

k 元 n 方体的子网络可靠性研究

冯凯 李婧

山西大学计算机与信息技术学院 太原 030006



摘要 k 元 n 方体是并行计算机系统最常用的互连网络拓扑结构之一。为了精确度量 k 元 n 方体中子网络的容错能力,研究了概率故障条件下 k 元 n 方体中 k 元 $(n-1)$ 方体子网络的可靠性。当 $k(k \geq 3)$ 为奇整数时,通过厘清 k 元 n 方体中不同 k 元 $(n-1)$ 方体子网络之间的相交情形,得出了 k 元 $(n-1)$ 方体子网络的可靠性的一个下界,并给出了该可靠性的一个近似结果。实验结果表明,得出的近似结果与仿真结果十分接近,并且随着顶点可靠性的降低两者趋于一致。进一步地,提出了在发生点故障的 k 元 n 方体中搜寻 k 元 $(n-1)$ 方体子网络的算法,并通过实例验证了该算法的有效性。

关键词 并行计算机系统;互连网络; k 元 n 方体;子网络可靠性;概率故障

中图法分类号 TP393.02

Study on Subnetwork Reliability of k -ary n -cubes

FENG Kai and LI Jing

School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

Abstract The k -ary n -cube is one of the most attractive interconnection network topologies for parallel computing systems. In order to accurately measure the fault tolerance on subnetworks in a k -ary n -cube, the k -ary $(n-1)$ -cube reliability in a k -ary n -cube under the probabilistic fault model is studied. When k is an odd integer and $k \geq 3$, a lower bound on the k -ary $(n-1)$ -cube reliability in a k -ary n -cube under the probability fault model is derived by clarifying the intersections of k -ary $(n-1)$ -cube subnetworks in a k -ary n -cube, and an approximate k -ary $(n-1)$ -cube reliability result is obtained. The approximation result is shown to be close to the simulation result, and these two results are getting overlapped as the node reliability decreases. Moreover, an algorithm is given for searching fault-free k -ary $(n-1)$ -cubes in a k -ary n -cube in the presence of node failures, and the experimental results demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords Parallel computer system, Interconnection network, k -ary n -cube, Subnetwork reliability, Probabilistic failure

1 引言

并行计算机系统通常以某个无向简单图 $G=(V(G), E(G))$ 作为其底层拓扑结构(即互连网络), $V(G)$ 中的每个顶点表示系统中的一个处理器, $E(G)$ 中的每条边表示两个处理器之间的一条直接通讯线路。为了使并行计算机系统具有良好的可划分性和可扩展性,人们通常选取具有迭代结构的互连网络来构建实际系统。对于一些特定的用户任务,其算法的实现只需指派某个子网络(与原有网络具有相同的拓扑性质但规模较小的网络)来执行。在此背景下,互连网络的子网络可靠性得到了广泛的关注。Chang等^[1]提出了概率故障条件下子网络可靠性的分析方法,研究了 n 维超立方体中 $(n-1)$ 维子超立方体的可靠性,并且证明了所提方法的计算效率优于随机故障条件下相应可靠性的求解方法。随后,Wu等^[2]在概率故障条件下得出了 n 维星图网络中 $(n-1)$ 维子星图网络

的可靠性的一个上界。概率故障条件下排列图网络^[3]和 (n, k) -星图网络^[4]的子网络可靠性也分别得到了研究。

k 元 n 方体是并行计算机系统最常用的互连网络拓扑结构之一,它具有易实现、低延迟、高带宽等优良性质^[5]。诸多基于 k 元 n 方体构建的并行计算机系统已经问世,如Cray T3E^[6], IBM Blue Gene^[7]等。近年来, k 元 n 方体的拓扑结构性质得到了广泛研究^[8-13]。Feng等^[9]给出了概率故障条件下 k 元 n 方体($k \geq 3$ 为奇整数)中 k 元 $(n-1)$ 方体子网络的可靠性的一个上界。本文进一步对概率故障条件下 k 元 n 方体中 k 元 $(n-1)$ 方体子网络的可靠性进行研究,得出了该可靠性的一个较好的近似结果。本文中未给出定义而直接使用的图论术语和记号请参见文献^[14]。

2 基本概念和性质

k 元 n 方体($k \geq 2, n \geq 1$),记为 Q_n^k ,是一个具有 k^n 个顶点

到稿日期:2019-07-25 返修日期:2019-10-10 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家自然科学基金(61502286);山西省应用基础科研项目(201701D221099)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61502286) and Applied Basic Research Project of Shanxi Province (201701D221099).

