利。实体造型越来越多地被应用到产品的设计与制造中。长期以来,设计人员大多以二维图纸作为描述和传递几何信息的工具,三维模型的塑造对于长期习惯于用二维图纸来表达模型信息的工程人员来说较难掌握^[2]。对于三维图的构造,常常是通过输入大量数据点来模拟模型,需要对二维图做大量的处理工作生成容量较大的三维模型文件。目前,从二维图直接转化为三维实体模型的技术还在研究中,离实用还有相当长的距离^[3]。国内外学者对二维转三维已经进行了大量的研究。国外基于二维视图的三维模型重建的研究开展较早^[4-6],但基本没有提供验证转换结果的手段。国内学者公茂凯^[7]等在理论上提出了几种由三视图构造三维实体的方法:自底向上的重构方法、自顶向下的重构方

法、基于模型引导的重构方法、基于体切削的重构方法。但这些方法总体上存在着妨碍研究实用化的问题:首先,对于三视图类型的限制太大。其次,算法中存在着不可靠因素,并且算法的扩展能力、适用性和灵活性差,很难作为成熟的方法被应用到工程当中。任宗强^[8]提出了在 AutoCAD 中将既有的二维图纸转化成三维的方法和流程,主要使用三维拉伸命令将面域沿中线的三维线进行拉伸,最终得到三维图。该方法对于复杂二维图的处理十分繁琐且修改起来需要返工,十分麻烦,无法得到广泛使用。李士才等^[1]提出特征造型与特征剪贴技术,利用 AutoCAD 工程图从中复制特征轮廓线,经坐标变换后放到 Mechanical Desktop 三维模型的工作平面上,利用 AMPROFILE 命令处理后加入定位尺寸,形成壳体铸模的特征模型。

本文采用 B 样条曲线和 B 样条曲面拟合技术,以船模型为例,提出一种全自动的由 AutoCAD 二维图构建三维模型的方法,并通过对样条曲线和样条曲面拟合算法的优化,提高

本文受国家自然科学基金(51305052),中央高校基本科研业务费专项资金(3132018213)资助。

孙 金(1991-),男,硕士生,主要研究方向为曲面拟合,E-mail:704579942@qq.com;孙长乐(1978-),男,博士,副教授,硕士生导师,主要研究方向为 CAD 模型重用、虚拟装配、协同设计技术,E-mail:xxcl1999@126.com(通信作者)。

转化效率。该工作能快速地二维 CAD 图纸转化为三维工程模型,节省了工作人员手动从二维转三维所用的时间,缩短了产品的研制的周期。

1 B 样条曲线曲面的概念与拟合方法

1.1 B 样条曲线的定义

B 样条曲线的定义^[9]为:

$$p(u) = \sum_{i=0}^n d_i N_{i,k}(u) \quad (1)$$

其中, $d_i (i=0, 1, \dots, n)$ 为控制顶点, $N_{i,k}(u) (i=0, 1, \dots, n)$ 称为 k 次规范 B 样条基函数, 每一个称为规范 B 样条, 简称 B 样条。其值可以按照以下方法求得。

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \frac{0}{0} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

从式(1)、式(2)可以看出, 只要确定了控制点和参数 u , 样条曲线就被唯一确定了, 而参数 u 的集合是根据控制点生成的节点矢量的子集。因此影响样条曲线拟合效率的关键就在于控制点的数量, 若要提高拟合效率, 则需尽量减少所用到的控制点的数量, 这也是优化算法的依据。

1.2 节点矢量的确定

对于 B 样条曲线, 给定控制点, 欲确定一条 k 次曲线, 还必须确定它的节点矢量中具体的节点值 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1}]$ 。节点矢量的方法不是固定的, 本文采用 Hartley-Judd^[10]方法。文献[10]认为 k 次 B 样条曲线要插值一个顶点, 必须是 k 重的。这表明, 使相邻分段连接点的参数值之差与相邻顶点间的距离成正比与实际有相当的出入, 采用控制多边形相应 k 条边的和这种方式来替代更真实。将定义域内节点区间长度按如下方法计算。

$$\begin{cases} u_i - u_{i-1} = \frac{\sum_{j=i-k}^{i-1} l_j}{\sum_{i=k+1}^{n+1} \sum_{j=i-k}^{i-1} l_j}, & i=k+1, k+2, \dots, n+1 \\ l_i = |d_i - d_{i-1}|, & i=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

