计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.190600003

覆盖近似空间中的核及其性质

周俊丽　管延勇　徐法升　王洪凯
济南大学数学科学学院　济南 250022
(math_lily@qq.com)

摘　要　文中在覆盖近似空间中,提出核的概念,研究核的存在性与唯一性以及覆盖块、邻域和核之间的关系;基于核和约简,提出协调覆盖的概念,揭示约简、核和协调覆盖之间的关联;最后,给出覆盖产生的邻域族等于覆盖本身的充要条件。

关键词:粗糙集;覆盖;邻域;核;约简;协调覆盖
中图法分类号　TP18

Core in Covering Approximation Space and Its Properties

ZHOU Jun-li, GUAN Yan-yong, XU Fa-sheng and WANG Hong-kai
School of Mathematical Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China

Abstract　A new concept of core in the covering approximation space is proposed, and the existence and uniqueness of the core and the relationships between covering blocks, neighborhood and the core are studied. Based on the core and reduction, the concept of consistent covering is proposed, and the relationships between the reduction, the core and the consistent covering were revealed. Finally, the necessary and sufficient condition for neighborhood family derived from the covering to be equal to the covering itself is given.

Keywords　Rough set, Covering, Neighborhood, Core, Reduction, Consistent covering

1　引言

经典粗糙集理论[1]建立在分类机制的基础上,利用等价关系对论域的划分来表达,刻画及发现知识。然而,面对现实应用中一些特定问题的复杂性和不确定性,论域划分的方法已不再适合。因此,经典粗糙集理论被推广到覆盖近似空间。

覆盖近似空间最早是由 Zakowski[2] 于 1983 年提出的,通过把论域的划分替换为论域的覆盖,将 Pawlak 粗糙集理论推广到了覆盖粗糙集理论。随后,覆盖粗糙集的研究一直是粗糙集研究领域的热点。在覆盖近似空间中,文献[3-14]研究了覆盖近似空间的结构、粗糙近似以及约简算法等。Yao 等[15]在覆盖近似空间中提出了隶属重复度和同块重复度的概念,并研究了邻域族形成划分的充要条件。在模糊覆盖近似空间中,Yang 等[16]将隶属重复度和同块重复度的概念推广到了模糊 β-覆盖近似空间,定义了模糊 β-重复度和模糊 β-共同重复度,并由此定义了模糊 β-核的概念。

本文将 Yang 等[16]在模糊 β-覆盖近似空间中定义的模糊 β-核退化到经典覆盖近似空间,研究覆盖块、邻域和核之间的关系以及约简、核和协调覆盖之间的联系。研究发现,模糊 β-覆盖近似空间中不成立的某些结论,在覆盖近似空间中是成立的。

2　覆盖近似空间的相关概念

定义 1[3]　设 U 是非空有限论域,$C=\{K_1,K_2,\cdots,K_m\}$ 是 U 的非空子集族,其中 $K_i\subseteq U(i=1,2,\cdots,m)$。若满足 $K_i\neq\emptyset$ 且 $\bigcup_{i=1}^{m}K_i=U$,则称 C 是论域 U 的一个覆盖,称 K_i 是 C 的一个覆盖块。

显然,覆盖是划分的推广,论域上的等价关系所确定的划分也是一个覆盖。

定义 2[3]　设 U 是非空有限论域,C 是 U 上的一个覆盖,称二元组 (U,C) 是一个覆盖近似空间。

在覆盖近似空间中,文献[3]和文献[17]分别提出了邻域和邻域族的概念。

定义 3[3]　设 (U,C) 是一个覆盖近似空间,$\forall x\in U$,称 $N(x)=\bigcap\{K\in C\mid x\in K\}$ 是 x 的邻域。

定义 4[17]　设 (U,C) 是一个覆盖近似空间,称 $Cov(C)=\{N(x)\mid x\in U\}$ 是由 C 邻域族。

根据邻域族的定义,不难得知邻域族也是论域的一个覆盖。

为了研究邻域族形成划分的充要条件,文献[15]提出了隶属重复度和同块重复度的概念。

本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11671171);山东省自然科学基金资助项目(ZR2019BA005)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (11671171) and Natural Science Foundation of Shandong Province, China (ZR2019BA005).
通信作者:管延勇(ss_guanyy@ujn.edu.cn)

