

切换拓扑条件下的多无人机系统编队包含控制

赵学远 周绍磊 王帅磊 闫实

海军航空大学 山东 烟台 264001

摘要 针对切换拓扑条件下的多无人机系统编队包含控制问题,基于一致性算法设计了分布式控制器,通过变量代换将领导者的编队控制问题先转化为一致性问题,再通过对 Laplacian 矩阵的特殊分解,将一致性问题简化为低阶系统的渐进稳定性问题;通过具有多领导者的 Laplacian 矩阵性质,将跟随者的包含控制问题转化为渐进稳定性问题。文中给出切换拓扑平均驻留时间概念,结合线性矩阵不等式和 Lyapunov 函数给出了一致性控制器的设计步骤,并证明了在所设计的控制器作用下,切换拓扑条件下的多无人机系统能够实现编队包含状态飞行。在三维空间中对多无人机系统系统进行仿真验证,结果表明所设计的一致性控制器解决了切换拓扑条件下的多无人机系统编队包含控制问题。

关键词: 多无人机系统;多领导者;编队包含控制;一致性;线性矩阵不等式;Lyapunov 函数

中图分类号 V249.122

Formation Containment Control of Multi-UAV System Under Switching Topology

ZHAO Xue-yuan, ZHOU Shao-lei, WANG Shuai-lei and YAN Shi

Naval Aeronautical University of PLA, Yantai, Shangdong 264001, China

Abstract To solve the formation containment control problem of multi-UAV system under switching topology, a distributed controller based on consistency algorithm was designed. The formation control problem of leader was transformed into consensus problem by variable substitution. Then, by the special decomposition of Laplacian matrix, the consensus problem was simplified to the asymptotic stability problem of low-order systems. Through the Laplacian matrix property with multi-leaders, the follower's containment control problem was transformed into an asymptotic stability problem. The concept of average dwell time of switching topology was given. Combining linear matrix inequalities and Lyapunov functions, the design steps of the consensus controller were given. It is also proved that the multi-UAV system with switching topology can achieve formation containment state flight under the action of the designed controller. Simulation results of multi-UAV system in three-dimensional space show that the designed consensus controller solves the problem of formation containment control of multi-UAV system under switching topology.

Keywords Multi-UAV system, Multi-leader, Formation containment control, Consensus, Linear matrix inequalities, Lyapunov function

1 引言

近年来,随着一致性算法的深入研究和无人机技术的快速发展,将一致性算法应用到多无人机系统编队控制问题中引起了学者的广泛关注。

文献[1]为二阶系统设计了一致性控制器,使得系统在无向图下形成了期望编队。文献[2]研究了离散多智能体系统的编队控制问题,通过仿真验证了所设计的一致性控制器的有效性。文献[3]解决了切换拓扑条件下多无人机系统的编队控制问题,给出了分布式一致性控制器的设计步骤,并结合线性矩阵不等式和 Lyapunov 函数给予了证明。文献[4-5]为了节省通信资源,设计了基于事件触发函数的多智能体编队控制,解决了含有时延的编队控制问题。上述文献仅研究了多智能体系统的编队控制问题,且多智能体系统多为固定拓扑。

在多无人机系统的研究过程中与编队问题一样,多无人机系统的包含控制问题也具有研究价值。根据所执行的任务不同,将无人机分成领导者和跟随者,包含控制问题指设计控制器使得跟随者在由领导者构成的凸包内运动。文献[7]仅依赖于邻居智能体信息设计了分布式一致性控制器,解决了连续时间和离散时间下多智能体系统的包含问题。有限时间内的拉格朗日多智能体系统的包含控制问题在文献[8]中得以研究。但上述文献中,所得结论是在领导者不进行通信的前提下得出的,也不要求领导者形成期望的编队。

编队包含控制问题作为编队控制和包含控制两个问题的结合,不但要求所设计的分布式一致性控制器能够使得领导者形成期望的编队队形,而且要求跟随者在由领导者构成的凸包内运动。编队包含控制在有人机-无人机协同作战,无人机更好地规避风险等方面具有广泛的应用前景。而目前关于多无人机系统的编队包含控制问题研究成果少之又少,而已

基金项目:国防科技项目

This work was supported by the Defence Science and Technology Project Foundation of China.