于是可得节点值:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = \dots = u_k = 0 \\ u_i = \sum_{j=k+1}^i (u_j - u_{j-1}), & i=k+1, k+2, \dots, n \\ u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+k+1} = 1 \end{cases} \quad (4)$$

式(4)表示的就是通过控制点所求得的节点矢量值, 其中 $u \in [u_k, u_{n+1}] = [0, 1]$, 为 k 次 B 样条曲线的定义域。

1.3 三次 B 样条曲线的拟合

1.3.1 数据点节点矢量的确定

式(4)表示的是由控制点求得的节点矢量节点值, 在 B 样条曲线的反算中, 要根据数据点来确定节点矢量。本文采用平均技术法^[11], 按下列方法计算节点矢量。

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = \dots = u_k = 0 \\ u_{k+j} = \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{j+k+1} u_i, & j=1, 2, \dots, n-k \\ u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+k+1} = 1 \end{cases} \quad (5)$$

基于该技术, 节点反映了数据点参数值 \tilde{u}_i 的分布。 \tilde{u}_i 采用弦长参数化方法^[12]确定。

1.3.2 三次 B 样条曲线的反算

如果 $n+1$ 个数据点 $q_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 落在三次 B 样条曲线 $p(u)$ 上, 那么定义域内应满足如下插值条件。

$$\begin{cases} p(u_i) = \sum_{j=i-3}^{i-1} d_j N_{j,3}(u_i) = q_{i-3}, & i=3, 4, \dots, n \\ p(u_{n+1}) = \sum_{j=n-2}^n d_j N_{j,3}(u_{n+1}) = q_{n-2} \end{cases} \quad (6)$$

从式(6)中的方程组可以看出, 共有 $n-1$ 个方程和 $n+1$ 个未知量, 无法唯一求得未知变量。封闭三次 B 样条曲线由于具有周期性, 因此有如下关系成立。

$$\begin{cases} p_0 = p_{n-2} \\ d_n = d_0 \\ d_{n+1} = d_1 \\ d_{n+2} = d_2 \end{cases} \quad (7)$$

联合式(6)、式(7), 未知数和方程都变为 $n-2$ 个, 可以唯一求得未知变量, 即控制点 d 。

对于开三次 B 样条曲线, 需要增加 2 个方程使方程数与未知变量数相等。可以根据具体需求采用文献[13]中列举的切矢条件、自由端点条件、虚节点条件、抛物线条件和非节点条件中的一种或两种列出边界条件方程, 使得方程数与未知变量数量相等, 从而解出控制点。

1.4 双三次 B 样条曲面的拟合

1.4.1 参数方向与参数选取

样条曲面的拟合和样条曲线的拟合方法相似, 但在表达式上参数从一维升到二维。因此在对数据点进行处理时就要先确定数据点方向。

在空间内给一组数据点 $q_{i,j} (i=0, 1, \dots, r; j=0, 1, \dots, s)$ 。这组数据点可以看成是由 $s+1$ 个截面给出的, 每个截面包括 $r+1$ 个数据点。将截面内数据点的方向设为 u 方向, 以 u 为参数, 截面的顺序方向设为 v 方向, 以 v 为参数。

图 1 所示为 $r=1$ 且 $s=2$ 的一个三次 B 样条曲面示意图。该样条曲面 u 方向给出了 2 个数据点, v 方向给出了 3 个数据点。

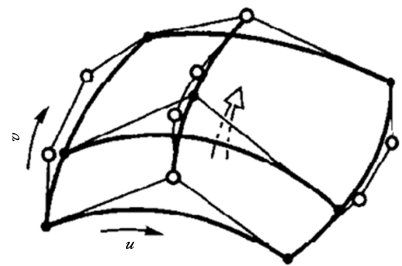


图 1 三次 B 样条曲面 ($r=1, s=2$)

1.4.2 三次 B 样条曲面的反算

反算双三次 B 样条曲面的控制点可以看成两次反算三次 B 样条曲线控制点的过程。第一次用第一步确定的 u 方向各截面的数据点加上 u 方向上的边界条件, 采用上述 B 样条曲线拟合的方法反算出中间控制点。这样中间控制点截面相当于比数据点截面多了 2 条。反算过程如下。

$$u \downarrow \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & \cdots & q_{0,n-2} \\ q_{1,0} & q_{1,1} & \cdots & q_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m-2,0} & q_{m-2,1} & \cdots & q_{m-2,n-2} \end{bmatrix} \rightarrow v$$

$$\Downarrow$$

$$u \downarrow \begin{bmatrix} \bar{d}_{0,0} & \bar{d}_{0,1} & \cdots & \bar{d}_{0,n-2} \\ \bar{d}_{1,0} & \bar{d}_{1,1} & \cdots & \bar{d}_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{d}_{m-2,0} & \bar{d}_{m-2,1} & \cdots & \bar{d}_{m-2,n-2} \end{bmatrix} \rightarrow v$$