定义 5[15] 设(U,C)是一个覆盖近似空间，令$\partial_C:U\to N^+$，$\partial_C(x)=|\{K\in C|x\in K\}|$，则称$\partial_C(x)$是$x$关于$C$的隶属重复度。

定义 6[15] 设(U,C)是一个覆盖近似空间，令$\lambda_C:U\times U\to N$，$\lambda_C(x,y)=|\{K\in C|x,y\in K\}|$，则称$\lambda_C(x,y)$是$x$关于$C$的同块重复度。

在粗糙集理论中，约简是一个重要的概念。文献[4]提出了可约覆盖块和可约覆盖的概念。

定义 7[4] 设(U,C)是一个覆盖近似空间，$K\in C$，若K是$C-\{K\}$中的一些覆盖块的并集，则称K是C的一个可约覆盖块；否则称K是C的一个不可约覆盖块。若C的每个覆盖块都不是可约简的，则称C是不可约简的；否则称C是可约简的。

3 核及其性质

为了探讨模糊β-覆盖近似空间中模糊β-覆盖产生的模糊β-邻域族等于模糊β-覆盖本身的条件，Yang等[16]提出了模糊β-核的概念，并讨论了约简与模糊β-核以及协调模糊β-覆盖之间的关系。研究发现，文献[16]中给出的有关模糊β-核的一些性质在模糊β-覆盖近似空间中并不成立[18]。

本文受文献[16]的启发，在经典覆盖近似空间中定义了核的概念，并讨论其性质。研究发现，经典覆盖近似空间中的核比模糊β-覆盖近似空间中的模糊β-核具有更多更好的性质。

定义 8 设(U,C)是一个覆盖近似空间，$x\in U$，$K\in C$。若$x\in K$，且$\forall y\in K-\{x\}$，$\lambda_C(x,y)=\partial_C(x)$，则称$K$是$x$的一个核。$x$的核的集合记作$\Delta_x$。

本文将覆盖近似空间(U,C)中包含着对象x的覆盖块的集合记作$\mathbb{k}_x$，即：

$$\mathbb{k}_x=\{K\in C|x\in K\}$$

将同时包含着对象x和y的覆盖块的集合记作$\mathbb{k}_{x,y}$，即：

$$\mathbb{k}_{x,y}=\{K\in C|x,y\in K\}$$

易见，$N(x)=\bigcap\mathbb{k}_x=\bigcap\{K|K\in\mathbb{k}_x\}=\bigcap\{K\in C|x\in K\}$，$\mathbb{k}_{x,y}\subseteq\mathbb{k}_x$。

注意到，$\partial_C(x)=|\mathbb{k}_x|$，$\lambda_C(x,y)=|\mathbb{k}_{x,y}|$，由此得到

$$\lambda_C(x,y)=\partial_C(x)\Leftrightarrow|\mathbb{k}_{x,y}|=|\mathbb{k}_x|。$$

一般地，对任意两个非空有限集合A和B，若$|A|=|B|$且$A\subseteq B$，则$A=B$。因此，由$|\mathbb{k}_{x,y}|=|\mathbb{k}_x|$和$\mathbb{k}_{x,y}\subseteq\mathbb{k}_x$，可得到$\mathbb{k}_{x,y}=\mathbb{k}_x$。由此，我们得到定义8的一个等价定义，即下列定义9。

定义 9 设(U,C)是一个覆盖近似空间，$x\in U$，$K\in C$。若$x\in K$，且$\forall y\in K-\{x\}$，$\mathbb{k}_{x,y}=\mathbb{k}_x$，则称$K$是$x$的一个核。$x$的核的集合记作$\Delta_x$。

一般而言，在覆盖近似空间中，一个对象可能有核，也可能没有核。下面，我们给出一个例子来说明。

例 1 设$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，$C=\{K_1,K_2,K_3,K_4,K_5\}$是$U$的一个覆盖，其中$K_1=\{x_2,x_6\}$，$K_2=\{x_1,x_4,x_6\}$，$K_3=\{x_3,x_4,x_5\}$，$K_4=\{x_1,x_6\}$，$K_5=\{x_1,x_5,x_6\}$。

