计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.191100011

基于面向对象(属性)概念格的形式背景属性约简方法

岳晓威[1]　彭　莎[2]　秦克云[1]
1 西南交通大学数学学院　成都 611756
2 成都外国语学校　成都 610097

摘　要　形式背景的属性约简是形式概念分析的重要研究内容之一。文中研究形式背景保持面向对象(属性)概念格结构的属性约简方法。通过分析相应的粒概念,提出了一种新的基于面向对象概念格和基于面向属性概念格的协调集判定定理,进而得到了新的可辨识属性集和可辨识属性矩阵,借助布尔逻辑公式转换给出了约简计算方法。提出的方法可以避免计算所有面向对象的形式概念及面向属性的所有形式概念。另外,提出了面向对象概念格和面向属性概念格的属性特征,给出了绝对必要属性、相对必要属性、绝对不必要属性的等价描述。

关键词:概念格;面向对象概念格;面向属性概念格;属性约简
中图法分类号　TP182

Attribute Reduction Methods of Formal Context Based on Object (Attribute) Oriented Concept Lattice

YUE Xiao-wei[1], PENG Sha[2] and QIN Ke-yun[1]
1 College of Mathematatic, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China
2 Chengdu Foreign Languages School, Chengdu 610097, China

Abstract　Attribute reduction of formal context is one of the important research topics of formal concept analysis. This paper is devoted to the discussion of attribute reduction methods preserving the structures of object-oriented concept lattice and property-oriented concept lattice. By the analysis of the related granular concepts, this paper proposes a new judgement theorem for consistent set based on object-oriented concept lattice and attribute-oriented concept lattice. Then, new discernible attribute sets and discernible attribute matrices are established. The attribute reductions preserving the structures of object-oriented concept lattice and property-oriented concept lattice are calculated by using the conversion of Boolean logic formula. The proposed method can avoid computing all object-oriented and attribute-oriented concept lattices. In addition, the characteristics of attributes with respect to object-oriented concept lattice and property-oriented concept lattice are proposed. Some equivalent descriptions of absolutely necessary attributes, relatively necessary attributes, and absolutely unnecessary attributes are provided.

Keywords　Concept lattice, Object-oriented concept lattice, Attribute-oriented concept lattice, Attribute reduction

1　引言

Wille在20世纪80年代首先提出了形式概念分析(FCA)理论[1],也称概念格理论。该理论是根据数据集中对象与属性之间的二元关系建立的一种概念层次结构,体现了形式概念之间的泛化和特化关系。作为数据分析与知识处理的一种有效数学工具,FCA在许多领域得到了广泛应用,如知识工程、机器学习、模式识别、专家系统、决策分析、数据挖掘等[2-4]。

形式背景的属性约简问题一直是形式概念分析的重要研究内容之一,其理论与方法受到了学术界的广泛关注。通过属性约简可以获得更简洁的知识,并揭示属性之间的依赖关系。Ganter等[5]提出了协调子形式背景的概念,从减少行与列的角度提出了可约简属性与可约简对象的概念,并分析了相关属性的特征。2005年,Zhang等[6]给出了协调属性集的判断定理,提出了形式概念的区分属性与区分矩阵的概念,并借助布尔逻辑公式转换给出了约简计算方法。2009年,Qi[7]对文献[6]中的约简计算方法进行了改进,在构造区分属性矩阵时,只需比较具有直接上下邻关系的形式概念。Li等[8]利用对象概念和属性概念给出一种新的可辨识属性集,从而改进了约简计算方法。在Wille概念格的基础上,Duntsch和Gediga[9]引入了一对模态近似算子构造了面向属性的概念格,Yao[10]进一步建立了面向对象的概念格。Liu[11]给出了面向对象概念格和面向属性概念格的协调集判定定理和属性特征。Liu等[12]针对面向属性的概念格与面向对象的概念格给出了协调集判定定理,通过概念的区分属性给出了属性约简方法,并刻画了概念格约简与信息系统约简之间的关系。Medina[13]刻画了概念格、面向属性概念格以及面向对象概念格中的属性特征。2013年Wang[14]用覆盖粗糙集思想,提出了面向对象概念格的可简化属性概念,并进一步得到它的属

基金项目:国家自然科学基金项目(61976130,61473239)
This paper was supported by the National Natural Science Foundation of China (61976130,61473239).
通信作者:秦克云(keyunqin@263.net)

