计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.190600171

L_3-值命题逻辑的 R-演算

曹存根[1]　胡岚曦[1,2]　眭跃飞[1,2]
1 中国科学院计算技术研究所　北京 100190
2 中国科学院大学计算机科学与技术学院　北京 101408
(cgcao@ict.ac.cn)

摘　要　在 L_3-值命题逻辑中,对应于矢列式推导的 Gentzen 推理系统 G 是单调的,而对应于余矢列式推导的 Gentzen 推理系统 G^- 是非单调的。基于 G 和 G^-,文中给出了一个 R-演算 S,使得任意的 R-转换 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是有效的当且仅当它在 S 中可证。因此,S 在限制 A 进入 Δ 时是单调的,而在将 A 添加到 Δ 中时是非单调的。

关键词:信念修正;R-演算;余矢列式;Gentzen 推理系统;非单调性
中图法分类号　TP301

R-Calculi For L_3-Valued Propositional Logic

CAO Cun-gen[1], HU Lan-xi[1,2] and SUI Yue-fei[1,2]
1 Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China
2 School of Computer Science and Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 101408, China

Abstract　In L_3-valued propositional logic, the Gentzen deduction system G for sequents is monotonic, and the one G^- for co—sequents is nonmonotonic. Based on G and G^-, an R- calculus S is given so that any reduction $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ is valid if and only if it is provable in S. Therefore, S is monotonic inrestraining A from entering Δ, and nonmonotonic in adding A into Δ.

Keywords　Belief-revision, R-calculus, Co-sequent, Gentzen deduction system, Nonmonotonicity

1　引言

Gentzen 推理系统[1-2]用于证明矢列式 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 的有效性,其中 Γ,Δ 是公式集合。在 3-值命题逻辑中,矢列式 $\Gamma\Rightarrow\Delta$ 是有效的,如果对于任意赋值 v,$v\models\Gamma$ 蕴涵 $v\models\Delta$,其中 $v\models\Gamma$;如果对于任意公式 $A\in\Gamma$,则 $v(A)=\mathrm{t}$;而 $v\models\Delta$,如果存在公式 $B\in\Delta$,则 $v(B)=\mathrm{t}$。

一个余矢列式 $\Gamma\mapsto\Delta$ 是有效的,如果存在赋值 v 使得 $v\models\Gamma$ 并且 $v\models\Delta$,其中 $v\models\neg\Delta$,如果对于任意公式 $B\in\Delta$,$v(B)\neq t$。单调地,可靠的和完备的 Gentzen 推理系统 G^- 是对应于矢列式推导的,而非单调的、可靠的和完备的 Gentzen 推理系统 G^- 对应于余矢列式推导[3-4]。类似地,存在真值为 m 和 f 的矢列式和余矢列式。

经典命题逻辑仅有一种矛盾关系,即形如$(A,\neg A)$。而 L_3-值命题逻辑有 3 种矛盾关系和 3 种反对关系,如表 1 所列。

表 1　L_3-值命题逻辑的矛盾关系和反对关系

Table 1　Contraries and contradictories of L_3-valued propositional logic

Contraries	Contradictories
$(A,\sim A)$	$(A,\sim A\vee\sim\sim A)$
$(A,\sim\sim A)$	$(\sim A,A\vee\sim\sim A)$
$(\sim A,\sim\sim A)$	$(\sim\sim A,A\vee\sim A)$

对于 3 种矢列式和余矢列式,存在 3 种 R-演算[5-8],本文仅考虑真值为 t 的情况。设 Δ 是一个理论,A 是一个公式,R-演算 S 用 Δ 修正 A,使得如果 Δ 与 A 协调,则结果为 $\Delta\cup A$,否则结果为 Δ。Δ 与 A 协调指 Δ 与 A 既不是矛盾的,也不是反对的。与命题逻辑的 R-演算[7,9-10]不同,R-演算 S 考虑 3 种矛盾和反对关系[11-12]。例如,$\sim(A_1\wedge A_2)$的真值为 t 的情况有 3 种:$\sim A_1$ 且 $\sim A_2$ 的真值为 t;A_1 且 $\sim A_2$ 的真值为 t;$\sim A_1$ 且 A_2 真值为 t。推理系统 G 的相应的推导规则如下:

$$\Gamma,\sim A_1,\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$\Gamma,A_1,\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$(\sim\wedge^L)\frac{\Gamma,\sim A_1,A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\wedge_1^R)\frac{\Gamma\Rightarrow\sim B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow\sim B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1\wedge B_2),\Delta})$$

$$(\sim\wedge_2^R)\frac{\Gamma\Rightarrow B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow\sim B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1\wedge B_2),\Delta}$$

$$(\sim\wedge_3^R)\frac{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1\wedge B_2),\Delta}$$