计算可得$\mathbb{k}_{x_1}=\{K_2,K_4,K_5\}$。

根据定义9，对$1\leqslant i\leqslant 5$，K_i是x_1的一个核当且仅当$x_1\in K_i$，且$\forall y\in K_i-\{x_1\}$，$\mathbb{k}_{x_1,y}=\mathbb{k}_{x_1}$。

对K_1和K_3而言，由于$x_1\notin K_1$，$x_1\notin K_3$，故根据定义9可知K_1和K_3都不是x_1的核。

对K_2，易见$x_1\in K_2$，$K_2-\{x_1\}=\{x_4,x_6\}$。$\mathbb{k}_{x_1,x_4}=\{K_2\}$，$\mathbb{k}_{x_1,x_6}=\{K_2,K_4,K_5\}$。易发现$\mathbb{k}_{x_1,x_4}\neq\mathbb{k}_{x_1}$。根据定义9可知，$K_2$不是$x_1$的核。

对K_4，易见$x_1\in K_4$，$K_4-\{x_1\}=\{x_6\}$。$\mathbb{k}_{x_1,x_6}=\{K_2,K_4,K_5\}$，因此，$\mathbb{k}_{x_1,x_6}=\mathbb{k}_{x_1}$。根据定义9可知，$K_4$是$x_1$的核。

对K_5，易见$x_1\in K_5$，$K_5-\{x_1\}=\{x_5,x_6\}$。$\mathbb{k}_{x_1,x_5}=\{K_5\}$，$\mathbb{k}_{x_1,x_6}=\{K_2,K_4,K_5\}$。易发现$k_{x_1,x_5}\neq\mathbb{k}_{x_1}$。根据定义9可知，$K_5$不是$x_1$的核。

综上所述，$\Delta_{x_1}=\{K_4\}$。

同理，得到$\Delta_{x_2}=\{K_1\}$，$\Delta_{x_3}=\{K_3\}$和$\Delta_{x_4}=\Delta_{x_5}=\emptyset$。

由此可见，x_1，x_2和x_3有核，而x_4和x_5没有核。

根据例1还可得知，在覆盖近似空间中，一个覆盖块可能是某些对象的核，也可能不是任何对象的核。如果一个覆盖块是某些对象的核，那么它具有什么样的特征呢？

命题 1 设(U,C)是一个覆盖近似空间，$x\in U$，$K\in C$，则K是x的一个核当且仅当$K=N(x)$。

证明：(必要性)设K是x的一个核，根据定义9可知，有$x\in K$，且$\forall y\in K-\{x\}$，$\mathbb{k}_{x,y}=\mathbb{k}_x$。因此，$\forall K'\in\mathbb{k}_x$，$\forall y\in K-\{x\}$，$K'\in\mathbb{k}_{x,y}$。这说明$K'$包含$x$和$y$。故而$K\subseteq K'$。由$x\in K$知，$K\in\mathbb{k}_x$，因此$K$是$\mathbb{k}_x$中最小的覆盖块。因此，有$N(x)=\bigcap\mathbb{k}_x=\bigcap\{K'|K'\in\mathbb{k}_x\}=K$。由此证得，若$K$是$x$的一个核，则$K=N(x)$。

(充分性)设$K=N(x)$。显然，$x\in N(x)$。因此，根据定义9，为了证明$N(x)$是x的一个核，只需要证明$\forall y\in N(x)-\{x\}$，$\mathbb{k}_{x,y}=\mathbb{k}_x$。一方面，$\forall y\in N(x)$，由$N(x)=\bigcap\{K'|K'\in\mathbb{k}_x\}$可知，$y\in\bigcap\{K'|K'\in\mathbb{k}_x\}$。因此，$\forall K'\in\mathbb{k}_x$，都有$y\in K'$。故而$\{x,y\}\subseteq K'$。证得$K'\in\mathbb{k}_{x,y}$，$\mathbb{k}_x\subseteq\mathbb{k}_{x,y}$。另一方面，$\mathbb{k}_{x,y}\subseteq\mathbb{k}_x$是显然的。因此，$\forall y\in N(x)$，都有$\mathbb{k}_{x,y}=\mathbb{k}_x$。故而，$N(x)$是$x$的一个核。

