

# 一种无约束优化的无参数填充函数算法

张玉琴 张建亮 冯向东

成都理工大学工程技术学院 四川 乐山 614000

**摘要** 填充函数法是求解无约束全局优化问题的重要方法,其核心工作在于构建具有良好性质、形式简单而且容易求解极小值的填充函数。基于填充函数的定义,针对无约束的全局优化问题的目标函数满足条件的基础上,构建了一个无参数的填充函数。此函数形式简单,便于计算。针对此填充函数,首先,在满足合适的假设条件下,研究并证明了填充函数的某些性质;其次,在遵照这些相关性质的基础上,设计了适合此填充函数的算法,该填充函数算法主要包含极小化过程与填充过程,这两个过程循环交替进行,直至满足终止条件;最后,利用经典算例,进行了算例实验并与其他文献结果比较。结果显示,不仅此填充函数可行,算法有效;而且计算结果准确,计算迭代次数较少。

**关键词:** 填充函数;全局优化;局部极小解;全局极小解;算例实验

**中图法分类号** O224;TP301.6

## Parametric-free Filled Function Algorithm for Unconstrained Optimization

ZHANG Yu-qin, ZHANG Jian-liang and FENG Xiang-dong

The Engineering & Technical College of Chengdu University of Technology, Leshan, Sichuan 614000, China

**Abstract** Filled function method is a kind of important method for solving unconstrained optimization problem. The key of the method is to construct a filled function with good properties, simple form and easy to solve the minimum value. Based on the definition of filled function and certain conditions of the objective function for unconstrained global optimization problem, a non-parameter filled function is proposed for solving this problem, which is simple and easy to be calculated. For the filled function, firstly, under suitable assumptions, some properties of filled function are studied and proved. Secondly, according to the related properties, an algorithm suitable for this filled function algorithm is established. The filled function algorithm consists of two phases: the minimization phase and the filling phase. The two phases alternate until the termination criterion is met. Finally, through classical examples, numerical experiments are carried out and compared with the results of other literatures. Experiments results show that not only the filled function is feasible and the algorithm is effective, but also the results are accurate and the number of iterations is less.

**Keywords** Filled function, Global optimization, Local minimum, Global minimum, Example experiment

## 1 引言

西安交通大学的葛仁傅教授于1990年提出了填充函数法<sup>[1]</sup>,它是求解无约束最优化问题的确定性算法之一。日常生活中遇到的众多问题均可以用最优化问题解决,因而填充函数法成为了科研工作者研究的热点<sup>[2-7]</sup>。填充函数法的核心是填充函数,它的形式与性质决定了算法的效率。研读文献知,填充函数的构建大都含有一个参数<sup>[4,8-10]</sup>或两个参数<sup>[1,3,5]</sup>,而且是目标函数的复合函数。有些由于目标函数本身很复杂,有些由于填充函数为分段函数<sup>[3,5]</sup>,因此填充函数算法的效率较低。最终,学者们竭尽全力地构造无参数、形式简单且具有优良性质的填充函数,并研究了函数的性质。近几年,研究者们提出了众多具有优良性质的填充函数,其中文献<sup>[11-13]</sup>提出了无参数的填充函数。

经过研读文献,本文构建了一个连续且无参数、形式简

单、便于计算的填充函数,并进行了算例验证。算例证明,构造的填充函数是可行的,算法是有效的。

## 2 最优化模型与填充函数的定义

本文研究的是无约束的最优化问题:

$$(P_0) \min_{x \in R^n} f(x) \quad (1)$$

$f(x)$ 为 $R^n \rightarrow R^1$ 的函数, $x$ 为 $n$ 维向量。

**定义 1**(盆谷)<sup>[15]</sup>  $B^*$ 是 $f(x)$ 在点 $x^*$ 处的盆谷,则它是满足下列性质的连通区域:

- (1)从 $B^*$ 内的任意点开始的下降轨线都终止于 $x^*$ ;
- (2)从 $B^*$ 外的任意点开始的下降轨线都不终止于 $x^*$ 。

$B^*$ 又称为 $f(x)$ 在局部极大值点 $x^*$ 处的山丘。

若局部极小值点 $x_1^*$ 高于 $x^*$ ,充分必要条件是 $f(x_1^*) > f(x^*)$ ,则称 $x_1^*$ 所在的盆谷 $B_1^*$ 高于 $x^*$ 所在的盆谷 $B^*$ 。

若目标函数 $f(x)$ 满足如下3个假设条件<sup>[1]</sup>:

基金项目:四川省教育厅自然科学重点项目(18ZA0075,18ZA0073);成都理工大学工程技术学院基金项目(C122017043,C122017042)

This work was supported by the Key Natural Science Projections of Sichuan Provincial Department of Education (18ZA0075,18ZA0073) and Fund Projects of The Engineering & Technical College of Chengdu University of Technology (C122017043,C122017042).