通信作者:赵学远(1607527622@qq.com)

有的文献[9],也是仅研究了在固定拓扑条件下的多无人机系统编队包含控制问题,对拓扑条件要求严格,且需要求解的线性矩阵不等式多且复杂。

本文主要研究在切换拓扑条件下的多无人机系统编队包含控制问题,相比较固定拓扑条件,本文降低了通信要求,且同时实现了对多无人机系统系统的编队包含控制问题,领导者形成的期望编队为时变编队。

2 基础知识

用表示 $G=(V, E, A)$ 多无人机之间的通信拓扑结构,其中 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为拓扑图的节点集合,即无人机编号。用 $E \subseteq V \times V$ 表示拓扑图的边集合, $A=[a_{ij}]_{N \times N}$ 为拓扑图的具有非负元素 a_{ij} 的邻接矩阵。 a_{ij} 表示节点 v_i 和 v_j 之间的连接权重,表示节点 v_i 可以接收到节点 v_j 的信息,否则 $a_{ij}=0$ 。如果存在一个节点 v_i ,从这个点出发沿着有向边可以到达图中的任意其他点,则称图 G 包含一个有向生成树,该节点 v_i 为根节点。根据连接权重将节点 v_i 的邻居定义为 $N_i := \{j \in V; a_{ij}=1\}$,图的 Laplacian 矩阵定义为 $L=[L_{ij}]_{N \times N}$,其中 $L_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} L_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$ 。

引理 1^[10] 如果有向图 G 包含一个有向生成树,则 0 是图 G 对应的 Laplacian 矩阵 L 的一个特征值,且为特征值 0 对应的特征向量,其余特征值均具有正实部。

引理 2 对于图 G 的 Laplacian 矩阵 $L \in R^{N \times N}$,那么存在一个矩阵 $M \in R^{N \times N-1}$ 使得 $L=ME$,其中 $E \in R^{(N-1) \times N}$,其特定形式为:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

进一步,如果图包含一个有向生成树,那么矩阵 M 是列满秩的,且矩阵 EM 的特征值是 L 的非零特征值,则 $\text{Re}(\lambda(EM)) > 0$ 。

引理 3 对于在引理 2 中定义的矩阵 EM ,如果图包含有一个有向生成树,存在一个对称正定矩阵 Q 和一个正标量参数 α 使得:

$$(EM)^T Q + QEM > \alpha Q \quad (1)$$

其中, $0 < \alpha < 2 \min\{\text{Re}(\lambda(EM))\}$ 。

3 问题描述

考虑由 N 架无人机构成的多无人机系统,多无人机系统内部的通信结构描述为有向图 G 。本文主要研究有向切换拓扑条件下,多无人机的时变编队包含控制问题,故将单架无人机视为质点,假设无人机在三维空间内的运动相互解耦,第 i 架无人机的动力学系统模型描述为:

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \end{cases}, i=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中, $z_i(t)$ 和 $v_i(t)$ 分别用于描述第 i 架无人机的位置和速度; $u_i(t)$ 表示第 i 架无人机的控制输入。根据无人机将要完成任务的不同,将系统中的无人机分为领导者和跟随者,其中 $M(M < N)$ 个跟随者的下标为 $F = \{1, 2, \dots, M\}$, $N-M$ 个领导者的下标为 $E = \{M+1, M+2, \dots, N\}$

令 $x_i(t) = [z_i(t) \ v_i(t)]^T$,则系统可描述为

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t) \quad (3)$$

$$\text{其中, } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

多无人机系统内部通信拓扑结构在已知有限的拓扑集合 $\bar{G} = \{G^1, G^2, \dots, G^p\}, p \geq 1$ 中随时间任意切换, $t_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ 表示多无人机系统通信拓扑图的切换时刻,因此在一个通信拓扑图的驻留时间为 $\tau_k = t_k - t_{k-1}, k=1, 2, \dots$ 。当多无人机系统内部的通信拓扑结构受切换信号 $\sigma(t): [0, +\infty) \rightarrow P = \{1, 2, \dots, p\}$ 控制时,用 $\sigma(t)$ 表示多无人机系统在 t 时刻通信拓扑图 $G^{\sigma(t)}$ 的上标,进而定义多无人机系统在 t 时刻通信拓扑图对应的 Laplacian 矩阵为 $L^{\sigma(t)}$ 。本节假设 \bar{G} 中每个通信拓扑图都含有有向生成树。在切换拓扑条件下具有多个领导者的多无人机系统的 Laplacian 矩阵具有如下形式:

$$L^{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} L_1^{\sigma(t)} & L_2^{\sigma(t)} \\ 0_{(N-M) \times M} & L_3^{\sigma(t)} \end{bmatrix}$$

其中, $L_1^{\sigma(t)} \in R^{M \times M}, L_2^{\sigma(t)} \in R^{M \times (N-M)}, L_3^{\sigma(t)} \in R^{(N-M) \times (N-M)}$ 。

从 $L^{\sigma(t)}$ 的结构可知, $L_3^{\sigma(t)}$ 是有向图 $G_E^{\sigma(t)}$ 在时刻 t 对应的 Laplacian 矩阵。