命题1表明，在覆盖近似空间中，如果一个覆盖块是论域中某个对象的一个核，那么这个覆盖块是该对象的邻域。反之，如果一个覆盖块是论域中某个对象的邻域，那么这个覆盖块是该对象的一个核。换言之，如果某个对象的邻域是一个覆盖块，那么它必是该对象的核。

在覆盖近似空间中，一个对象如果有核，那么它的核是否唯一呢？答案是肯定的。

命题 2 设(U,C)是一个覆盖近似空间，$x\in U$。若K_1，$K_2\in C$都是x的核，则$K_1=K_2$。

证明：由命题1易证得。

命题2表明，论域中对象如果存在核，那么这个核是该对象的邻域。然而，如果一个覆盖块不是论域中任何对象的核，那么它具有什么样的特征呢？

命题 3 设(U,C)是一个覆盖近似空间，若$K\in C$不是U中任何对象的核，则K是K中对象的至少两个不同邻域的并。

证明：$\forall K\in C, \forall x\in K$，有 $N(x)=\bigcap \mathbb{k}_x=\bigcap\{K'\in C \mid x\in K'\}\subseteq K$。这说明，$\forall K\in \mathbb{k}_x, N(x)\subseteq K$。由于 $x\in N(x)$，故有 $K=\bigcup_{x\in K}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in K}N(x)\subseteq K$。因此 $K=\bigcup_{x\in K}N(x)$。根据命题 1 可知，若 K 是一个邻域，则 K 是核，而 K 不是 U 中任何对象的核，故 K 一定是 K 中对象的至少两个不同邻域的并。

下面将进一步研究覆盖近似空间中可约覆盖块与核之间的关系。

命题 4 设(U,C)是一个覆盖近似空间，若 K 是 C 的一个可约覆盖块，则 K 不是 U 中任何对象的核。

证明：对 C 的一个可约覆盖块 K，由定义 7 可知，一定存在不同的覆盖块 $K_1, K_2, \cdots, K_m\in C-\{K\}(m\geqslant 2)$ 使得 $K=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_m$。假设 K 是 U 中对象 x 的核，根据命题 1，有 $K=N(x)$ 且 $x\in K$。由于 $x\in K$，则一定存在 K_i 使得 $x\in K_i$，其中 $K_i\in C-\{K\}, 1\leqslant i\leqslant m$。根据定义 3 可知，$N(x)\subseteq K_i$，即 $K\subseteq K_i$。这与 $K=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_m(m\geqslant 2)$ 是矛盾的。因此，若 K 是 C 的一个可约覆盖块，则 K 不是 U 中任何对象的核。

根据例 1 可以知道，K_5 不是论域中任何对象的核，且它也不是 C 的可约覆盖块。因此，命题 4 的逆命题是不成立的。下面将给出命题 4 的逆命题成立的条件。

命题 5 设(U,C)是一个覆盖近似空间，且 $\forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$。若 $K\in C$ 不是 U 中任何对象的核，则 K 是 C 的一个可约覆盖块。

证明：设 $K\in C$ 不是 U 中任何对象的核，根据命题 3，可以得到 K 是 K 中对象的至少两个不同邻域的并，即，$K=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant m}N(x_i)(m\geqslant 2)$，其中 $x\in K_i$，且对 $j\neq i, N(x_j)\neq N(x_i)$。由于 $\forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$，根据命题 2 中核的唯一性可知，$\forall x_i\in U, 1\leqslant i\leqslant m(m\geqslant 2)$，存在唯一的 K_i 使得 $K_i\in\Delta_{x_i}$，其中 $K_i\in C-\{K\}$（因为 K 不是任何对象的核）。根据命题 1 可知，$K_i=N(x_i)$。因此 $K=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant m}K_i(m\geqslant 2)$，其中 $K_i\in C-\{K\}$，且对 $j\neq i, K_j\neq K_i$。故而，K 是 C 的一个可约覆盖块。