性约简的判定定理，得到了面向对象概念格的属性约简的新方法。Wang[15]基于概念格的交（并）不可约元分别研究了经典形式背景的概念格、面向对象概念格以及面向属性概念格的属性约简问题。Wan 等[16]从对象集的每一个等价类所拥有的属性子集之间的包含关系出发，构造相应的 Hasse 图，直接得到面向属性概念格的并稠密子集。Liang 等[17]从直观图出发，寻找一种保持面向属性概念格和面向对象概念格的并（交）不可约元外延不变的属性约简，对概念格结构进行简化，从而达到简化知识库的目的。

本文针对面向对象概念格与面向属性概念格给出一种新的形式背景协调属性集判定定理，从粒概念的角度提出一种新的可辨识属性矩阵，并刻画面向属性概念格与面向对象概念格的属性特征。

2 预备知识

本节简单回顾形式概念分析中的一些基本概念和性质。

定义 1[1] 一个形式背景是一个三元组(G,M,I)，其中G是对象集，M是属性集，I是对象和属性之间的二元关系，即$I\subseteq G\times M$。对于任意$g\in G,m\in M,(g,m)\in I$表示对象g具有属性m。

Wille 针对形式背景提出了概念生成算子并构造了概念格。Gediga 等[9]提出了面向属性概念，给出了面向属性概念格。Yao[10]进一步提出了面向对象概念格。对于任意$X\subseteq G,A\subseteq M$，定义运算$\Diamond$与$\Box$：

$X^{\Diamond}=\{m\in M;\exists g\in X((g,m)\in I)\}$

$A^{\Diamond}=\{g\in G;\exists m\in A((g,m)\in I)\}$

$A^{\Box}=\{g\in G;\forall m\in M((g,m)\in I\rightarrow m\in A)\}$

$X^{\Box}=\{m\in M;\forall g\in G((g,m)\in I\rightarrow g\in X)\}$

性质 1[9-10] 设(G,M,I)为形式背景，$X_1,X_2\subseteq G$，$Y_1,Y_2\subseteq M$。算子$\Diamond$与$\Box$有以下性质：

(1) $X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow X_1^{\Diamond}\subseteq X_2^{\Diamond}$，$X_1^{\Box}\subseteq X_2^{\Box}$，$Y_1\subseteq Y_2\Leftrightarrow Y_1^{\Diamond}\subseteq Y_2^{\Diamond}$，$Y_1^{\Box}\subseteq Y_2^{\Box}$；

(2) $X^{\Box\Diamond}\subseteq X\subseteq X^{\Diamond\Box}$，$Y^{\Box\Diamond}\subseteq Y\subseteq Y^{\Diamond\Box}$；

(3) $X^{\Box\Diamond\Box}=X^{\Box}$，$X^{\Diamond\Box\Diamond}=X^{\Diamond}$；

(4) $(X_1\cup X_2)^{\Diamond}=X_1^{\Diamond}\cup X_2^{\Diamond}$，$(X_1\cap X_2)^{\Box}=X_1^{\Box}\cap X_2^{\Box}$，$(Y_1\cup Y_2)^{\Diamond}$，$=Y_1^{\Diamond}\cup Y_2^{\Diamond}$，$(Y_1\cap Y_2)^{\Box}=Y_1^{\Box}\cap Y_2^{\Box}$。

定义 2[9-10] 设(G,M,I)为形式背景，对于任意$X\subseteq G$，$A\subseteq M$，如果$X^{\Diamond}=A,A^{\Box}=X$，则称二元组$(X,A)$为一个面向属性概念。如果$X^{\Box}=A,A^{\Diamond}=X$，则称二元组$(X,A)$为一个面向对象概念。

我们将形式背景(G,M,I)中所有面向属性概念所组成的集合记为$L_p(G,M,I)$，所有面向对象概念所组成的集合记为$L_O(G,M,I)$。

对于任意$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\in L_p(G,M,I)$，定义相应的序关系：

$(X_1,Y_1)\leqslant(X_2,Y_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2$ 或 $(Y_1\subseteq Y_2)$

在此序关系下$L_p(G,M,I)$构成完备格，称为面向属性概念格。其上、下确界如下[9]：

$(X_1,Y_1)\cup(X_2,Y_2)=((X_1\cup X_2)^{\Diamond\Box},(Y_1\cup Y_2))$

$(X_1,Y_1)\cap(X_2,Y_2)=((X_1\cap X_2),(Y_1\cap Y_2)^{\Box\Diamond})$

对于任意$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\in L_O(G,M,I)$。定义它们的序关系为：