第二次以中间控制点为数据点,用 v 方向的数据点加上 v 方向上的边界条件,采用上述 B 样条曲线拟合的方法反算出最终控制点。反算过程如下。

$$u \downarrow \begin{bmatrix} \bar{d}_{0,0} & \bar{d}_{0,1} & \cdots & \bar{d}_{0,n-2} \\ \bar{d}_{1,0} & \bar{d}_{1,1} & \cdots & \bar{d}_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{d}_{m-2,0} & \bar{d}_{m-2,1} & \cdots & \bar{d}_{m-2,n-2} \end{bmatrix} \rightarrow v$$

$$\Downarrow$$

$$u \downarrow \begin{bmatrix} \bar{d}_{0,0} & \bar{d}_{0,1} & \cdots & \bar{d}_{0,n} \\ \bar{d}_{1,0} & \bar{d}_{1,1} & \cdots & \bar{d}_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{d}_{m,0} & \bar{d}_{m,1} & \cdots & \bar{d}_{m,n} \end{bmatrix} \rightarrow v$$

2 船体截面曲线和曲面的拟合

本节通过 B 样条曲线和 B 样条曲面理论,在 VS2010 平台编写 C++ 程序,实现从 AutoCAD 的二维船体设计图到三维船体模型的自动构建过程,并验证数据点精简优化算法的可行性。

2.1 船曲面数据点的获取

通过程序读取 AutoCAD 图纸中的数据,生成数据点列。

如图 2 所示,通过对话框,导入 lines.dwg 文件。line.dwg 文件是船体的截面和剖面二维 CAD 草图。

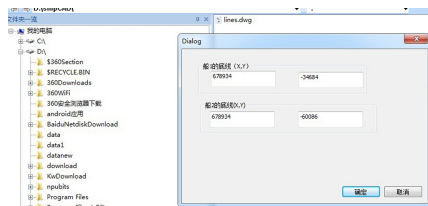


图 2 导入 dwg 格式的 AutoCAD 图纸

图 3 所示为 line.dwg 文件中船体的截面图,图 4 所示为 line.dwg 文件中船体的剖面图。

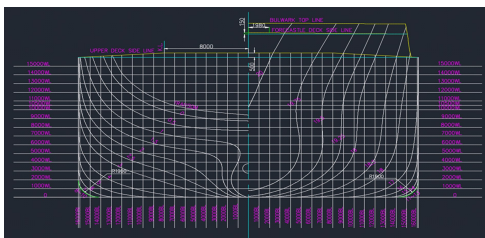


图 3 船体截面图

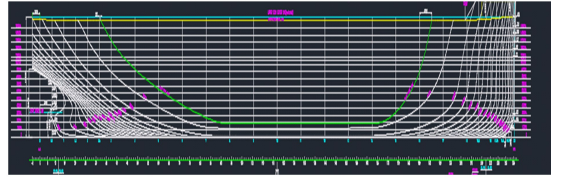


图 4 船体剖面图

通过程序将生成的数据点列保存在文档中。图 5 所示为通过 line.dwg 文件读取出的船体的部分数据点坐标,将其保存在文档中用于船体截面曲线和船体曲面的拟合。

X=800048.31	Y= 9360.42
X=800459.31	Y= 8229.29
X=801173.40	Y= 6321.21
X=801250.37	Y= 6111.22
X=801307.16	Y= 5953.81
X=801340.31	Y= 5864.01
X=801402.09	Y= 5691.62
X=801420.79	Y= 5639.21
X=801476.88	Y= 5482.03
X=801495.59	Y= 5429.65
X=801514.29	Y= 5377.28
X=801533.00	Y= 5324.93
X=801551.84	Y= 5272.57
X=801561.73	Y= 5247.17
X=801569.55	Y= 5227.08
X=801576.32	Y= 5209.67

图 5 截面曲线数据点

2.2 截面曲线的拟合

通过上述方法获得每条截面曲线的数据点,依据样条曲线控制点反算与拟合的方法,在 VS2010 平台上利用 C++ 编写程序拟合并绘制船体截面的 B 样条曲线。图 6 所示的是通过程序绘制出的船体截面曲线的 B 样条曲线。