并且$\sim(D_1\wedge D_2)$的真值不为 t 的情况有 3 种:$\sim D_1$ 或$\sim D_2$ 的真值不为 t;D_1 或$\sim D_2$ 的真值不为 t;$\sim D_1$ 或 D_2 的真值不为 t。推理系统 G^- 相应的推导规则如下:

$$\Sigma\mapsto\sim D_1/\sim D_2,\Pi$$

$$\Sigma\mapsto\sim D_1/\sim D_2,\Pi$$

到稿日期:2019-06-27　返修日期:2019-09-26　本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。
基金项目:科技部重点研发计划项目(2017YFC1700300)
This work was supported by the National Key R&D Program of China (2017YFC1700300).
通信作者:胡岚曦(hulanxi17b@ict.ac.cn)

$$(\sim\wedge^{R})\frac{\Sigma\mapsto\sim D_1/D_2,\Pi}{\Sigma\mapsto\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

R-演算 S 的推导规则变成：

$$\Delta|\sim A_1\wedge\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$\Delta|A_1\wedge\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$(\sim\wedge^{-})\frac{\Delta|\sim A_1,A_2\Rightarrow\Delta}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$\Delta|\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim A_1$$

$$(\sim\wedge_1^{+})\frac{\Delta,\sim A_1|\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim A_1,\sim A_2}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\wedge A_2)}$$

$$\Delta|A_1\Rightarrow\Delta,\sim A_1$$

$$(\sim\wedge_2^{+})\frac{\Delta,A_1|\sim A_2\Rightarrow\Delta,A_1,\sim A_2}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\wedge A_2)}$$

$$\Delta|\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim A_1$$

$$(\sim\wedge_3^{+})\frac{\Delta,\sim A_1|A_2\Rightarrow\Delta,\sim A_1,A_2}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\wedge A_2)}$$

其中，$(\sim\wedge^{+})$将被修正的公式添加到 Δ 中，而$(\sim\wedge^{-})$限制公式进入 Δ，R-演算 S 是推理系统 G 和 G^- 的结合，其中 G 对应限制进入，而 G^- 对应添加。具体地，限制公式 A 进入 Δ，当且仅当 $\Delta\Rightarrow\sim A,\sim\sim A$ 在 G 中可证；而添加公式 A 到 Δ 中，并形成包含 Δ 的协调集，当且仅当 $\Delta,A\mapsto$在 G^- 中可证。因此，S 在限制进入时是单调的，在添加时是非单调的。本文第 2 节给出 L_3-值命题逻辑，以及两个 Gentzen 推理系统 G 和 G^- 的基本定义；第 3 节介绍一个用于 L_3-值命题逻辑的可靠的和完备的 Gentzen 类型的推理系统 S；第 4 节介绍一个与 S 等价的简化的推理系统 S′；最后总结全文。

2　L_3-值命题逻辑

L_3-值命题逻辑的语言包含下列符号。

1)命题变元：$p_0,p_1,\cdots$。

2)逻辑连接符：$\sim,\wedge,\vee$。

一个公式 A 是具有下列形式之一的字符串：

$$A::=p|\sim A_1|A_1\wedge A_2|A_1\vee A_2$$

一个赋值 v 是从命题变元集合到 $L_3=\{t,m,f\}$的函数。公式 A 在赋值 v 下的真值 $v(A)$为：

$$v(A)=\begin{cases}(v(p), & A=p\\ \mathrm{f}_{\sim}(v(A_1)), & A=\sim A_1\\ \min\{v(A_1),v(A_2)\}, & A=A_1\wedge A_2\\ \max\{v(A_1),v(A_2)\}, & A=A_1\vee A_2\end{cases}$$

其中，$\mathrm{f}_{\sim}(v(A_1))$的真值如表 2 所列。

表 2　$\mathrm{f}_{\sim}(v(A_1))$的真值表

Table 2　Truth of $\mathrm{f}_{\sim}(v(A_1))$

	$\mathrm{f}_{\sim}$	$\mathrm{f}_{\sim\sim}$	$\mathrm{f}_{\sim\sim\sim}$
t	f	m	t
m	t	f	m
f	m	t	f