为了后文的顺畅分析,现在给出平均驻留时间的定义。

定义 1 随着时间任意切换的多无人机系统内部通信拓扑结构图 $G^{\sigma(t)}$,在给定时间区间 $[t_0, t)$ 的平均驻留时间为

$$\tau_a = \frac{t - t_0}{N_\sigma(t_0, t) + 1} \quad (4)$$

其中, $N_\sigma(t_0, t)$ 是多无人机系统通信拓扑图在时间 $[t_0, t)$ 内的切换次数。

假设 1 $G_E^{\sigma(t)}$ 包含一个有向生成树。

在上述假设成立的前提下,类比于引理 2 有如下引理成立。

引理 4 存在矩阵 $M^{\sigma(t)} \in R^{(N-M) \times (N-M-1)}$ 使得 $L_3^{\sigma(t)} = M^{\sigma(t)} E$,其中 E 具有引理 2 的形式。 $EM^{\sigma(t)}$ 的特征值是矩阵 $L_3^{\sigma(t)}$ 的非零特征值。

假设 2 对于跟随者,至少有一个领导者存在一条路径可到达它。

在假设 2 成立的前提下,有如下引理成立。

引理 5^[13] 对于满足假设 2 前提下的有向图 G ,矩阵 L_1 的所有特征值均具有正实部,矩阵 $-L_1^{-1}L_2$ 的每一个元素都是非负的,并且矩阵 $-L_1^{-1}L_2$ 的每一行和均为 1。

领导者的期望编队队形描述为:

$$h_E(t) = [h_{M+1}^T(t), h_{M+2}^T(t), \dots, h_N^T(t)]^T$$

其中, $h_i(t) = [h_{ix}(t), h_{iy}(t)]$ 连续可微。

定义 1 称多无人机系统中的领导者形成时变编队,如果对于任意的有界初始状态使得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - h_i(t) - x_j(t) + h_j(t)) = 0, i, j \in E \quad (5)$$

定义 2 称具有多领导者的多无人机系统能够实现包含控制,如果对于任意的有界初始状态,任意的 $l \in F$,存在非负常数 $\alpha_{l,j} (j \in E)$ 满足 $\sum_{j=M+1}^N \alpha_{l,j} = 1$,使得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_l(t) - \sum_{j=M+1}^N \alpha_{l,j} x_j(t)) = 0 \quad (6)$$

定义 3 称多无人机系统实现了时变编队包含控制,如果对于任意给定的有界初始状态,存在非负常数 $\alpha_{l,j} (j \in E)$

使得对于任意的 $i \in E$ 和 $l \in F$, 式(5)和式(6)同时成立。

4 控制器设计

仅利用自身状态信息和与邻居无人机相对状态信息,基于一致性算法设计如下控制器:

$$u_i(t) = \mathbf{K}_1 x_i(t) + \mathbf{K}_2 \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(l)}(x_i(t) - x_j(t)), i \in F \quad (7)$$

$$u_i(t) = \mathbf{K}_1(x_i(t) - h_i(t)) + \mathbf{K}_3 \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(l)}((x_i(t) - h_i(t)) - (x_j(t) - h_j(t))) + w_i(t), i \in E \quad (8)$$

其中, $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ 为待求的反馈矩阵, $w_i(t)$ 为辅助控制函数。

将控制器式(7)和式(8)代入多无人机系统式(3)中可得:

$$\dot{x}_F(t) = (I_M \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1))x_F(t) + (\mathbf{L}_1^{(l)} \otimes \mathbf{BK}_2)x_F(t) + (\mathbf{L}_2^{(l)} \otimes \mathbf{BK}_2)x_E(t)$$

$$\dot{x}_E(t) = (I_{N-M} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1))x_E(t) + (\mathbf{L}_3^{(l)} \otimes \mathbf{BK}_3)x_E(t) - (\mathbf{L}_3^{(l)} \otimes \mathbf{BK}_3)h_E(t) - (I_{N-M} \otimes \mathbf{BK}_1)h_E(t) + (I_{N-M} \otimes D)w(t) \quad (9)$$

令 $\eta(t) = x_i(t) - h_i(t), i \in E$ 得:

$$\dot{\eta}_E(t) = (I_{N-M} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1))\eta_E(t) + (\mathbf{L}_3^{(l)} \otimes \mathbf{BK}_3)\eta_E(t) + (I_{N-M} \otimes \mathbf{A})h_E(t) + (I_{N-M} \otimes D)w(t) - (I_{N-M} \otimes D)\dot{h}_E(t) \quad (10)$$