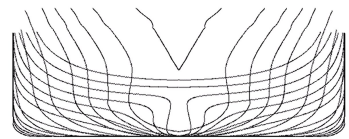


图 6 截面曲线运行结果图

根据所绘制出的截面曲线表达式,获得船体曲面的插值点,根据 B 样条曲面反算与拟合的方法,利用 OpenGL 绘制出船体曲面的模型。图 7 所示为通过程序所绘制出的船体的 B 样条曲面。

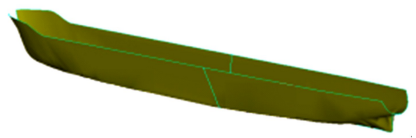


图 7 船体曲面模型运行结果图

3 数据点精简与算法优化

对于船体截面曲线拟合,每条截面曲线所用到的数据点个数范围是 200~300,大大降低了曲线曲面拟合和绘制的效率,保存数据点的文件也会变大,所以对于数据点的精简是必要的。

3.1 数据点精简算法

本文所用到的数据点精简算法通过数据点对初始样条曲线的形状影响大小进行筛选,保留有效数据点对曲线形状和表达式影响大的数据点,剔除影响小的数据点。对于不在曲线上的数据点,检测该数据点到样条曲线的距离,当距离小于给出的误差阈值时,视为数据点对曲线形状的影响较小,舍弃该点;当距离大于给出的误差阈值时,视为数据点对曲线形状的影响较大,保留该点。遍历所有数据点后,保留的数据点

即为满足该精度值拟合曲线必需的数据点。

图 8 所示的是精简算法流程图,通过该方法,可以减少绘制 B 样条曲线所用到的数据点数量,从而提高绘制效率。

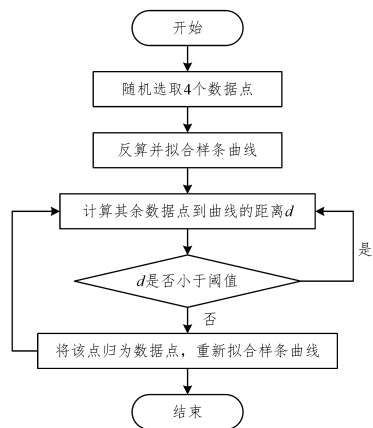


图 8 精简算法流程图

3.2 算法代码

该算法代码表达如下:

```

maybeinliers=n randomly selected values from data
while(maybeinliers){
    maybeamodel=model parameters fitted to maybeinliers
    alsoinliers=empty set
    for every point in data not in maybeinliers {
        if point fits maybeamodel with an error smaller than t
            add point to alsoinliers
    }
    if the number of elements in alsoinliers is < d {
        % this implies that we may have found a good model
        % now test how good it is
        bettermodel=model parameters fitted to all points in maybeinliers and alsoinliers
        thiserr=a measure of how well model fits these points
        if thiserr < besterr {
            bestfit=bettermodel
            besterr=thiserr
        }
    }
    increment iterations
    maybeinliers=n randomly selected values from data
}
return bestfit
    
```

代码中, maybeinliers 是每次选取的随机点, 每取一次进行一次迭代, 直到完成所有点的迭代, 得到所有需要的数据点, 即 bestfit 集合。假设每条曲线上的原始数据点为 n , 则筛选每条曲线上数据点的算法的时间复杂度为 $O(n)$ 。

4 实验验证

4.1 数据点优化的结果

本文采取了两种方法进行结果验证, 方法 1 是确定数据点个数, 比较最大误差值; 方法 2 是确定允许的最大误差值, 比较所需要的数据点个数。

图 9 显示了分别取 10 个点、15 个点、20 个点、25 个点、30 个点、40 个点、50 个点和 60 个点时的最大误差值。可以看出, 当每条曲线取 10 个点时, 误差值较大, 当取 15 个点时, 误差减小幅度大, 继续增加所用到的数据点后, 误差持续减小, 但幅度不大。

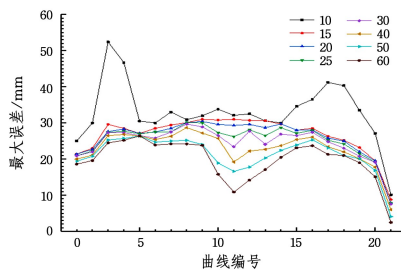


图 9 数据点个数固定时最大误差值

图 10 显示了分别保证最大误差在 10mm, 15mm, 20mm, 25mm, 30mm, 50mm, 70mm 和 100mm 时拟合曲线所需要的最少的数据点数。可以看到, 随着误差值的降低, 所需要的数据点增加。