$(X_1,Y_1)\leqslant(X_2,Y_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2$ 或 $(Y_1\subseteq Y_2)$

在此序关系下$L_O(G,M,I)$是完备格，将其称为面向对象概念格。其上、下确界如下[10]：

$(X_1,Y_1)\cup(X_2,Y_2)=((X_1\cup X_2),(Y_1\cup Y_2)^{\Diamond\Box})$

$(X_1,Y_1)\cap(X_2,Y_2)=((X_1\cap X_2)^{\Box\Diamond},(Y_1\cap Y_2))$

设(G,M,I)为形式背景，若$E\subseteq M$，令$I_E=I\cap(G\times E)$。则(G,E,I_E)也是形式背景，称为(G,M,I)的子形式背景[9]。易知$X\subseteq G$时，有$X^{\Diamond_E}=X^{\Diamond}\cap E$。

例 1[11] 表 1 给出了一个形式背景(G,M,I)，其中$G=\{1,2,3,4,5\}$是对象集，$M=\{a,b,c,d,e,f,g\}$是属性集。

表 1 形式背景(G,M,I)

Table 1 Formal context (G,M,I)

	a	b	c	d	e	f	g
1	1	0	1	0	1	1	0
2	1	1	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	1	0
5	1	1	0	0	0	0	1

由文献[11]知该形式背景有 9 个面向对象概念：(G,M)，$(1234,cdef)$，$(125,abdeg)$，$(134,cef)$，$(12,de)$，$(25,bdg)$，$(1,e)$，$(2,d)$，$(\varnothing,\varnothing)$。该形式背景有 9 个面向属性概念：$(G,M)$，$(1345,abcefg)$，$(2345,abcdfg)$，$(5,abg)$，$(134,acef)$，$(345,abcfg)$，$(25,abdg)$，$(34,cf)$，$(\varnothing,\varnothing)$。

定义 3[12] 设$L_O(G,M_1,I_1)$和$L_O(G,M_2,I_2)$是两个面向对象概念格。如果对任意$(X_2,B_2)\in L_O(G,M_2,I_2)$，存在$(X_1,B_1)\in L_O(G,M_1,I_1)$，使得$X_1=X_2$，则称$L_O(G,M_1,I_1)$细于$L_O(G,M_2,I_2)$，记为$L_O(G,M_1,I_1)\leqslant L_O(G,M_2,I_2)$。

引理 1[12] 设$K=(G,M,I)$是形式背景，$E\subseteq M$，则$L_O(G,M,I)\leqslant L_O(G,E,I_E)$。

定义 4[12] 设$K=(G,M,I)$是形式背景，$E\subseteq M$。如果$L_O(G,E,I_E)\leqslant L_O(G,M,I)$，则称$E$是$(G,M,I)$的面向对象协调集。若$E$是$(G,M,I)$的面向对象协调集，且$E$的任意真子集不是$(G,M,I)$的面向对象协调集，则称$E$是$(G,M,I)$的面向对象约简。

定义 5[12] 设(G,M,I)为形式背景，对于任意(X_1,Y_1)，$(X_2,Y_2)\in L_O(G,M,I)$，称$\lambda((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))=Y_1\cup Y_2-Y_1\cap Y_2$为$(X_1,Y_1)$和$(X_2,Y_2)$的可辨识属性集。称$\Lambda=\lambda((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$为形式背景的可辨识属性矩阵。

定理 1[12] 设$K=(G,M,I)$是形式背景，$D\subseteq M,D\neq\varnothing$。$D$是面向对象协调集当且仅当对于任意$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\in L_O(G,M,I)$，若$(X_1,Y_1)\neq(X_2,Y_2)$，则$D\cap\lambda((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))\neq\varnothing$。

称$f(\Lambda)=\bigwedge_{H\in\Lambda}(\bigvee_{h\in H}h)$为$(G,M,I)$的面向对象辨识函数。通过使用吸收律和分配律，将辨识函数$f(\Lambda)$变换为极小析取范式，这个极小析取范式的所有合取子式恰为形式背景的所有面向对象约简。