因此领导者的编队形成问题转化成了式(10)的一致性问題。

令 $\xi(t) = \eta(t) - \eta_{+1}(t)$ 可得:

$$\dot{\xi}_E(t) = (I_{N-M} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1))\xi_E(t) + (\mathbf{EM}^{(l)} \otimes \mathbf{BK}_3)\xi_E(t) + (\mathbf{E} \otimes \mathbf{A})h_E(t) + (\mathbf{E} \otimes D)w(t) - (\mathbf{E} \otimes I)\dot{h}_E(t) \quad (11)$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_E(t) = 0 \Leftrightarrow \eta_{M+1}(t) = \eta_{M+2}(t) = \dots = \eta_N(t) \quad (12)$$

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_E(t) = 0$ 领导者形成期望编队。

因此,多无人机系统中的领导者形成期望编队的充要条件是:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{A})h_E(t) + (\mathbf{E} \otimes D)w(t) - (\mathbf{E} \otimes I)\dot{h}_E(t) = 0 \quad (13)$$

和系统

$$\dot{\xi}_E(t) = (I_{N-M} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1))\xi_E(t) + (\mathbf{EM}^{(l)} \otimes \mathbf{BK}_3)\xi_E(t) \quad (14)$$

是渐进稳定的。

因此根据式(13)可以求得:

$$w_i(t) = [0 \quad h_{iv}(t)]^T$$

则式(10)的一致性问題转化为了式(14)的渐进稳定性问題。

令 $\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(l)}(x_i(t) - x_j(t)), i \in F$, 因此可得到:

$$\varphi_F(t) = (\mathbf{L}_2^{(l)} \otimes I)x_E(t) + (\mathbf{L}_1^{(l)} \otimes I)x_F(t) \quad (15)$$

如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_F(t) = 0$, 可以得到:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_F(t) + ((\mathbf{L}_1^{(l)})^{-1} \mathbf{L}_2^{(l)} \otimes I)x_E(t)) = 0 \quad (16)$$

因此多无人机系统式(3)在控制器式(7)和式(8)的作用下,对于任意的有界初始状态,能够实现编队包含控制,如果式(17)成立:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_E(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_F(t) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

则具有多个领导者的多无人机系统实现时变编队包含控制问題,简化为式(17)中的两个系统的渐进稳定性问題。

引理 6 如果多无人机系统的切换通信拓扑平均驻留时间满足:

$$\tau_a > \frac{\ln \mu}{\beta} \quad (18)$$

其中, $\varphi_1 = \max_{i \in P} \{\lambda(Q_i)\}$, $\varphi_2 = \min_{i \in P} \{\lambda(Q_i)\}$, $\mu = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, β 为正实数。

则按照如下步骤设计的反馈矩阵能够使多无人机系统实现编队包含控制。

Step 1 选取矩阵 \mathbf{K}_1 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{L}_2^{(l)} \otimes I)w(t) - (\mathbf{L}_2^{(l)} \otimes \mathbf{BK}_1)h_E(t) = 0 \quad (19)$$

Step 2 根据 Step 1 中求得的 \mathbf{K}_1 , 选定标量参数 α , 求线性矩阵不等式, 得到可行解 P_1 :

$$\mathbf{S}_1^T P_1 + P_1 \mathbf{S}_1 - \alpha P_1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T P_1 + \beta P_1 < 0 \quad (20)$$

其中, $0 < \alpha < 2 \min\{\operatorname{Re}(\lambda(\mathbf{EM}))\}$, $\mathbf{S}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1$ 。

Step 3 根据 Step 1 中求得的 \mathbf{K}_1 , 求解线性矩阵不等式, 得到可行解 P_2

$$\mathbf{S}_1^T P_2 + P_2 \mathbf{S}_1 - 2\lambda P_2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T P_2 < 0 \quad (21)$$

其中, $\lambda = \min(\lambda(L_1))$ 。

Step 4 设计反馈矩阵 $\mathbf{K}_2 = -\mathbf{B}^T P_2$, $\mathbf{K}_3 = -\mathbf{B}^T P_1$

证明: 选取 Lyapunov 函数

$$V_1 = \xi_E^T(t) (Q^{(l)} \otimes P_1) \xi_E(t) \quad (22)$$

当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, $V_1(t)$ 是连续可导的。

令 $\mathbf{K}_3 = -\mathbf{B}^T P_1$, 对式(22)沿着式(14)系统求导可得:

$$\dot{V}_1 = \xi_E^T(t) (\mathbf{S}_2 \otimes P_1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T P_1) \xi_E(t) + \xi_E^T(t) (Q^{(l)} \otimes (\mathbf{S}_1^T P_1 + P_1 \mathbf{S}_1)) \xi_E(t) \quad (23)$$

其中, $\mathbf{S}_2 = (\mathbf{EM}^{(l)})^T Q^{(l)} + Q^{(l)} \mathbf{EM}^{(l)}$

根据引理 3 可得:

$$\mathbf{S}_2 = (\mathbf{EM})^T Q^{(l)} + Q^{(l)} \mathbf{EM}^{(l)} < \alpha Q^{(l)} \quad (24)$$