因此，

表 3　$v(A)$的的真值表

Table 3　Truth of $v(A)$

	$v(A)$	$v(\sim A)$	$v(\sim\sim A)$
$v(A)$=t	t	f	m
$v(A)$=m	m	t	f
$v(A)$=f	f	m	t

如果 $v(A)=\mathrm{t}$，则称一个公式 A 在赋值 v 下满足，记为 $v\vDash A$；如果 A 在任意赋值 v 下满足，称 A 是有效的，记为 $\vDash A$。设 Δ,Γ 是公式集合，一个矢列式 δ 形如 $\Gamma\Rightarrow\Delta$，称 δ 在赋值 v 下满足，记为 $v\vDash\Gamma\Rightarrow\Delta$，如果 $v\vDash\Gamma$ 蕴涵 $v\vDash\Delta$，其中：

$v\vDash\Gamma$，如果对每一个公式 $A\in\Gamma$，则 $v(A)=\mathrm{t}$

$v\vDash\Delta$，如果对某一个公式 $B\in\Delta$，则 $v(B)=\mathrm{t}$

一个余矢列式 $\Gamma\mapsto\Delta$ 是有效的，记为 $\vDash\Gamma\mapsto\Delta$，如果存在赋值 v 使得 $v\vDash\Gamma$ 且 $v\nvDash\Delta$，其中：

$v\vDash\Gamma$，如果对每一个公式 $A\in\Gamma$，则 $v(A)=\mathrm{t}$

$v\nvDash\Delta$，如果对每一个公式 $B\in\Delta$，则 $v(B)\neq\mathrm{t}$

设 Δ 是文字集合，如果不存在命题变元 p 和两个不同的符号 $*_1,*_2\in\{\lambda,\sim,\sim\sim\}$使得 $*_1p,*_2p\in\Gamma$，称 Δ 是协调的，记为 $con(\Delta)$；否则，Δ 不协调，记为 $incon(\Delta)$。如果存在命题变元 q 使得 $q,\sim q,\sim\sim q\in\Delta$，$\Delta$ 是有效的，记为 $val(\Delta)$；否则，Δ 不是有效的，记为 $inval(\Delta)$，即：

$incon(\Delta)$：$Ep\,E*_1,*_2\in\{\lambda,\sim,\sim\sim\}(*_1p,*_2p\in\Gamma)$

$val(\Delta)$：$Eq(q,\sim q,\sim\sim q\in\Delta)$

在赋值 v 下，当且仅当$(\sim A=\mathrm{t}\,\&\sim A_2=\mathrm{t})$，或$(\sim A_=\mathrm{t}\,\&\,A_2=\mathrm{t})$，或$(A_1=\mathrm{t}\ \&\ A_2=\mathrm{t})$，$\sim(A_1\wedge A_2)=\mathrm{t}$。

Gentzen 推理系统 G 由包含下列公理和推导规则组成。

公理：

$$\frac{incon(\Gamma)\text{或者 }val(\Delta)\text{或者 }\Gamma\cap\Delta\neq\varnothing}{\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

其中，Γ,Δ 是文字集合。

推导规则：

$$(\wedge_1^{L})\frac{\Gamma,A_1\Rightarrow\Delta}{\Gamma,A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}$$

$$(\wedge_2^{L})\frac{\Gamma,A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}$$

$$(\wedge^{R})\frac{\Gamma\Rightarrow B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow B_1\wedge B_2,\Delta}$$

$$(\vee^{L})\frac{\Gamma,A_1\Rightarrow\Delta\quad\Gamma,A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,A_1\vee A_2\Rightarrow\Delta}$$

$$(\vee_1^{R})\frac{\Gamma\Rightarrow B_1,\Delta}{\Gamma\Rightarrow B_1\vee B_2,\Delta}$$

$$(\vee_2^{R})\frac{\Gamma\Rightarrow B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow B_1\vee B_2,\Delta}$$