由命题 4 和命题 5 可得到下列推论。

推论 1 设(U,C)是一个覆盖近似空间，且 $\forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$，则 $K\in C$ 不是 U 中任何对象的核当且仅当 $K\in C$ 是 C 的一个可约覆盖块。换言之，$K\in C$ 是 U 中某些对象的核当且仅当 $K\in C$ 是 C 的一个不可约覆盖块。

类似于文献[16]，基于核和约简，提出了协调覆盖的概念。

定义 10 设(U,C)是一个覆盖近似空间，若 C 是不可约简的，且 $\forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$，则称 C 是一个协调覆盖。

下面将讨论在覆盖近似空间中核与协调覆盖之间的联系。

命题 6 设(U,C) 是一个覆盖近似空间，则 C 是 U 中的一个协调覆盖当且仅当 $\forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$ 且 $\forall K\in C, K$ 是 U 中一些对象的核。

证明：根据定义 7、定义 10 和推论 1，可得到 C 是 U 的一个协调覆盖。

$\Leftrightarrow \forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$ 且 C 是不可约简的。

$\Leftrightarrow \forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$ 且 $\forall K\in C, K$ 是 C 的一个不可约覆盖块。

$\Leftrightarrow \forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$ 且 $\forall K\in C, K$ 是 U 中一些对象的核。

命题 6 可以被看作是协调覆盖的另一种定义。下面将给出由覆盖产生的邻域族等于覆盖本身的充要条件。

命题 7 设(U,C)是一个覆盖近似空间，则 C 是 U 中的一个协调覆盖当且仅当 $Cov(C)=C$。

证明：（必要性）设 C 是一个协调覆盖。一方面，$\forall K\in C$，根据命题 6 可知，K 是 U 中一些对象的核；根据命题 1 可知，存在 $x\in U$ 使得 $K=N(x)$；根据定义 4 可知，$N(x)\in Cov(C)$，因此 $K\in Cov(C)$，故而 $C\subseteq Cov(C)$。另一方面，$\forall N(x)\in Cov(C)$，由于 C 是协调覆盖，故由定义 10 可知，$\Delta_x\neq\emptyset$，因此存在 $K\in C$ 使得 K 是 x 的核；又根据命题 8 可知，$K=N(x)$，证得 $N(x)\in C$，故而 $Cov(C)\subseteq C$。综上所述，证得 $Cov(C)=C$。

（充分性）设 $Cov(C)=C$，为了证明 C 是 U 的一个协调覆盖，根据命题 6 可知，只需证明 $\forall K\in C, K$ 是 U 中某些对象的核且 $\forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$。一方面，事实上，因为 $C\subseteq Cov(C)$，所以 $\forall K\in C, K\in Cov(C)$。根据定义 4 可知，存在 $N(x)\in Cov(C)$ 使得 $K=N(x)$。根据命题 1 可知，K 是 U 中某些对象的核。另一方面，$\forall x\in U$，因为 $Cov(C)\subseteq C$ 且 $N(x)\in Cov(C)$，所以 $N(x)\in C$。因此，存在 $K\in C$ 使得 $N(x)=K$。根据命题 1 可知，$N(x)$ 是 x 的核。故而 $\forall x\in U, \Delta_x\neq\emptyset$。这便证得 C 是 U 中的一个协调覆盖。

结束语 本文利用核来刻画覆盖近似空间的结构。首先，基于隶属重复度和同块重复度提出了核的概念，讨论了核的存在性与唯一性，并研究了覆盖块、邻域和核之间的关系。其次，基于核和约简的概念，提出了协调覆盖的概念，研究了核与协调覆盖之间的联系，揭示了约简、核和协调覆盖之间的关联。最后，给出了覆盖产生的邻域族等于覆盖本身的充要条件。

参 考 文 献

[1] Z P. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982(11): 341-356.

[2] W Z. Approximations in the space (U, P)[J]. Demonstratio Mathematica, 1983(16): 761-769.

[3] Z B, E B, W S U. Extensions and intentions in the roughset theory[J]. Information Sciences, 1998(107): 149-167.

[4] ZHU W, WANG F Y. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J]. InformationSciences, 2003(152): 217-230.