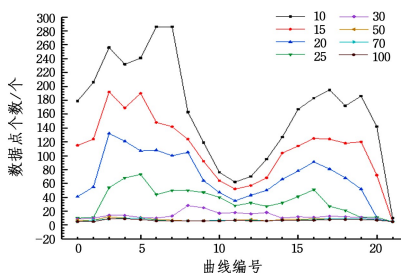


图 10 最大误差值固定时所用数据点数

表 1 列出了最大误差为 50mm 时优化前后的绘制时间的对比情况。

表 1 优化前后的绘制时间

曲线编号	优化前数据点个数	优化后数据点个数	优化前所用时间/s	优化后所用时间/s
1	179	9	1.795	0.083
2	206	10	1.965	0.091
3	256	14	2.136	0.108
4	232	14	2.095	0.105
5	241	11	2.122	0.095
6	286	10	2.233	0.090
7	286	13	2.235	0.099
8	163	28	1.681	0.211
9	119	25	1.215	0.208
10	76	17	0.982	0.155
11	62	18	0.905	0.153
12	70	16	0.951	0.153
13	95	18	1.115	0.172
14	127	10	1.295	0.092
15	167	12	1.589	0.095
16	183	11	1.805	0.093
17	195	13	1.825	0.101
18	172	12	1.692	0.096
19	186	11	1.811	0.092
20	142	9	1.405	0.090
21	10	5	0.095	0.061

从表 1 中可以看出, 在保证精度的情况下, 通过数据点精简减少所用的数据点数量对绘制样条曲线的效率有明显提升。

4.2 优化后的船体截面曲线和船体曲面

通过上述验证可以看出, 在给出允许的最大误差值后, 所需要构造曲线的数据点数有明显变化。图 11 所示的是每条曲线最大误差值为 50mm 时, 用最少数据点拟合出的截面 B 样条曲线。曲线形状与用全部数据点拟合出的曲线相似且满足精度要求。

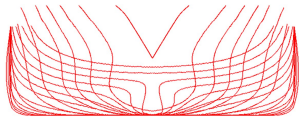


图 11 优化后截面曲线图

图 12 所示的是每条截面曲线最大误差值为 50mm 时,用最少数据点拟合出的船体 B 样条曲面。

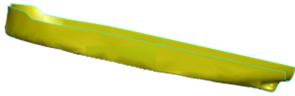


图 12 优化后船体曲面

结束语 本文利用 B 样条曲线和 B 样条曲面理论,反算拟合了船体截面图和曲面图,并对数据点做出了精简处理,减少了拟合船体曲线和曲面所用到的数据点数量,减少了绘制所用的时间,提高了拟合效率。但从绘制出的船体模型可以看出,船底有略微不平整。因此还需调整精度与效率的关系,寻求出一套既保证模型精准又保证拟合效率的方案。

参考文献

[1] 李士才,席平,王亚平,等.从已有二维图样实例重建三维参数化特征模型的应用研究[J].工程图学学报,2000,21(1):36-40.
 [2] 李晋芳,施法中.商品化 CAD 软件中基于二维视图的三维重建模块的设计与实现[J].计算机辅助设计与图形学学报,2005,17(4):171-175.

[3] 陆国栋,阮建中,江涛,等.基于工程图样的三维重建技术研究与实现[J].计算机辅助设计与图形学学报,1999,11(6):516-520.
 [4] ALDEFELD B. On automatic recognition of 3D structures from 2D representations[J]. Computer-Aided Design, 1983, 15(2): 59-64.
 [5] GHOSH S K, LI Y B, MUNNS A K, et al. Generating solid models from two-dimensional representations [J]. Journal of Materials Processing Technology, 1995, 54(1/2/3/4): 211-217.
 [6] GU K, TANG Z, SUN J. Reconstruction of 3-D solid objects from orthographic projections[J]. Computer Graphics Forum, 1986, 9(5): 317-323.
 [7] 公茂凯,高国安.由三视图构造三维实体方法的综述[J].计算机研究与发展,1992,29(8):47-52.
 [8] 任宗强.浅谈 AutoCAD 中将既有图纸二维转三维方法和流程[J].智能城市,2018,15(19):32-33.
 [9] 肖轶军,丁明跃,彭嘉雄.基于迭代最近点的 B 样条曲线拟合方法研究[J].中国图像图形学报,2000,5(7):585-588.
 [10] HARTLEY D J, JUDD C J. Parametrization of Bezier-type B-spline curves and surfaces[J]. CAD, 1978, 10(2): 130-134.
 [11] PIEGL L. Modifying the shape of rational B-splines, part1: curves[J]. CAD, 1989, 21(8): 509-518.
 [12] 方建群.双三次曲面插值过程中弦长参数化问题的探讨[J].中国矿业大学学报,1990,(1):71-77.
 [13] 施法中.计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M].北京:高等教育出版社,2013:43-46.