并且，

$$(\sim\sim\sim^{L})\ \frac{\Gamma,A\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\sim\sim\sim A\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\sim\sim^{R})\frac{\Gamma\Rightarrow B,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim\sim\sim B,\Delta}$$

$$\Gamma,\sim A_1,\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$\Gamma,A_1,\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$(\sim\wedge^{L})\frac{\Gamma,\sim A_1,A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\wedge_1^{R})\frac{\Gamma\Rightarrow\sim B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow\sim B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1\wedge B_2),\Delta}$$

$$(\sim\wedge_2^{R})\frac{\Gamma\Rightarrow B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow\sim B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1\wedge B_2),\Delta}$$

$$(\sim\wedge_3^{R})\frac{\Gamma\Rightarrow\sim B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1\wedge B_2),\Delta}$$

$$\Gamma,\sim A_1,\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$\Gamma,\sim\sim A_1,\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$(\sim\vee^{L})\frac{\Gamma,\sim A_1,\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\vee^{R}_{1})\frac{\Gamma\Rightarrow\sim B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow\sim B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1\vee B_2),\Delta}$$

$$(\sim\vee^{R}_{2})\frac{\Gamma\Rightarrow\sim\sim B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow\sim B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1\vee B_2),\Delta}$$

$$(\sim\vee^{R}_{3})\frac{\Gamma\Rightarrow\sim B_1,\Delta\Gamma\Rightarrow\sim\sim B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim(B_1\vee B_2),\Delta}$$

并且，

$$\Gamma,\sim\sim A_1\Rightarrow\Delta$$

$$(\sim\sim\wedge^{L})\frac{\Gamma,\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\sim\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\sim\wedge^{R}_{1})\frac{\Gamma\Rightarrow\sim\sim B_1,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim\sim(B_1\wedge B_2),\Delta}$$

$$(\sim\sim\wedge^{R}_{2})\frac{\Gamma\Rightarrow\sim\sim B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim\sim(B_1\wedge B_2),\Delta}$$

$$(\sim\sim\vee^{L}_{1})\frac{\Gamma,\sim\sim A_1\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\sim\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\sim\vee^{L}_{2})\frac{\Gamma,\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\sim\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$\Gamma\Rightarrow B_1,\Delta$$

$$(\sim\sim\vee^{R})\frac{\Gamma\Rightarrow B_2,\Delta}{\Gamma\Rightarrow\sim\sim(B_1\vee B_2),\Delta}$$

定理 1（可靠性和完备性定理） 对任意矢列式 $\Gamma\Rightarrow\Delta$，$\Gamma\Rightarrow\Delta$ 在 G 中可证，当且仅当 $\models\Gamma\Rightarrow\Delta$ 成立。

因此，Δ 是有效的，当且仅当 $\Rightarrow\Delta$ 在 G 中可证。在赋值 v 下，$\sim(D_1\wedge D_2)\neq$ t，当且仅当（$\sim D_1\neq$ t or $\sim D_2\neq$ t），并且（$D_1\neq$ t or $\sim D_2\neq$ t），并且（$\sim D_1\neq$ t or $D_2\neq$ t）。

Gentzen 推理系统 G^{-} 由包含下列公理和推导规则组成。

公理：

$$(\mathrm{A})\frac{(con(\Sigma)\&inval(\Pi)\&\Sigma\cap\Pi=\emptyset)}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

其中，Σ,Π 是文字集合。

推导规则：

$$(\wedge^{L})\frac{\Sigma,C_1\vdash\!\!\!\to\Pi\quad\Sigma,C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,C_1\wedge C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$(\wedge^{R}_{1})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to D_1,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to D_1\wedge D_2,\Pi}$$

$$(\wedge^{R}_{2})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to D_1\wedge D_2,\Pi}$$

$$(\vee^{L}_{1})\frac{\Sigma,C_1\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,C_1\vee C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$(\vee^{L}_{2})\frac{\Sigma,C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,C_1\vee C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$(\vee^{R})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to D_1,\Pi\Sigma\vdash\!\!\!\to D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to D_1\vee D_2,\Pi}$$

并且，

$$(\sim\sim\sim^{L})\frac{\Sigma,C\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim\sim\sim C\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$(\sim\sim\sim^{R})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to D,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim\sim\sim D,\Pi}$$

$$\Sigma,\sim C_1\vdash\!\!\!\to\Pi$$

$$(\sim\wedge^{L}_{1})\frac{\Sigma,\sim C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim(C_1\wedge C_2)\sim\Pi}$$

$$\Sigma,C_1\vdash\!\!\!\to\Pi$$

$$(\sim\wedge^{L}_{2})\frac{\Sigma,\sim C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim(C_1\wedge C_2)\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$\Sigma,\sim C_1\vdash\!\!\!\to\Pi$$