通信作者:张玉琴(308179862@qq.com)

(1)在  $R^n$  上,目标函数  $f(x)$  连续且可微;

(2)目标函数  $f(x)$  是强制的,即当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $f(x) \rightarrow \infty$  也即在此假设条件下,存在有界闭区域  $X \subset R^n$ ,使得  $f(x)$  的所有全局极小解包含在  $X$  内部;

(3)目标函数  $f(x)$  在  $X$  上可以有无数个相异的局部极小解,但是仅有有限个相异的局部极小值,因此每个极小解都是孤立的,并且对于  $f(x)$  的每一个极小解  $x^*$  处的盆谷  $B^*$  内的任一点  $x(x \neq x^*)$ ,都有  $f(x) > f(x^*)$ 。

**定义 2**<sup>[1]</sup> 设  $x^*$  是  $f(x)$  的一个已知局部极小解,如果  $P(x, x^*)$  是  $f(x)$  在  $x^*$  处的填充函数,则满足以下条件:

(1) $x^*$  是  $P(x, x^*)$  的局部极大值点,而  $f(x)$  在  $x^*$  的盆谷  $B^*$  为  $P(x, x^*)$  山丘的一部分;

(2)所有比  $x^*$  的盆谷  $B^*$  高的盆谷处,不会有  $P(x, x^*)$  的局部极小值点或鞍点;

(3)若存在盆谷  $B^*$  高于盆谷  $B_1^*$ ,则必定存在  $x' \in B_1^*$ ,使得  $P(x, x^*)$  的局部极小解在  $x^*$  与  $x'$  的连线上。

### 3 无参数填充函数

构造的填充函数如式(2)所示:

$$P(x, x_1^*) = -\ln(1 + \|x - x_1^*\|^2)(f(x) - f(x_1^*))^3 \quad (2)$$

其中,  $x_1^*$  为  $f(x)$  的一个已知局部极小解。

**定理 1**  $P(x, x_1^*)$  为一个连续函数。

证明:从假设条件(1)可得  $P(x, x_1^*)$  为一个连续函数。

**定理 2** 若  $x_1^*$  是  $f(x)$  的一个已知局部极小解,则点  $x_1^*$  为  $P(x, x_1^*)$  的严格局部极大解。

证明:由于  $x_1^*$  为  $f(x)$  的一个已知局部极小解,因此在  $x_1^*$  的盆谷  $B_1^*$  内,任取  $x \in B_1^*$ ,并且当  $x \neq x_1^*$  时,  $f(x) > f(x_1^*)$ ,因此对任意的  $x \in B_1^*$ ,且当  $x \neq x_1^*$  时,  $P(x, x_1^*) = -\ln(1 + \|x - x_1^*\|^2)(f(x) - f(x_1^*))^3 < 0$ ,又由于  $P(x_1^*, x_1^*) = 0$ ,因此  $P(x, x_1^*) < P(x_1^*, x_1^*)$ 。因此,点  $x_1^*$  为  $P(x, x_1^*)$  的严格局部极大解。

**定理 3** 设  $f(x) > f(x_1^*)$ ,当  $x \neq x_1^*$  时,有  $\nabla P(x, x_1^*) \neq 0$ 。证明:由于  $P(x, x_1^*) = -\ln(1 + \|x - x_1^*\|^2)(f(x) - f(x_1^*))^3$ ,因此  $\nabla P(x, x_1^*) = \frac{-2(x - x_1^*)}{1 + \|x - x_1^*\|^2}(f(x) - f(x_1^*))^3 - 3\ln(1 + \|x - x_1^*\|^2)(f(x) - f(x_1^*))^2 \nabla f(x)$ 。由  $x \neq x_1^*$  且  $f(x) > f(x_1^*)$  可得

$$\frac{(f(x) - f(x_1^*))^3}{1 + \|x - x_1^*\|^2} > 0, \ln(1 + \|x - x_1^*\|^2)(f(x) - f(x_1^*))^2 > 0。$$