定义 6[12] 设$L_p(G,M_1,I_1)$和$L_P(G,M_2,I_2)$是两个面向属性概念格。如果对任意$(X_2,B_2)\in L_P(G,M_2,I_2)$，存在$(X_1,B_1)\in L_p(G,M_1,I_1)$，使得$X_1=X_2$，则称$L_p(G,M_1,I_1)$细于$L_p(G,M_2,I_2)$，记为$L_p(G,M_1,I_1)\leqslant L_p(G,M_2,I_2)$。

引理 2[12] 设$K=(G,M,I)$是形式背景，$E\subseteq M$，则$L_p(G,M,I)\leqslant L_p(G,E,I_E)$。

定义 7[12] 设$K=(G,M,I)$是形式背景，$E\subseteq M$。如果$L_p(G,E,I_E)\leqslant L_p(G,M,I)$，则称$E$是$(G,M,I)$的面向属性

协调集。若 E 是 (G,M,I) 的面向属性协调集，且 E 的任意真子集不是 (G,M,I) 的面向属性协调集，则称 E 是 (G,M,I) 的面向属性约简。

定义 8[12] 设 (G,M,I) 为形式背景，对于任意 (X_1,Y_1)，$(X_2,Y_2)\in L_p(G,M,I)$，称 $\lambda((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))=Y_1\cup Y_2-Y_1\cap Y_2$ 为 (X_1,Y_1) 和 (X_2,Y_2) 的可辨识属性集。称 $\Lambda_p=\lambda((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))$ 为形式背景的可辨识属性矩阵。

定理 2[12] 设 $K=(G,M,I)$ 是形式背景，$D\subseteq M$，$D\neq\emptyset$。D 是面向属性协调集当且仅当对于任意 (X_1,Y_1)，$(X_2,Y_2)\in L_p(G,M,I)$，若 $(X_1,Y_1)\neq(X_2,Y_2)$，则 $D\cap\lambda((X_1,Y_1),(X_2,Y_2))\neq\emptyset$。

称 $f(\Lambda_p)=\bigwedge\limits_{H\in\Lambda_p}(\bigvee\limits_{h\in H}h)$ 为 (G,M,I) 的面向属性辨识函数。

通过辨识函数可以求出形式背景的全部约简，但首先需要计算面向对象(属性)概念格中的所有形式概念。下节提出一种新的可辨识属性矩阵，能避免计算所有的形式概念。

3 形式背景基于面向对象概念格的协调集判定定理

Li 等[8]基于 Wille 概念格中对象概念 $(g^{\uparrow\downarrow},g^{\downarrow})$ 和属性概念 $(m^{\downarrow},m^{\downarrow\uparrow})$，提出了一种新的可辨识矩阵，给出了形式背景基于 Wille 概念格的属性约简方法。受此启发，本文将这种形式的可辨识属性矩阵应用于面向对象概念格及面向属性概念格。

定理 3 设 (G,M,I) 为形式背景，$D\subseteq M$。$D\subseteq M$ 是 (G,M,I) 的面向对象协调集当且仅当对于任意 $g\in G$，$m\in M$，如果 $(g,m)\in I$，则 $D\cap(m^{\diamond\square}-(G-\{g\})^{\square})\neq\emptyset$。

证明：(必要性)设 D 是面向对象协调集，$g\in G$，$m\in M$，且 $(g,m)\in I$。于是有 $((G-\{g\})^{\square\diamond},(G-\{g\})^{\square})$，$(m^{\diamond},m^{\diamond\square})\in L_O(G,M,I)$。$(m^{\diamond},m^{\diamond\square})$ 和 $((G-\{g\})^{\square\diamond},(G-\{g\})^{\square})$ 下确界为：$(m^{\diamond},m^{\diamond\square})\wedge((G-\{g\})^{\square\diamond},(G-\{g\})^{\square})=((m^{\diamond}\cap(G-\{g\})^{\square\diamond})^{\square\diamond},m^{\diamond\square}\cap(G-\{g\})^{\square})$。因为 $(g,m)\in I$，所以 $m\notin(G-\{g\}^{\square})$。由于 $m\in m^{\diamond\square}$，$m\notin(G-\{g\})^{\square}\cap m^{\diamond\square}$，故有 $(m^{\diamond},m^{\diamond\square})\wedge((G-\{g\})^{\square\diamond},(G-\{g\})^{\square})<(m^{\diamond},m^{\diamond\square})$。由定理 1 得：

$$D\cap(m^{\diamond\square}-m^{\diamond\square}\cap((G-\{g\})^{\square})=D\cap(m^{\diamond\square}(G-\{g\})^{\square})\neq\emptyset$$