$$(\sim\wedge^{L}_{3})\frac{\Sigma,C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim(C_1\wedge C_2)\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_1/\sim D_2,\Pi$$

$$\Sigma\vdash\!\!\!\to D_1/\sim D_2,\Pi$$

$$(\sim\wedge^{R})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_1/D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

$$\Sigma,\sim C_1\vdash\!\!\!\to\Pi$$

$$(\sim\vee^{L}_{1})\frac{\Sigma,\sim C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim(C_1\vee C_2)\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$\Sigma,\sim\sim C_1\vdash\!\!\!\to\Pi$$

$$(\sim\vee^{L}_{2})\frac{\Sigma,\sim C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim(C_1\vee C_2)\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$\Sigma,\sim C_1\vdash\!\!\!\to\Pi$$

$$(\sim\vee^{L}_{3})\frac{\Sigma,\sim\sim C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim(C_1\vee C_2)\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_1/\sim D_2,\Pi$$

$$\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim\sim D_1,\sim D_2,\Pi$$

$$(\sim\vee^{R})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_1/\sim\sim D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\vee D_2),\Pi}$$

并且，

$$(\sim\sim\wedge_{1}{}^{L})\frac{\Sigma,\sim\sim C_1\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim\sim(C_1\wedge C_2)\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$(\sim\sim\wedge_{2}{}^{L})\frac{\Sigma,\sim\sim C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim\sim(C_1\wedge C_2)\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim\sim D_1,\Pi$$

$$(\sim\sim\wedge^{R})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim\sim D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

$$\Sigma,\sim\sim C_1\vdash\!\!\!\to\Pi$$

$$(\sim\sim\vee^{L})\frac{\Sigma,\sim\sim C_2\vdash\!\!\!\to\Pi}{\Sigma,\sim\sim(C_1\vee C_2)\vdash\!\!\!\to\Pi}$$

$$(\sim\sim\vee^{R}_{1})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim\sim D_1,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim\sim(D_1\vee D_2),\Pi}$$

$$(\sim\sim\vee^{R}_{2})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim\sim D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim\sim(D_1\vee D_2),\Pi}$$

其中，推导规则（$\sim\wedge^{R}$）为：

$$(\sim\wedge^{R}_{1})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_1,D_1,\sim D_1,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

$$(\sim\wedge^{R}_{2})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_1,D_1,D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

$$(\sim\wedge^{R}_{3})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_1,\sim D_2,\sim D_1,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

$$(\sim\wedge^{R}_{4})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_1,\sim D_2,D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

$$(\sim\wedge^{R}_{5})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_2,D_1,\sim D_1,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

$$(\sim\wedge^{R}_{6})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_2,D_1,D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

$$(\sim\wedge^{R}_{7})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_2,\sim D_2,\sim D_1,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

$$(\sim\wedge^{R}_{8})\frac{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim D_2,\sim D_2,D_2,\Pi}{\Sigma\vdash\!\!\!\to\sim(D_1\wedge D_2),\Pi}$$

定理 2（可靠性和完备性定理） 对任意余矢列式 $\Gamma\vdash\!\!\!\to\Delta$，$\Gamma\vdash\!\!\!\to\Delta$ 在 G^{-} 中是可证的，当且仅当 $\models\Gamma\vdash\!\!\!\to\Delta$ 成立。

因此，Γ 是协调的，当且仅当 $\Gamma \mapsto$ 在 G^- 中可证。

3 R-演算

设 A 是一个公式，一个 R-转换 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是有效的，记为 $\models \Delta|A\Rightarrow\Delta,C$，如果

$$C=\begin{cases}A, & \Delta,A\ \text{是协调的}\\ \lambda, & \text{否则}\end{cases}$$

R-演算 R^L 由下列公理和推导规则组成。

公理：

$$(A^-)\frac{incon(\Delta,l)}{\Delta|l\Rightarrow\Delta}\qquad(A^+)\frac{con(\Delta,l)}{\Delta|l\Rightarrow\Delta,l}$$

其中，Δ 是文字集合，并且：

$con(\Delta)$：$\sim Ep,*_1,*_2\in\{\lambda,\sim,\sim\sim\}(*_1p,*_2p\in\Delta)$

$incon(\Delta)$：$Ep,*_1,*_2\in\{\lambda,\sim,\sim\sim\}(*_1p,*_2p\in\Delta)$

其中，$\sim$，&，or，A，E 是元语言中的符号，对应地，$\sim$，$\wedge$，$\vee$，$\forall$，$\exists$ 是形式语言中的符号。