由于在  $R^n$  上  $f(x)$  连续可微,因此由泰勒公式展开可得:  $f(x_1^*) = f(x) + (x_1^* - x)^T \nabla f(x) + o(\|x_1^* - x\|)$ 。因此  $f(x_1^*) - f(x) = (x_1^* - x)^T \nabla f(x) + o(\|x_1^* - x\|)$ 。由  $f(x) > f(x_1^*)$ ,可得  $f(x_1^*) - f(x) < 0$ ,因此  $(x_1^* - x)^T \nabla f(x) + o(\|x_1^* - x\|) < 0$ ,即  $(x_1^* - x)^T \nabla f(x) < 0$ ,也即  $(x - x_1^*)^T \nabla f(x) = -(x_1^* - x)^T \nabla f(x) > 0$ ,因此  $(x - x_1^*)^T \nabla P(x, x_1^*) = \frac{-2\|x - x_1^*\|^2}{1 + \|x - x_1^*\|^2}(f(x) - f(x_1^*))^3 - 3\ln(1 + \|x - x_1^*\|^2)(f(x) - f(x_1^*))^2(x - x_1^*)^T \nabla f(x)$ ,即  $(x - x_1^*)^T \nabla P(x, x_1^*) < 0$ 。

此定理证明了:若  $f(x) > f(x_1^*)$ ,则  $\nabla P(x, x_1^*)$  无鞍点,而且易得  $d = x - x_1^*$  是  $P(x, x_1^*)$  的一个下降方向。

**定理 4** 若  $x_1^*$  不是  $f(x)$  的一个全局极小解,且  $x^*$  为

$f(x)$  邻近  $x_1^*$  的另一个局部极小解,  $f(x^*) < f(x_1^*)$ ,则存在一个点  $x' \in B^*$ ,任取一点  $\bar{x} \in U(x^*)$ ,使得  $x'$  为  $P(x, x_1^*)$  的最小值,且  $x'$  在  $x_1^*$  和  $\bar{x}$  的直线上。

证明:由于  $x_1^*$  为  $f(x)$  的局部极小解,因此对于  $x_1^*$  的盆谷  $B_1^*$  内的任意点  $x \neq x_1^*$ ,有  $f(x) > f(x_1^*)$ ,因此  $P(x, x_1^*) = -\ln(1 + \|x - x_1^*\|^2)(f(x) - f(x_1^*))^3 < 0$ 。由于  $x^*$  是  $f(x)$  邻近  $x_1^*$  的另一个局部极小解,则存在  $U(x^*)$ ,对于任意的  $\bar{x} \in U(x^*)$ ,有  $f(x_1^*) > f(\bar{x}) > f(x^*)$ ,而且  $P(\bar{x}, x_1^*) = -\ln(1 + \|\bar{x} - x_1^*\|^2)(f(\bar{x}) - f(x_1^*))^3 > 0$ 。易知  $P(x_1^*, x_1^*) = 0$ ,当  $x$  远离  $x_1^*$  时,  $P(x, x_1^*) < 0$ ;当  $x$  接近  $\bar{x}$  时,  $P(x, x_1^*) > 0$ 。因此可得,当  $f(x) > f(x_1^*)$  时,  $P(x, x_1^*)$  单调递增;当  $f(x) < f(x_1^*)$  时,  $P(x, x_1^*)$  单调递减。又因为  $P(x, x_1^*)$  是连续函数,可知存在一点  $\bar{x} \in U(x^*)$ ,存在一点  $x'$  在  $x_1^*$  与  $\bar{x}$  的直线上,使得  $P(x, x_1^*)$  最小。

**定理 5** 若  $x_1^*$  为  $f(x)$  的一个全局极小解,则对于任一  $x \neq x_1^*$ ,总有  $P(x, x_1^*) \leq 0$ ;否则存在一点  $x_0$  和  $U(x_0)$ ,且  $f(x_0) < f(x_1^*)$ ,使得对于任一  $x \in U(x_0)$ ,总有  $P(x, x_1^*) > 0$ 。

证明:由于  $x_1^*$  为  $f(x)$  的一个全局极小解,则对于任一  $x \neq x_1^*$ ,总有  $f(x) \geq f(x_1^*)$ ,易证  $P(x, x_1^*) \leq 0$ 。