因此:

$$\dot{V}_1 \leq \xi_E^T(t) (Q^{(l)} \otimes (\mathbf{S}_1^T P_1 + P_1 \mathbf{S}_1 - \alpha P_1 \mathbf{B} \mathbf{B}^T P_1)) \xi_E(t) \quad (25)$$

根据式(20)可得:

$$\dot{V}_1 \leq -\beta \xi_E^T(t) (Q^{(l)} \otimes P) \xi_E(t) \quad (26)$$

因此,由式(22)和式(26)可得:

$$V(t) < e^{-\beta(t-t_k)} V(t_k) \quad (27)$$

考虑到对于任意的 $i \in P$, 有 $\varphi_2 I \leq Q^{(l)} \leq \varphi_1 I$, 其中 $\varphi_1 = \max_i \{\lambda(Q_i)\}$, $\varphi_2 = \min_i \{\lambda(Q_i)\}$ 。所以在通信拓扑图切换时刻 t_k 有:

$$V(t_k^+) \leq \mu V(t_k^-) \quad (28)$$

通过迭代可得:

$$\begin{aligned} V_1 &\leq e^{-\beta(t-t_k)} \mu V_1(t_k^-) \\ &\leq e^{-\beta(t-t_k)} \mu e^{-\beta(t_k-t_{k-1})} \mu V_1(t_{k-1}) \\ &\leq e^{-\beta t} \mu^k V_1(0) \end{aligned} \quad (29)$$

由式(22)可得 $V_1(0) \leq \vartheta_1 \| \xi_E(0) \|^2$, $V_1(t) \geq \vartheta_2 \| \xi_E(0) \|^2$, 其中 $\vartheta_1 = \varphi_1 \max\{\lambda(P)\}$, $\vartheta_2 = \varphi_2 \min\{\lambda(P)\}$ 。

又因为拓扑切换条件满足 $k \leq N_{\sigma(t)} < \frac{t}{\tau_a}$, 因此根据式(29)

可得:

$$\| \xi_E(t) \|^2 \leq \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} e^{(-\beta + \frac{\ln \mu}{\tau_a}) t} \| \xi_E(0) \|^2 \quad (30)$$

由引理 6 可以知道, $-\beta + \frac{\ln \mu}{\tau_a} < 0$, 故 $\xi_E(t)$ 按指数速度趋于 0。即系统式 (14) 是渐近稳定的, 即多无人机系统中的领导者形成期望编队。

对式 (15) 求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_F(t) &= (\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \otimes I) \dot{x}_E(t) + (\mathbf{L}_1^{\sigma(t)} \otimes I) \dot{x}_F(t) \\ &= (\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)) x_E(t) + (\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \mathbf{L}_3^{\sigma(t)} \otimes \mathbf{BK}_3) \\ &\quad x_E(t) - (\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \mathbf{L}_3^{\sigma(t)} \otimes \mathbf{BK}_3) h_E(t) - (\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \otimes \mathbf{BK}_1) \\ &\quad h_E(t) + (\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \otimes I) \omega(t) + (\mathbf{L}_1^{\sigma(t)} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)) \\ &\quad x_F(t) + ((\mathbf{L}_1^{\sigma(t)})^2 \otimes \mathbf{BK}_2) x_F(t) + (\mathbf{L}_1^{\sigma(t)} \mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \otimes \\ &\quad \mathbf{BK}_2) x_E(t) \end{aligned} \quad (31)$$

因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_F(t) = 0$ 等价于系统式 (31) 是渐近稳定的。

当系统中的领导者形成期望编队时:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} ((\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \mathbf{L}_3^{\sigma(t)}) \otimes \mathbf{BK}_3) (x_E(t) - h_E(t)) &= \\ \lim_{t \rightarrow \infty} ((\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \mathbf{L}_3^{\sigma(t)}) \otimes \mathbf{BK}_3) (1 \otimes r(t)) & \end{aligned} \quad (32)$$

根据引理 1 可得 $\mathbf{L}_3^{\sigma(t)} \mathbf{1} = 0$, 因此:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ((\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \mathbf{L}_3^{\sigma(t)}) \otimes \mathbf{BK}_3) (x_E(t) - h_E(t)) = 0 \quad (33)$$

因此, 系统式 (31) 的渐近稳定性等价于系统式 (34) 是渐近稳定的。

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_F(t) &= (I \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)) \varphi_F(t) + (\mathbf{L}_2 \otimes I) \omega(t) + (\mathbf{L}_1 \otimes \\ &\quad \mathbf{BK}_2) \varphi_F(t) - (\mathbf{L}_2 \otimes \mathbf{BK}_1) h_E(t) \end{aligned} \quad (34)$$