推导规则：

$$(\sim\sim\sim^-)\frac{\Delta|A\Rightarrow\Delta}{\Delta|\sim\sim\sim A\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\sim\sim^+)\frac{\Delta|A\Rightarrow\Delta,A}{\Delta|\sim\sim\sim A\Rightarrow\Delta,\sim\sim\sim A}$$

$$(\wedge_1^-)\frac{\Delta|A_1\Rightarrow\Delta}{\Delta|A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}$$

$$(\wedge_2^-)\frac{\Delta,A_1|A_2\Rightarrow\Delta,A_1}{\Delta|A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta}$$

$$(\wedge^+)\frac{\Delta|A_1\Rightarrow\Delta,A_1\Delta,A_1|A_2\Rightarrow\Delta,A_1,A_2}{\Delta|A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta,A_1\wedge A_2}$$

$$(\vee^-)\frac{\Delta|A_1\Rightarrow\Delta\quad\Delta|A_2\Rightarrow\Delta}{\Delta|A_1\vee A_2\Rightarrow\Delta}$$

$$(\vee_1^+)\frac{\Delta|A_1\Rightarrow\Delta,A_1}{\Delta|A_1\vee A_2\Rightarrow\Delta,A_1\vee A_2}$$

$$(\vee_2^+)\frac{\Delta|A_2\Rightarrow\Delta,A_2}{\Delta|A_1\vee A_2\Rightarrow\Delta,A_1\vee A_2}$$

并且，

$$\Delta|\sim A_1\wedge\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$\Delta|A_1\wedge\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$(\sim\wedge^-)\frac{\Delta|\sim A_1,A_2\Rightarrow\Delta}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$\Delta|\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim A_1$$

$$(\sim\wedge_1^+)\frac{\Delta,\sim A_1|\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim A_1,\sim A_2}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\wedge A_2)}$$

$$\Delta|A_1\Rightarrow\Delta,\sim A_1$$

$$(\sim\wedge_2^+)\frac{\Delta,A_1|\sim A_2\Rightarrow\Delta,A_1,\sim A_2}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\wedge A_2)}$$

$$\Delta|\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim A_1$$

$$(\sim\wedge_3^+)\frac{\Delta,\sim A_1|A_2\Rightarrow\Delta,\sim A_1,A_2}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\wedge A_2)}$$

$$\Delta|\sim A_1\wedge\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$\Delta|\sim\sim A_1\wedge\sim A_2\Rightarrow\Delta$$

$$(\sim\vee^-)\frac{\Delta|\sim A_1\wedge\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta}{\Delta|\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$\Delta|\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim A_1$$

$$(\sim\vee_1^+)\frac{\Delta,\sim A_1|\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim A_1,\sim A_2}{\Delta|\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\vee A_2)}$$

$$\Delta|\sim\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim\sim A_1$$

$$(\sim\vee_2^+)\frac{\Delta,\sim\sim A_1|\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim\sim A_1,\sim A_2}{\Delta|\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\vee A_2)}$$

$$\Delta|\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim A_1$$

$$(\sim\vee_3^+)\frac{\Delta,\sim A_1|\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim A_1,\sim\sim A_2}{\Delta|\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\vee A_2)}$$

并且，

$$\Delta|\sim\sim A_1\Rightarrow\Delta$$

$$(\sim\sim\wedge^-)\frac{\Delta|\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta}{\Delta|\sim\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\sim\wedge_1^+)\frac{\Delta|\sim\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim\sim A_1}{\Delta|\sim\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,\sim\sim(A_1\wedge A_2)}$$

$$(\sim\sim\wedge_2^+)\frac{\Delta|\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim\sim A_2}{\Delta|\sim\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,\sim(A_1\wedge A_2)}$$

$$(\sim\sim\vee_1^-)\frac{\Delta|\sim\sim A_1\Rightarrow\Delta}{\Delta|\sim\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\sim\vee_2^-)\frac{\Delta,\sim\sim A_1|\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim\sim A_1}{\Delta|\sim\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta}$$

$$(\sim\sim\vee^+)\frac{\Delta,\sim\sim A_1|\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim\sim A_1,\sim\sim A_2}{\Delta|\sim\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta,\sim\sim(A_1\vee A_2)}$$