若  $x_1^*$  不是  $f(x)$  的一个全局极小解,则存在点  $x_0$ ,使得  $f(x_0) < f(x_1^*)$ ;又因为  $f(x)$  是连续函数,存在  $U(x_0)$ ,使得对于任一  $x \in U(x_0)$ ,总有  $f(x) < f(x_1^*)$ ,因此  $P(x, x_1^*) > 0$ 。

由上述证明可得,  $P(x, x_1^*)$  满足填充函数的定义。

## 4 算法和算例试验

### 4.1 填充函数算法

本文对文献[11]的算法加以改进:

Step1 设定搜索步长  $\delta > 0$ ,任意选取初始点  $x_0 \in X$ ,令  $i=1, j=1, k=2 \min(3^n - 1, 2n)$ ,其中  $n$  是目标函数中变量的个数。

Step2 从初始点  $x_0$  开始,利用求解局部极小化的方法找到目标函数  $f(x)$  的一个局部极小解  $x_1^*$ ,并且求出局部极小值  $f(x_1^*)$ 。

Step3 若  $j < k$ ,转到 Step4;否则  $x_1^*$  作为全局极小解,停止运算。

Step4 把  $x_1^*$  作为初始点,求  $P(x, x_1^*)$  的局部极小值解  $x_2^*$ 。

Step5 令  $x = x_2^*$ 。

Step6 若  $P(x, x_1^*) > 0$ ,即  $f(x) < f(x_1^*)$ ,则令  $i = i + 1, x_0 = x$ ,转到 Step2;否则转到 Step7。

Step7 若  $m < 3^n - 1$ ,令  $x = x + \delta e_m$ ,转到 Step4,否则  $m = m + 1$ ;若  $x \notin X$ ,则  $i = i + 1$ ,转到 Step3,否则转到 Step7。

### 4.2 算例试验

用 Matlab2014a 编写程序实现此程序,目标函数  $f(x)$  的极小解用 fmincon 求解;填充函数  $P(x, x_1^*)$  的极小解用 fminunc 求解。本文从不同的初始值求解极小解,利用填充函数法成功地找到下列函数的全局极小解。其中,  $x_0$  为初始值,  $x^*$  为全局极小解,  $f(x^*)$  为全局极小值,  $i$  为迭代次数。

算例 1  $f(x) = \sin x + \sin(10x/3) + \ln x - 0.84x, 1 \leq x \leq 6$

该函数在给定范围内的局部极小解有 3 个,如图 1 所示,

而全局极小解  $x^* = 5.1998$ , 全局极小值  $f^* = -4.6013$ , 如表 1 所列。而文献[11]取上述初始值时, 分别迭代 3, 2, 1 次。

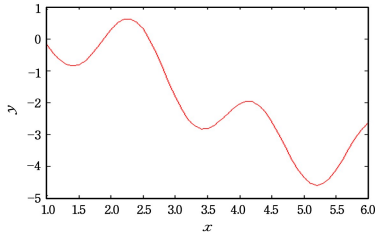


图 1 算例 1 的函数图像

Fig. 1 Function image of example 1

表 1 算例 1 计算结果

Table 1 Result of example 1

$x_0$	$x^*$	$f(x^*)$	$i$
1.0000	5.1998	-4.6013	2
3.0000	5.1998	-4.6013	1
5.0000	5.1998	-4.6013	1

算例 2  $f(x) = \sin x + \sin 3x, 0 \leq x \leq 4$

该算例的全局极小解为  $x^* = 3.7571$ , 全局极小值为  $f^* = -1.5396$ , 如表 2 所列。而文献[11]取上述初始值时, 分别迭代 2, 2, 1 次。

表 2 算例 2 计算结果

Table 2 Result of example 2

$x_0$	$x^*$	$f(x^*)$	$i$
1.0000	3.7571	-1.5396	1
2.0000	3.7571	-1.5396	2
3.0000	3.7571	-1.5396	1

算例 3  $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cos(18x_1) - \cos(18x_2), -1 \leq x_1, x_2 \leq 1$

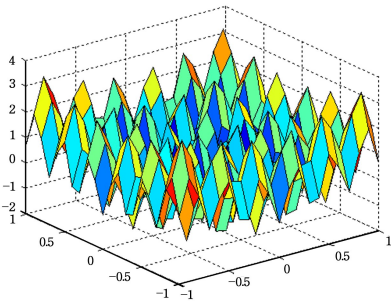


图 2 算例 3 的函数图像

Fig. 2 Function image of example 3

该函数在给定范围内的局部极小解有多个, 如图 3 所示; 但是全局极小解只有一个  $x^* = (0, 0)$ , 全局极小值  $f^* = -2.0000$ , 如表 3 所列。