由式 (19) 可知, 系统式 (34) 是渐近稳定的等价于式 (35) 是渐近稳定的。

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_F(t) &= (I \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)) \varphi_F(t) + (\mathbf{L}_1^{\sigma(t)} \otimes \mathbf{BK}_2) \varphi_F(t) - \\ &\quad (\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \otimes \mathbf{BK}_1) h_E(t) + (\mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \otimes I) \omega(t) \end{aligned} \quad (35)$$

选取 Lyapunov 函数:

$$V_2 = \varphi_F^T(t) (I \otimes P_2) \varphi_F(t) \quad (36)$$

令 $\mathbf{K}_2 = -\mathbf{B}^T P_2$, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \varphi_F^T(t) (I \otimes (\mathbf{S}_1^T P_2 + P_2 \mathbf{S}_1)) \varphi_F(t) - \varphi_F^T(t) (\mathbf{L}_2 \otimes \\ &\quad 2P_2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T P_2) \varphi_F(t) \\ &\leq \varphi_F^T(t) (I \otimes (\mathbf{S}_1^T P_2 + P_2 \mathbf{S}_1 - 2\lambda P_2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T P_2)) \varphi_F(t) \end{aligned} \quad (37)$$

由式 (21) 可得 $\dot{V}_2 \leq 0$, 因此系统式 (34) 是渐近稳定的, 因此跟随者在由领导者构成的凸包内运动。证毕。

5 仿真实验

考虑由 8 架无人机构成的多无人机系统, 其中跟随者的标号集合为 $F = \{1, 2, 3, 4\}$, 领导者的标号集合为 $E = \{5, 6, 7, 8\}$, 每架无人机在一维空间动力学系统模型由式 (2) 描述。无人机在三维空间运动, 其初始状态为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= [1 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad -4]^T \\ \mathbf{x}_2 &= [2 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \quad 3 \quad 2]^T \\ \mathbf{x}_3 &= [1 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad -4]^T \\ \mathbf{x}_4 &= [2 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \quad 3 \quad 2]^T \\ \mathbf{x}_5 &= [0 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 4]^T \\ \mathbf{x}_6 &= [1 \quad 1 \quad 3 \quad -1 \quad 2 \quad 0]^T \\ \mathbf{x}_7 &= [-1 \quad 3 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad 4]^T \\ \mathbf{x}_8 &= [0 \quad 1 \quad -3 \quad -1 \quad 2 \quad -1]^T \end{aligned}$$

领导者的期望编队队形为:

$$\mathbf{h}_{iz}(t) = [h_{i1z} \quad h_{i2z} \quad h_{i3z}]^T, i \in E$$

其中, $\mathbf{h}_{i1x} = [h_{i1z} \quad h_{i1v}]^T$, $\mathbf{h}_{i2x} = [h_{i2z} \quad h_{i2v}]^T$ 和 $\mathbf{h}_{i3x} =$

$[h_{i1z} \quad h_{i3v}]^T$ 分别表示在三维空间中的期望编队。本文令:

$$h_{i1z}(t) = 3 \sin(2t + \frac{(i-1)\pi}{2})$$

$$h_{i2z}(t) = 6 \sin(2t + \frac{(i-1)\pi}{2})$$

$$h_{i3z}(t) = 3 \cos(2t + \frac{(i-1)\pi}{2})$$

$$h_{iv}(t) = \dot{h}_{iz}(t)$$

8 架无人机系统内部通信拓扑结构随时间在图 1 中任意切换, 从图中不难发现, 每个通信拓扑图中的领导者之间均包含一个有向生成树, 每个跟随者至少有一个领导者存在路径可到达它。从图中可得到相应的 Laplacian 矩阵为:

$$\mathbf{L}^{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1^{\sigma(t)} & \mathbf{L}_2^{\sigma(t)} \\ 0_{4 \times 4} & \mathbf{L}_3^{\sigma(t)} \end{bmatrix}$$

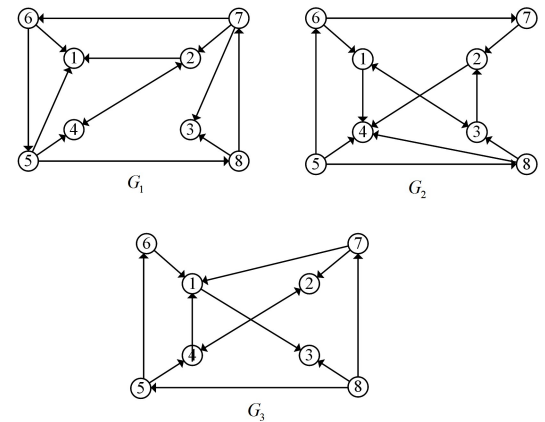


图 1 通信拓扑图

Fig. 1 Communication topology

其中各拓扑图对应的 Laplacian 各元素如下所示:

$$\mathbf{L}_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_{32} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