定义 1 $\vdash_S\Delta|A\Rightarrow\Delta$ 是 $\vdash_S$ 可证的，记为 $\vdash_S\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$，如果存在一个 R-转换序列 $\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$ 使得 $\delta_1=\Delta|A\Rightarrow\Delta$，则 C 成立，并且对每一个 $\delta_i(i\leqslant n)$ 都是从前面的 R-转换中通过一个推导规则推导出来的。

定理 3（可靠性定理） 对于任意 R-转换 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 如果 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是 $\vdash_S$ 可证的，则 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是有效的。

定理 4（完备性定理） 对于任意 R-转换 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$，如果 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是有效的，则 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是 $\vdash_S$ 可证的。

S 与 G，G^- 的比较表明，S 结合了 G 中的 $\Rightarrow\Delta$ 和 G^- 中的 $\Delta\mapsto$。

4 R-演算 *S* 的简化形 *S′*[13-15]

R-演算 S′由下列公理和推导规则组成。

公理：

(A)$\Delta|l\Rightarrow\Delta,l'$

其中，

$$l'=\begin{cases}l, & \vdash\Delta\mapsto\sim l\vee\sim\sim l\\ \lambda, & \vdash\Delta\Rightarrow\sim l\vee\sim\sim l\end{cases}$$

推导规则：

$$(\sim\sim\sim)\frac{\Delta|A\Rightarrow\Delta,C}{\Delta|\sim\sim\sim A\Rightarrow\Delta,\sim\sim\sim C}$$

$$\Delta|A_1\Rightarrow\Delta,C_1$$

$$(\wedge)\frac{\Delta,C_1|A_2\Rightarrow\Delta,C_1,C_2}{\Delta|A_1\wedge A_2\Rightarrow\Delta,\min\{C_1,C_2\}}$$

$$\Delta|\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim C_1$$

$$\Delta,\sim C_1|\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim C_1,\sim C_2$$

$$\Delta|A_1\Rightarrow\Delta,\sim C_3$$

$$\Delta,C_3|\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim C_4$$

$$(\sim\wedge)\frac{\Delta,\sim C_1|A_2\Rightarrow\Delta,C_5}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,c_1}$$

$$\Delta|A_1\Rightarrow\Delta,C_1$$

$$(\vee)\frac{\Delta|A_2\Rightarrow\Delta,C_2}{\Delta|A_1\vee A_2\Rightarrow\Delta,\max\{C_1,C_2\}}$$

$$
\begin{array}{l}
\Delta|\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim C_1\\
\Delta,\sim C_1|\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim C_1,\sim C_2\\
\Delta|\sim\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim\sim C_3\\
\Delta,\sim\sim C_3|\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim C_4\\
(\sim\vee)\dfrac{\Delta,\sim C_1|\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim\sim C_5}{\Delta|\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,c_2}
\end{array}
$$

并且，

$$
(\sim\sim\wedge)\ \dfrac{\Delta|\sim\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim\sim C_1\quad \Delta|\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim\sim C_2}{\Delta|\sim\sim(A_1\wedge A_2)\Rightarrow\Delta,\max\{\sim\sim C_1,\sim\sim C_2\}}
$$

$$
(\sim\sim\vee)\ \dfrac{\Delta|\sim\sim A_1\Rightarrow\Delta,\sim\sim C_1\quad \Delta|\sim\sim A_2\Rightarrow\Delta,\sim\sim C_2}{\Delta|\sim\sim(A_1\vee A_2)\Rightarrow\Delta,\min\{\sim\sim C_1,\sim\sim C_2\}}
$$

其中，

$$
\min\{C_1,C_2\}=\begin{cases}\lambda, & C_1\text{ 或者 }C_2=\lambda\\ A_1*A_2, & C_1=A_1\text{ 并且 }C_2=A_2\end{cases}
$$

$$
\max\{C_1,C_2\}=\begin{cases}\lambda, & C_1=\lambda\text{ 并且 }C_2=\lambda\\ A_1*A_2, & C_1=A_1\text{ 或 }C_2=A_2\end{cases}
$$

并且，

$$
c_1=\max\left\{\begin{array}{l}\min\{\sim C_1,\sim C_2\}\\ \min\{\sim C_1,C_5\}\\ \min\{C_3,\sim C_4\}\end{array}\right\}
$$

$$
c_2=\max\left\{\begin{array}{l}\min\{\sim C_1,\sim C_2\}\\ \min\{\sim\sim C_3,\sim C_4\}\\ \min\{\sim C_1,\sim\sim C_5\}\end{array}\right\}
$$