(充分性)设 (X_1,A_1)，$(X_2,A_2)\in L_O(G,M,I)$，$(X_1,A_1)\neq(X_2,A_2)$。不妨设存在 $g\in G$，使得 $g\in X_1$，$g\notin X_2$。由 $g\in X_1=A_1^{?}$ 可知存在 $m\in A_1$，使得 $(g,m)\in I$。根据假设有 $D\cap(m^{\diamond\square}(G-\{g\})^{\square})\neq\emptyset$，故存在 $n\in D$，使得 $n\in m^{\diamond\square}$，$n\notin(G-\{g\})^{\square}$。从而有 $n\in m^{\diamond\square}\subseteq A_1^{\diamond\square}=A_1$。再由 $g\notin X_2$ 可知 $X_2\subseteq G-\{g\}$，$A_2=X_2^{\square}\subseteq(G-\{g\})^{\square}$，故 $n\notin A_2$，$D\cap(A_1-A_2)\neq\emptyset$。故 D 是面向对象协调集。

由定理 3，我们给出如下的面向对象辨识矩阵与面向对象辨识函数。

定义 9 设 (G,M,I) 是形式背景，任意 $g\in G$，$m\in M$，面向对象的概念 $\ell m=(m^{\diamond},m^{\diamond\square})$ 和 $\partial g=((G-\{g\})^{\square\diamond},(G-\{g\})^{\square})$ 的可辨识属性集定义为：

$$\eta(\partial g,\ell m)=\begin{cases}m^{\diamond\square}-(G-\{g\})^{\square}, & (g,m)\in I\\ \emptyset, & \text{其他}\end{cases}$$

(G,M,I) 的可辨识属性矩阵为：

$$\Lambda_O=\{\eta(\partial g,\ell m);g\in G,m\in M\}$$

基于此定义，形式背景基于面向对象概念格的面向对象可辨识函数为：$f(\Lambda_O)=\bigwedge\limits_{H\in\Lambda_O}(\bigvee\limits_{h\in H}h)$。通过使用吸收律和分配律，可以将辨识函数 $f(\Lambda_O)$ 变换成极小析取范式，这个极小析取范式的所有合取子式是形式背景的全部面向对象约简。

例 2 由定义 9，例 1 中形式背景基于面向对象概念的面向对象可辨识属性矩阵如表 2 所列。

表 2 形式背景基于面向对象概念格的可辨识属性矩阵

Table 2 Discernible attribute matrix of object-oriented concept lattice

	a	b	c	d	e	f	g
1	ae		cfe		e	cfe	
2	$abdg$	bdg		d			bdg
3			cf			cf	
4			cf			cf	
5	abg	bg					bg

$$\begin{aligned}f(\Lambda_O)&=\bigwedge_{H\in\Lambda_O}(\bigvee_{h\in H}h)\\&=(a\vee e)\wedge(c\vee e\vee f)\wedge e\wedge(a\vee b\vee d\vee g)\wedge(b\vee d\vee g)\wedge(a\vee b\vee g)\wedge(b\vee g)\wedge(c\vee f)\\&=(c\vee b\vee d\vee e)\wedge(b\vee d\vee f\vee e)\wedge(c\vee d\vee f\vee e)\wedge(d\vee e\vee f\vee g)\end{aligned}$$

计算得面向对象的属性约简为：$\{b,c,d,e\}$，$\{b,d,e,f\}$，$\{c,d,e,f\}$，$\{d,e,f,g\}$。

推论 1 设 (G,M,I) 是形式背景，对任意 $g\in G$，$m\in M$，$(g,m)\in I$，其中 $[m]=\{n\in M;m^{\diamond}=n^{\diamond}\}$：

(1) m 是一个核心属性当且仅当 $\eta(\partial g,\ell m)=\{m\}$；

(2) m 是一个相对必要属性当且仅当 $\eta(\partial g,\ell m)=[m]$ 且 $|[m]|>1$。

(3) m 是一个绝对不必要属性当且仅当 $\eta(\partial g,\ell m)\Leftrightarrow[m]$。

m 是一个核心属性，则 $M-\{m\}$ 不是协调集，由定理 3 显然证明。如果 $[m]$ 是除属性概念外唯一能区分对象的属性，则 $[m]$ 中任何一个属性都是相对必要属性。