(上接第 41 页)

[3] ZHANG X, BAO G, MENG W, et al. Tree Branch Level of Detail Models for Forest Navigation[C]//Computer Graphics Forum. 2017.
 [4] KRATT J, SPICKER M, GUAYAQUIL A, et al. Woodification: User-Controlled Cambial Growth Modeling[C]//Computer Graphics Forum. 2015:361-372.
 [5] ZHANG X, ZHANG X, ZHANG X, et al. Realistic procedural plant modeling guided by 3D point cloud [C] // ACM SIGGRAPH. ACM, 2017: 85.
 [6] WANG G, LAGA H, XIE N, et al. The Shape Space of 3D Botanical Tree Models[J]. Acm Transactions on Graphics, 2018, 37(1): 1-18.
 [7] 杨垠晖,王锐.树木的真实感建模与绘制综述[J].计算机辅助设计与图形学学报,2018(2):191-216.
 [8] MEI J, WU S, WU S, et al. 3D tree modeling from incomplete point clouds via optimization and L1-MST [J]. International Journal of Geographical Information Science, 2017, 31(5): 999-1021.
 [9] SHLYAKHTER I, ROZENOER M, DORSEY J, et al. Reconstructing 3D Tree Models from Instrumented Photographs[J]. Computer Graphics & Applications, 2001, 21(3): 53-61.
 [10] RECHEMARTINEZ A, MARTIN I, DRETTAKIS G. Volumetric reconstruction and interactive rendering of trees from photographs[J]. Acm Transactions on Graphics, 2004, 23(3): 720-727.
 [11] ARGUDO O, CHICA A, ANDUJAR C. Single-picture reconstruction and rendering of trees for plausible vegetation synthesis[M]. Pergamon Press, Inc. 2016.
 [12] PRUSINKIEWICZ P, LINDENMAYER A. The algorithmic beauty of plants[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.

[13] MÉCH R. Visual models of plants interacting with their environment[C]//Proc of Siggraph. ACM, 1996:397-410.
 [14] RUNIONS A, LANE B, PRUSINKIEWICZ P. Modeling Trees with a Space Colonization Algorithm[C]//Eurographics Workshop on Natural Phenomena(Nph 2007). Prague, Czech Republic, DBLP, 2007:63-70.
 [15] PALUBICKI W, HOREL K, LONGAY S, et al. Self-organizing tree models for image synthesis[C]//ACM SIGGRAPH 2009. ACM, 2009:1-10.
 [16] BARTHÉLÉMY D, CARAGLIO Y. Plant architecture: a dynamic, multilevel and comprehensive approach to plant form, structure and ontogeny[J]. Ann Bot, 2007, 99(3): 375-407.
 [17] REFFYE P D, EDELIN C, JAEGER M, et al. Plant models faithful to botanical structure and development [J]. AcmSiggraph Computer Graphics, 1988, 22(4): 151-158.
 [18] BASHIR U, ALI J M. Rational cubic trigonometric Bézier curve with two shape parameters[J]. Computational & Applied Mathematics, 2016, 35(1): 1-16.
 [19] SHINOZAKI K, YODA K, HOZUMI K, et al. A Quantitative analysis of plant form-the pipe model theory: ii. further evidence of the theory and its application in forest ecology[J]. Japanese Journal of Ecology, 1964, 14: 97-105.
 [20] BORNHOFEN S, LATTAUD C. Competition and evolution in virtual plant communities: a new modeling approach[J]. Natural Computing, 2009, 8(2): 349-385.
 [21] PALUBICKI W. Fuzzy Plant Modeling with OpenGL-Novel Approaches in Simulating Phototropism and Environmental Conditions[M]. VDM Verlag, 2007.
 [22] SACHS T. Self-organization of tree form a model for complex social systems[J]. Journal of Theoretical Biology, 2004, 230(2): 197-202.