按照算法提供的步骤设计控制器,通过 Step 1 求得:

$$K_1 = [-4 \ 0]$$

选取 $\alpha = 0.9$,解 Step 2 中的线性矩阵不等式求得:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 225.8246 & 51.3019 \\ 51.3019 & 18.9072 \end{bmatrix}$$

解解 Step 3 中的线性矩阵不等式,求得:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1836 & 177.6110 \\ 177.6110 & 25.5144 \end{bmatrix}$$

通过解 Step 4 求得:

$$K_2 = [-177.6110 \ -25.5144]$$

$$K_3 = [-51.3019 \ -18.9072]$$

多无人机系统内部通信拓扑图在图 1 中给出的已知的通信拓扑图中随时间任意切换,切换过程如图 2 所示。

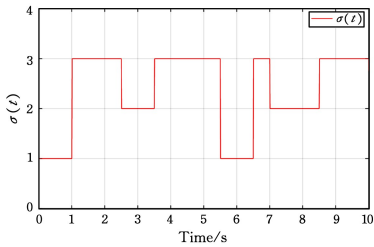


图 2 拓扑切换过程

Fig. 2 Topology switching process

多无人机系统在控制器和的作用下,领导者将形成时变编队,跟随者将在由领导者构成的凸包内移动。假设无人机在三维空间运动相互解耦,那么领导者在三维空间的运动状态相似,其中一维空间作为领导者的无人机实际位置与期望编队位置误差状态趋向于一致的过程如图 3 所示。由定义知,当领导者的实际位置与编队期望位置误差达成一致时,领导者形成了期望的时变编队。

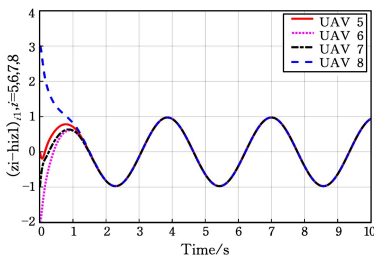


图 3 实际位置与期望编队位置误差

Fig. 3 Error of actual position and expected formation position

从图 3 可以看出,领导者的位置与期望位置误差在 1.5 s

时已经趋于并保持一致,意味着领导者已经形成了期望的时变编队队形。

为了更加准确地分析多无人机系统是否在空间中形成了编队包含状态,将 8 架无人机的位置在三维空间坐标中表示,其中图 4 为 0.5 s 时,无人机空间位置;图 5 为 1.5 s 时,无人机空间位置;图 6 为 10 s 时,无人机空间位置。

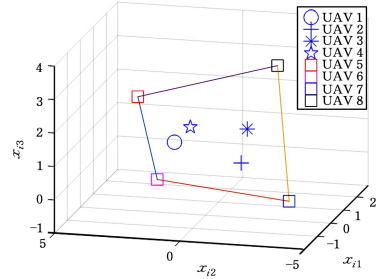


图 4 无人机 0.5 s 时在空间中位置

Fig. 4 Position of UAV in space at 0.5 s

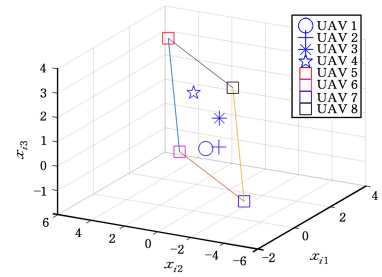


图 5 无人机 1.5 s 时在空间中位置

Fig. 5 Position of UAV in space at 1.5 s

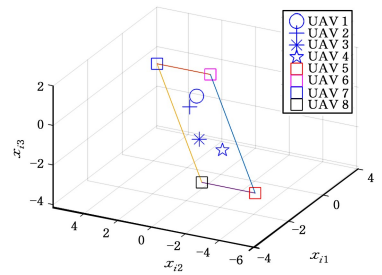


图 6 无人机 10 s 时在空间中位置

Fig. 6 Position of UAV in space at 10 s

从图 4 可以看出,0.5 s 时,领导者在空间中分布杂乱,仍未形成期望的编队队形,但可以发现领导者在空间中呈现的四边形有向平行四边形发展的倾向,即有形成期望编队的趋势,这与图 3 中显示的在 0.5 s 时,领导者位置误差与速度误差均未达成一致相呼应;跟随者也未在领导者构成的凸包内运动,散布在空间中。从图 5 和图 6 中可以看出,多无人机实现了时变编队包含控制,其中领导者在外围形成了一个时变的平行四边形编队,随着时间变化,领导者一直构成一个平行四边形,但不论是领导者的位置还是构成的平行四边形形状均不相同,这与图 3 中显示领导者的位置误差与速度误差均已经达成一致相呼应;同时还发现跟随者一直在由领导者构成的凸包内运动。