表 3 算例 3 结果

Table 3 Result of example 3

$x_0$	$x^*$	$f(x^*)$	$i$
(0.5, 0.5)	$(-0.4668, -0.4668) \times 10^{-9}$	-2	2
(1, 1)	$(-0.6795, 0.05552) \times 10^{-9}$	-2	1
(-0.5, -1)	$(-0.4668, -0.4668) \times 10^{-9}$	-2	3

当初始值为(1,1)且迭代次数为 4 次时, 文献[7]算例的全局极小解  $x^* = (-0.0000002, -0.0000002)$ , 全局极小值

$f^* = -1.99999999$ ; 而文献[8]算例的, 全局极小解  $x^* = (0.124801 \times 10^{-7}, 0.142417 \times 10^{-7})$ , 全局极小值  $f^* = -1.99999999$ 。

算例 4 3-hump back camel function:

$$f(x) = 2x_1^2 - 1.05x_1^4 + x_1^6/6 - x_1x_2 + x_2^2, -3 \leq x_1, x_2 \leq 3$$

该算例的全局极小解  $x^* = (0, 0)$ , 全局极小值  $f^* = 0$ , 如表 4 所列。而文献[11]取初始值(-2, 0.5)时, 迭代 2 次。

表 4 算例 4 计算结果

Table 4 Result of example 4

$x_0$	$x^*$	$f(x^*)$	$i$
(-2, 0.5)	$(0.1133, 0.1133) \times 10^{-7}$	$2.8357 \times 10^{-16}$	1
(1, 1)	$(0.1016, 0.1347) \times 10^{-7}$	$2.5102 \times 10^{-16}$	2
(-2, -1)	$(-0.1016, -0.1347) \times 10^{-7}$	$2.5102 \times 10^{-16}$	2

结论 1 填充函数的算法是可行的, 但此填充函数算法仍有缺点, 比如从图 3 可以看出, 在计算填充函数的极小解时, 函数的变化较小, 运算速度较慢。

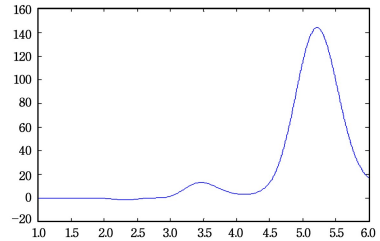


图 3 算例 1 的填充函数

Fig. 3 Filled function of example 1

结论 2 与文献[7-8, 11]相应的数值结果相比, 算法的迭代次数较少, 而且精度更高。

结束语 本文构建了一个无参数的连续填充函数  $P(x, x_1^*)$ , 它解决了含参数的填充函数调节困难的问题, 加强了运算的实用性, 同时也提高了此算法的运算效率。从文中算例验证可知, 此填充函数算法是可行的。

接下来的任务是在该算法的基础上, 找出更好的填充函数; 也可以把此算法应用于整数规划、带约束的非线性优化、多目标优化领域, 或与其他方法结合使用<sup>[15-18]</sup>。

### 参考文献

[1] GE R P. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables[J]. Math. Prog., 1990, 46:191-204.

[2] LIU X. The impelling function method applied to global optimization [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 151: 745-754.

[3] ZHANG L S, N G C K, LID. A new filled function method for global optimization[J]. Journal of Global Optimization, 2004, 28:17-43.

[4] SHANG Y L, PU D G, JIANG A P. Finding global minimizer with one parameter filled function on unconstrained global optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 191: 176-182.

[5] YANG Y J, SHANG Y L. A new filled function method for unconstrained global optimization[J]. Applied Mathematics and