定义 2 $\vdash_{S'}\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是 $\vdash_{S'}$ 可证的，记为 $\vdash_{S'}\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$，如果存在 R-转换序列 $\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$ 使得 $\delta_1=\Delta|A\Rightarrow\Delta$，则 C 成立，并且对于每一个 $\delta_i(i\leqslant n)i\leqslant n$，$\delta_i$ 都是由前面的转换通过 S′的一个规则推导出来的。

定理 5(可靠性定理) 对任意 R-转换 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$，如果 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是 $\vdash_{S'}$ 可证的，则 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是有效的。

定理 6(完备性定理)[16-18] 对任意 R-转换 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$，如果 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是有效的，则 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是 $\vdash_{S'}$ 可证的。

定理 7(等价定理) 对任意 R-转换 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$，$\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是 $\vdash_S$ 可证的，当且仅当 $\Delta|A\Rightarrow\Delta,C$ 是 $\vdash_{S'}$ 可证的。

结束语 本文给出了 3-值命题逻辑，分别构建了关于矢列式和余矢列式的 Gentzen 推理系统 G 和 G⁻，并证明了其关于 3-值语义的可靠性和完备性。基于 Gentzen 推理系统提出 R-演算 S，证明了 S 是关于 R-转换语义可靠的和完备的。

参 考 文 献

[1] LI W. Mathematical logic, foundations for information science [M] // Progress in Computer Science and Applied Logic. Birkhauser, 2010.

[2] TAKEUTI G. Proof theory(Second Edition)[M]. Mineola, New York: Dover Publications, 2013.

[3] CAO C G, SUI Y F, WANG Y. The nonmonotonic propositional logics [J]. Artificial Intelligence Research, 2016, 5: 111-120.

[4] REITER R. A logic for default reasoning [J]. Artificial Intelligence, 1980, 13: 81-132.

[5] ALCHOURRÓN C E, GARDENFORS P, MAKINSON D. On the logic of theory change: partial meet contraction and revision functions [J]. The Journal of Symbolic Logic, 1985, 50: 510-530.

[6] BOCHMAN A. A foundational theory of belief and belief change [J]. Artificial Intelligence, 1999, 108: 309-352.

[7] FERMÉ E, HANSSON S O. AGM 25 years: twenty-five years of research in belief change [J]. Journal of Philosophical Logic, 2011, 40(2): 295-331.

[8] LI W. R-calculus: An inference system for belief revision [J]. The Computer Journal, 2007, 50: 378-390.

[9] DARWICHE A, PEARL J. On the logic of iterated belief revision [J]. Artificial Intelligence, 1997, 89: 1-29.

[10] FRIEDMAN N, HALPERN J Y. Belief revision: a critique [C] // Principles of Knowledge Representation and Reasoning: proceedings of the 5th International Conference. 1996: 421-431.

[11] AVRON A. Natural 3-valued logics-characterization and proof theory [J]. Journal of Symbolic Logic, 1991, 56: 276-294.

[12] GOTTWALD S. A treatise on many-valued logics [M]. Research Studies Press, 2001.

[13] AVRON A. On the expressive power of three-valued and four-valued languages [J]. Journal of Logic and Computation, 1999, 9: 977-994.

[14] HANSSON S O. Theory contraction and base contraction unified [J]. The Journal of Symbolic Logic, 1993, 58: 602-625.

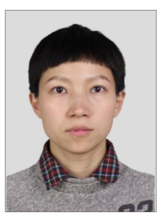
[15] HERZIG A, RIFI O. Propositional belief base update and minimal change [J]. Artificial intelligence, 1999, 115: 107-138.

[16] PYNKO A P. Implicational classes of demorg-an lattices [J]. Discrete Mathematics, 1999, 205: 171-181.

[17] SATOH K. Nonmonotonic reasoning by minimal belief revision [C] // Proceedings of the international conference on Fifth Generation Computer Systems. Tokyo, 1988: 455-462.

[18] URQUHART A. Basic many-valued logic(2^{nd} Edition)[M] // Handbook of Philosophical Logic. Kluwer Academic Publishers, 2001: 249-295.

CAO Cun-gen, born in 1964, Ph.D, professor, Ph.D supervisor, is a member of CCF. His main research interests include large-scale knowledge process.



HU Lan-xi, born in 1980, master, engineer. Her main research interests include foundation of large-scale knowledge process.