为了更加清晰地验证多无人机系统在控制器作用下形成了时变编队包含控制,将 10 s 时无人机在三维空间中的位置的不同视图在图 7—图 9 中展示,可以看出,领导者构成了平行四边形,而跟随者的运动也未超出领导者构成的凸包。

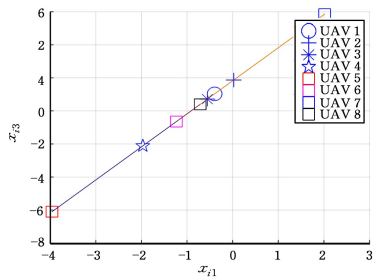


图7 无人机 10s 时空间位置第一视图

Fig. 7 First view of position of UAV in 10s

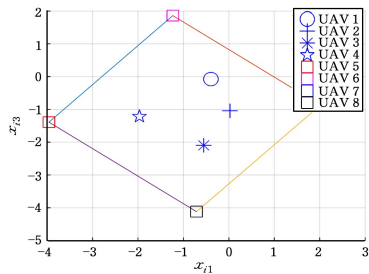


图8 无人机 10s 时空间位置第二视图

Fig. 8 Second view of position of UAV in 10s

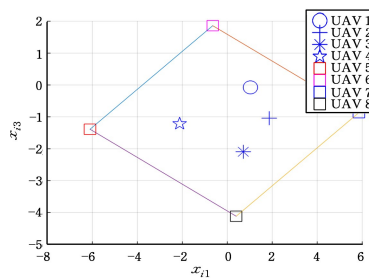


图9 无人机 10s 时空间位置第三视图

Fig. 9 Third view of position of UAV in 10s

结束语 本文通过包含多个领导者的多无人机系统分析,解决了编队包含控制问题,得出了以下结论:

1)所设计的控制器能够使包含多个领导者的多无人机系统在切换拓扑条件下实现编队包含控制;

2)多无人机系统内部的通信拓扑结构为切换拓扑,且每个拓扑图为一般的有向通信拓扑图,降低了通信要求;

3)多无人机系统中外围的领导者形成的编队为时变编队,相比固定编队,其规避打击的能力更强,执行任务的效率更高。

参考文献

[1] GUANG M X, LONG W. Moving formation convergence of a group of mobile robots via decentralised information feedback [J]. International Journal of Systems Science, 2009, 40(10): 9.

- [2] WANG J, NIAN X H. Consensus and formation control of discrete-time multi-agent systems[J]. Journal of Central South University, 2011, 18(4): 1161-1168.
- [3] ZHOU S L, QI Y H, ZHANG L, et al. Time-varying formation control of UAVswarm systems with switching topologies[J]. Journal of Aeronautics, 2016, 38(4): 259-267.
- [4] 杨建平, 胡江平, 吕维. 基于事件触发机制的智能车编队控制[J]. 控制工程, 2019, 26(3).
- [5] CAO J, WU Z, PENG L. Distributed Event-Triggered Consensus Tracking of First-Order Multi-Agent Systems with a Virtual Leader[J]. Chinese Physics B, 2016, 25(5): 58902.
- [6] CHENG L L, YU P T. Formation control of multi-agent systems with heterogeneous communication delays[J]. International Journal of Systems Science, 2009, 40(6): 627-636.
- [7] LI Z, WEI R, LIU X, et al. Distributed containment control of multi-agent systems with general linear dynamics in the presence of multiple leaders[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2013, 23(5): 534-547.
- [8] MENG Z, WEI R, ZHENG Y. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2092-2099.
- [9] DONG X, LI Q, ZHANG R, et al. Formation-containment control for high-order linear time-invariant multi-agent systems with time delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(9): 3564-3584.
- [10] WEI R, ATKINS E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2010, 17(10/11): 1002-1033.
- [11] WEI L, ZHOU S, SHI Y, et al. LQR_based Consensus Algorithms of Multi-agent Systems with a Prescribed Convergence Speed[C]//Proceedings of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference. IEEE, 2014.
- [12] WEI L, ZHOU S, QI Y, et al. Leaderless consensus of multi-agent systems with Lipschitz nonlinear dynamics and switching topologies[J]. Neurocomputing, 2015, 173: 1322-1329.
- [13] MENG Z, WEI R, ZHENG Y. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies [J]. Automatica, 2010, 46(12): 2092-2099.



ZHAO Xue-yuan, born in 1995, post-graduate. His main research interests include the consensus theory of multi-agent and formation control.