4 形式背景基于面向属性概念格的协调集判定定理

定理 4 设 (G,M,I) 为形式背景，$D\subseteq M$。$D\subseteq M$ 是 (G,M,I) 的面向属性协调集当且仅当对于任意 $g\in G$，$m\in M$，如果 $(g,m)\in I$ 则 $D\cap(g^{\diamond}-(M-\{m\})^{\square\diamond})\neq\emptyset$。

证明：(必要性)设 D 是面向属性协调集，$g\in G$，$m\in M$，且 $(g,m)\in I$，于是有 $((M-\{m\})^{\square},(M-\{m\})^{\square\diamond})$，$(g^{\diamond\square},g^{\square})\in L_p(G,M,I)$，$((M-\{m\})^{\square},(M-\{m\})^{\square\diamond})$ 和 $(g^{\diamond\square},g^{\square})$ 的上确界为：$(g^{\diamond\square},g^{\diamond})\vee((M-\{m\})^{\square},(M-\{m\})^{\square\diamond})=((g^{\diamond\square}\cup(M-\{m\})^{\square})^{\diamond\square},g^{\diamond}\cup(M-\{m\})^{\square\diamond}$。因为 $(g,m)\in I$，所以 $m\notin(M-\{m\})^{\square\diamond}$。则 $g^{\diamond}\cup(M-\{m\})^{\square\diamond}\supset(M-\{m\})^{\square\diamond}$。故有 $(g^{\diamond\square},g^{\diamond})\vee((M-\{m\})^{\square},(M-\{m\})^{\square\diamond})>((M-\{m\})^{\square},(M-\{m\})^{\square\diamond})$。

由定理 2 得：

$$D\cap(g^{\diamond}\cup(M-\{m\})^{\square\diamond}-(M-\{m\})^{\square\diamond})=D\cap(g^{\diamond}-(M-\{m\})^{\square\diamond})\neq\emptyset$$

(充分性)设 (Z_1,A_1)，$(Z_2,A_2)\in L_p(G,M,I)$，$(Z_1,A_1)\neq(Z_2,A_2)$。不妨设 $g\in G$，使得 $g\in Z_1$，$g\notin Z_2$。由 $g\notin Z_2=A_2^{\square}$，可知存在 $m\in M$，使 $(g,m)\in I$，$m\notin A_2$。由假设可知 $D\cap(g^{\diamond}-(M-\{m\})^{\square\diamond})\neq\emptyset$，故存在 $n\in D$，使得 $n\in g^{\diamond}$，$n\notin(M-\{m\})^{\square\diamond}$，于是 $n\in g^{\diamond}\subseteq Z_1^{\diamond}=A_1$。由 $m\notin A_2$ 可知 $A_2\subseteq M-\{m\}$。从而 $A_2=A_2^{\square\diamond}\subseteq(M-\{m\})^{\square\diamond}$。故 $n\notin A_2$，于是

$D \cap (A_1 - A_2) \neq \varnothing$，则 D 是面向属性协调集。

定义 10 设 (G,M,I) 是形式背景，任意 $g\in G, m\in M$，面向属性概念 $\wp g=(g^{\Diamond\Box}, g^{\Diamond})$ 和 $\aleph m=((M-\{m\})^{\Box}, (M-\{m\})^{\Box\Diamond})$ 的可辨识属性集定义为：

$$\eta(\wp g, \aleph m)=\begin{cases} g^{\Box\Diamond}-(M-\{m\})^{\Box\Diamond}, & (g,m)\in I \\ \varnothing, & \text{其他} \end{cases}$$

可辨识属性矩阵为：$\Lambda_P=\{\eta(\wp g, \aleph m); g\in G, m\in M\}$。

基于此定义，形式背景基于面向属性概念格的面向属性可辨识函数：$f(\Lambda_P)=\bigwedge_{H\in\Lambda_P}(\bigvee_{h\in H} h)$。

通过使用吸收律和分配律，可以将辨识函数 $f(\Lambda_P)$ 变换成极小析取范式，这个极小析取范式的所有合取子式是形式背景的全部面向属性约简。

例 3 根据定义 10，例 1 中形式背景基于面向属性概念格的面向属性可辨识属性矩阵如表 3 所列。

表 3 形式背景基于面向属性概念格的可辨识属性矩阵

Table 3 Discernible attribute matrix of attribute-oriented concept lattice

	a	b	c	d	e	f	g
1	ae		cfe		e	cfe	
2	$abdg$	bdg		d			bdg
3			cf			cdf	
4			cf			cdf	
5	abg	bg					bg