- Computation, 2006, 173: 501-512.
- [6] LIANG Y M, ZHANG L S, LI M M, et al. A filled function method for global optimization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 205: 16-31.
- [7] WANG C J, YANG Y J, LI J. A new filled function method for unconstrained global optimization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 225: 68-79.
- [8] HE S X, CHENG W L. A filled function algorithm for unconstrained global optimization problems[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2011, 38(2): 144-149.
- [9] LIANG Y M, LI M M, CHI D X. A Filled Function Method with One Parameter for Global Optimization[J]. Operations Research Transactions, 2009, 13(4): 102-108.
- [10] CAI Z Z, YE Z Q. New Continuously Differentiable Filled Function with One Parameter[J]. Computer Science, 2016, 43(8): 204-206.
- [11] LI B, LU D J. A Parameter-free filled function method for global optimization[J]. Journal of Mathematics, 2014, 34(4): 773-778.
- [12] WANG P, LI B, WANG P. Parameter-free Filled Function Method for the Global Optimization Problems[J]. Journal of Qingdao University of Science and Technology(Natural Science Edition), 2008, 29(6): 553-556.
- [13] MAO J, YANG Y J. A Filled Function Method Without Parameter[J]. Communication on Applied Mathematics and Computation, 2010, 24(1): 35-44.
- [14] ROCKAFELLAR R T. Convex Analysis [M]. Prentice Hall, 1970.
- [15] LIN Y J, YANG Y J. Filled function method for nonlinear equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 234(3): 695-702.
- [16] GAO L F, LIU X W. The Global Optimization Algorithm Based on Chaos Optimization and Filled Function[J]. Operations Research and Management Science, 2009, 18(2): 25-29.
- [17] GAO Y L, WU P P. A New Parameter-free Filled Function Algorithm for Nonlinear Integer Programming[J]. Journal of Computational Mathematics, 2017, 39(3): 321-327.
- [18] SHI L T, CHEN W. A Filled-filter Function Algorithm for Solving Unconstrained Integer Programming[J]. Communications on Applied Mathematics and Computation, 2018, 32(2): 331-342.



**ZHANG Yu-qin**, born in 1977, master, lecture. Her main research interests include optimization theory and algorithm.

(上接第 39 页)

- [9] QI R L, ZHOU W J, LIU J G, et al. Obstacle Avoidance Trajectory Planning for Gaussian Motion of Robot Based on Probability Theory[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(5): 93-100.
- [10] CHEN Y, PENG H, GRIZZLE J. Obstacle Avoidance for Low-Speed Autonomous Vehicles With Barrier Function[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2018, 26(1): 194-206.
- [11] MALONE N, CHIANG H T, LESSER K, et al. Hybrid Dynamic Moving Obstacle Avoidance Using a Stochastic Reachable Set-Based Potential Field[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2017, 33(5): 1124-1138.
- [12] LIEBOWITZ B. Human Territories: How We Behave in Space-Time[J]. Family Process, 2004, 15(4): 447-451.
- [13] LANG P J, BRADLEY M M, CUTHBERT B N. Emotion, attention, and the startle reflex[J]. Psychological Review, 1990, 97(3): 377-395.
- [14] ELLIOT A J. The Hierarchical Model of Approach-Avoidance Motivation[J]. Motivation and Emotion, 2006, 30(2): 111-116.
- [15] ALEXOPOULOS T, RIC F. The evaluation-behavior link: Direct and beyond valence[J]. Journal of Experimental Social Psychology, 2007, 43(6): 1010-1016.
- [16] ZHANG X W, XUAN Y M, FU X L. The Effect of Emotional Valences on Approach and Avoidance Responses[J]. Advances in Psychological Science, 2012, 20(7): 1023-1030.
- [17] ZHENG J, LIU L, SHI J X, et al. The Definition, Theory and Research Paradigm of The Compatibility Effect[J]. Advances in Psychological Science, 2013, 21(9): 1686-1695.
- [18] HELBING D, MOLNAR P. Social Force Model for Pedestrian Dynamics[J]. Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics, 1998, 51(5): 4282.
- [19] HELBING D, FARKAS I J, VICSEK T. Simulating Dynamical Features of Escape Panic[J]. Social Science Electronic Publishing, 2000, 407(6803): 487-490.
- [20] ZANLUNGO F, IKEDA T, KANDA T. Social force model with explicit collision prediction [J]. EPL (Europhysics Letters), 2011, 93(6): 68005.
- [21] YU H, WANG Y, ZHANG X, et al. Extended Social Force Model-Based Mean Shift for Pedestrian Tracking Under Obstacle Avoidance[J]. IET Computer Vision, 2017, 11(1): 1-9.
- [22] JOHANSSON F, PETERSON A, TAPANI A. Waiting pedestrians in the social force model[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2015, 419: 95-107.



**GAO Qing-ji**, born in 1966, ph.D, professor. His main research interests include artificial intelligence and intelligent robot.