[5] ZHU W, WANG F Y. Some results on covering generalized rough sets[J]. Pattern Recognitionand Artificial Intelligence, 2002(15): 6-13.

[6] ZHU W. Properties of the fourth type of covering-based rough sets[C]// Proceedings of the Sixth International Conference on Hybrid Intelligent Systems. 2006: 43.

[7] ZHU W, WANG F Y. Relationships among three types of covering rough sets[C]// Proceedings ofthe 2006 IEEE International Conference on Granular Computing. 2006: 43-48.

[8] ZHU W, WANG F Y. A new type of covering rough sets[C]// Proceedings of the Third InternationalIEEE Conference on Intelligent Systems. 2006: 444-449.

[9] ZHU W,WANG F Y. On three types of covering rough sets [J]. IEEE Transactions on Knowledgeand Data Engineering, 2007(19):1131-1144.

[10] ZHU W. Topological approaches to covering rough sets[J]. Information Sciences,2007(177):1499-1508.

[11] ZHU W. Relationship among basic concepts in covering-based rough sets[J]. Information Sciences,2009(179):2478-2486.

[12] YAO Y Y,Y B X,Covering based rough set approximations[J]. Information Sciences,2012(200):91-107.

[13] ZHANG Y L,LI C Q,LIN M L,et al. Relationships between generalized rough sets based oncovering and reflexive neighborhood system[J]. Information Sciences,2015(319):56-67.

[14] D'EER L,RESTREPO M,CORNELIS C,et al. Neighborhood operators for covering-based roughsets [J]. Information Sciences,2016(336):21-44.

[15] YAO H,ZHU W. Condition for neighborhoods in covering based rough sets to form a partition[J]. arXiv:1209. 5480vl [cs. AL] 25 Sep 2012.

[16] YANG B,HU B Q. On some types of fuzzy covering-based rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2017(312):36-65.

[17] WANG C Z,CHEN D G,SUN B Q,et al. Communication between information systems with covering based rough sets[J]. Information Sciences,2012(216):17-33.

[18] ZHOU J L,GUAN Y Y,XU F S,et al. On some types offuzzy covering-based rough sets[J]Fuzzy Sets Syst. ,2017(312):36-65.

ZHOU Jun-li, born in 1993, postgraduate. Her main research interests include rough sets and fuzzy sets.

GUAN Yan-yong, born in 1964, Ph.D, professor, master supervisor. His main research interests include rough sets and fuzzy sets, etc.

(上接第 504 页)

[13] KIM J,KWON LEE J,MU L K. Accurate image super-resolution using very deep convolutional networks[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2016:1646-1654.

[14] LIM B,SON S,KIM H,et al. Enhanced deep residual networks for single image super-resolution[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. 2017:136-144.

[15] ZHANG Y,TIAN Y,KONG Y,et al. Residual dense network for image super-resolution[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018: 2472-2481.

[16] HU J,SHEN L,SUN G. Squeeze-and-excitation networks[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018:7132-7141.

[17] SZEGEDY C,LIU W,JIA Y,et al. Going deeper with convolutions[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2015:1-9.

[18] WANG Z,BOVIK A C,SHEIKH H R,et al. Image quality assessment:from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2004,13(4):600-612.

[19] CHEN Y Z,YANG W L,TAN H Y,et al. Image enhancement for LD based imaging in turbid water[J]. Optik - International Journal for Light and Electron Optics,2016,127(2):517-521.

[20] CHEN Y,YANG K. MAP-regularized robust reconstruction for underwater imaging detection [J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics,2013,124(20):4514-4518.

[21] ZHANG M,CHEN Y,PAN Y,et al. A Fast Image Deformity Correction Algorithm for Underwater Turbulent Image Distortion[J]. Sensors,2019,19(18):3818.

SONG Ya-fei, born in 1999, postgraduate. Her main research interests include image processing and deep learning.

CHEN Yu-zhang, born in 1984, Ph.D, associate professor. His main research interest include laser and LED in water, night vision or underwater scattering medium radiation transmission theory and computer simulation, image acquisition and restoration and reconstruction algorithms, image processing algorithms embedded including the research of Android development.