计算得面向属性的属性约简为：$\{b,c,d,e\}$，$\{b,d,e,f\}$，$\{c,d,e,f\}$，$\{d,e,f,g\}$。

推论 2 设 (G,M,I) 是形式背景，对于任意 $g\in G, m\in M$，$(g,m)\in I$，其中 $[m]=\{n\in M; m^{\Box}=n^{\Box}\}$：

（1）m 是一个核心属性，当且仅当 $\eta(\wp g, \aleph m)=\{m\}$。

（2）m 是一个相对必要属性当且仅当 $\eta(\wp g, \aleph m)=[m]$ 且 $|[m]|>1$。

（3）m 是一个不必要属性当且仅当 $\eta(\wp g, \aleph m)\Leftrightarrow[m]$。

m 是一个核心属性，则 $M-\{m\}$ 不是协调集，由定理 4 显然证明。如果 $[m]$ 是除属性概念外唯一能区分对象的属性，则 $[m]$ 中任何一个属性都是相对必要属性。

结束语 形式背景的属性约简问题一直是形式概念分析的热门研究问题，文中针对面向属性的概念格和面向对象的概念格的属性约简，给出一种新的可辨识属性集，并进一步讨论了它们的属性特征。未来在这种约简下，可以继续探讨概念格、面向对象的概念格和面向属性的概念格的关系。

参 考 文 献

[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An app- roach based on hierarchies of concepts [M] // Ordered Sets Dordrecht-Boston: Reidel. 1982:445-470.

[2] HU K Y, LU Y C, SHI C Y. Progress of concept lattice and its application [J]. Journal of Tsinghua University (Science Edition), 2000, 40(9):77-81.

[3] CARPINETO C, ROMANO G. A lattice conceptual clustering system and its application to browsing retrieval [J]. Machine learning, 1996, 10:95-122.

[4] CHEN Y, YAO Y. A multi-view approach for intelligent data analysis Based on data operators [J]. Information Sciences, 2008, 178(1):1-20.

[5] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[6] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattices [J]. Science in China-Information Sciences, 2005, 35(6):628-639.

[7] QI J J. Attribute reduction in formal contexts based on a new discernibility matrix [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2009, 30(1/2):305-314.

[8] LI L J, LI M Z, JU S M, et al. A simple dicernibility matrix for attribute reduction in formal concept analysis based on granular concepts [J]. Journal of intelligent and Fuzzy Systems, 2019: 4325-4337.

[9] DUNTSCH I, GEDIGA G. Modal-style operators in qualitative data analysis[C] // Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Data Mining. IEEE, 2002:155-162.

[10] YAO Y Y. A comparative study of formal concpt analysis and rough set theory in data analysis[C] // Proceedings of 3rd International Conference on RSCTC'04. Springer Berlin Heidelberg, 2004:59-68.

[11] LIU M X. The theory of reduction for object oriented concept lattice and attribute oriented concept lattice [D]. Xi'an: Northwest University, 2010.

[12] LIU M, SHAO M W, ZHANG W X. Reduction method for concept lattices based on rough set theory and its application [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 53(9): 1390-1410.

[13] MEDINA J. Relating attribute reduction in formal, object-oriented and property-oriented concept lattice [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64(6):1992-2002.

[14] WANG J L. A new method of object oriented concept lattice attribute reduction [J]. Journal of Basic Science of Textile University, 2013(3):355-358.

[15] WANG X. Theory and method of conceptual lattice reduction [D]. Xi'an :Xi'an Jiaotong University, 2008.

[16] WANG Q, WEI L, LI T. A new method of lattice construction based on non-reducible elements [J]. Journal of Northwestern University (Science Edition), 2013, 43(1):10-14.

[17] LIANG X Y, WANG Q, WEI L. The union reduction of object-oriented (attribute) concept lattice based of direct view[J]. Journal of North western University (Science Edition), 2015, 45(3):357-364.

YUE Xiao-wei, born in 1996, postgraduate. Her research interests include formal concept analysis and so on.

QIN Ke-yun, born in 1962, Ph.D, professor, Ph.D supervisor. His research interests include rough set theory and so on.