通信作者:冯凯(fengkai@sxu.edu.cn)

的连通图,它的任一顶点可表示为 $u = u_1 u_2 \cdots u_n$, 其中对于任意的整数 $i (1 \leq i \leq n)$ 均有 $0 \leq u_i \leq k-1$ 。两个顶点 $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ 和 $v = v_1 v_2 \cdots v_n$ 相邻且仅当存在 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $u_j = v_j \pm 1 \pmod{k}$ 且对于任意的 $l \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$ 均有 $u_l = v_l$ 。为了便于表述,下文类似之处省略“(mod k)”。称 Q_n^k 中一个同构于 Q_{n-m}^k 的子图为一个 Q_{n-m}^k 子网络,其中 $0 \leq m \leq n-1$ 。在无特殊说明的情况下,下文出现的 k 元 n 方体均满足 $k \geq 3$ 为奇整数。

给定一个正整数 $k \geq 2$, 记 $N_{k-1} = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ 。对于任一整数 $m (0 \leq m \leq n-1, n \geq 1)$, 设 i_1, i_2, \dots, i_m 为 m 个整数且满足 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ 。设 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m} \in N_{k-1}$ 为 m 个整数。记点集 $M = \{b_1 b_2 \cdots b_{i_1-1} a_{i_1} b_{i_1+1} \cdots b_{i_2-1} a_{i_2} b_{i_2+1} \cdots b_{i_m-1} a_{i_m} b_{i_m+1} \cdots b_n : b_1, b_2, \dots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \dots, b_{i_2-1}, b_{i_2+1}, \dots, b_{i_m-1}, b_{i_m+1}, \dots, b_n \in N_{k-1}\}$ (当 $i_1 = 1$ 时, $b_1 b_2 \cdots b_{i_1-1}$ 为空字符串; 当 $i_m = n$ 时, $b_{i_m+1} \cdots b_n$ 为空字符串)。显然, Q_n^k 中由 M 导出的子图同构于 Q_{n-m}^k 。为了便于表述,将 Q_n^k 中由 M 导出的子图记为一个 n 位的字符串 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{i_2-i_1-1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} X^{n-i_m}$ (本文称其为 Q_n^k 的子网络符号化表示), 其中 $X^t = \underbrace{XX \cdots X}_t$ 。特别地, 当 $m=0$ 时, $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{i_2-i_1-1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} X^{n-i_m} = X^n$ 表示 Q_n^k 自身。进一步地, 有如下结论成立。

引理 1^[12] 对于任意的奇整数 $k \geq 3$, Q_n^k 中任一同构于 Q_{n-m}^k 的子图可用某个 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{i_2-i_1-1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} X^{n-i_m}$ 唯一表示, 其中 $0 \leq m \leq n-1$ 。

3 主要工作

3.1 Q_{n-1}^k 子网络可靠性分析

在概率故障条件下, 边故障忽略不计, 仅考虑点故障的发生。假定各个顶点的可靠性概率是一致的, 且各个顶点发生故障是相互独立的。设 p 为 Q_n^k 中顶点的可靠性概率。记 $R_{n,n-1}^k(p)$ 为概率故障条件下 Q_n^k 中存在 Q_{n-1}^k 子网络的概率。

由引理 1 可知, Q_n^k 中任意一个 Q_{n-1}^k 子网络可用某个 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 唯一表示, 其中 $1 \leq i_1 \leq n, a_{i_1} \in N_{k-1}$ 为某一给定的整数。由 i_1 和 a_{i_1} 的选取可知, Q_n^k 中恰有 nk 个不同的 Q_{n-1}^k 子网络。根据容斥原理^[15], 可以给出 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的计算公式:

$$R_{n,n-1}^k(p) = \sum_{i=1}^{nk} r_{(i)}(p) + (-1) \sum_{\substack{i < j \\ i,j=1,2,\dots,nk}} r_{(i,j)}(p) + (-1)^2 \sum_{\substack{i < j < l \\ i,j,l=1,2,\dots,nk}} r_{(i,j,l)}(p) + (-1)^3 \sum_{\substack{i < j < l < q \\ i,j,l,q=1,2,\dots,nk}} r_{(i,j,l,q)}(p) + \dots + (-1)^{nk-1} r_{(1,2,\dots,nk)}(p) \quad (1)$$

其中, $r_{(i)}(p)$ 表示第 i 个 Q_{n-1}^k 子网络的可靠性概率; $r_{(i,j)}(p)$ 表示第 i 个 Q_{n-1}^k 子网络和第 j 个 Q_{n-1}^k 子网络的联合可靠性概率; $\dots; r_{(1,2,\dots,nk)}(p)$ 表示第 1 个 Q_{n-1}^k 子网络至第 nk 个 Q_{n-1}^k 子网络的联合可靠性概率。

注意到 Q_n^k 中一个 Q_{n-1}^k 子网络具有 k^{n-1} 个顶点, 且 Q_n^k 中顶点的可靠性概率为 p 。可知 $r_{(1)}(p) = r_{(2)}(p) = \dots = r_{(nk)}(p) = p^{k^{n-1}}$ 。而 $r_{(i,j)}(p), r_{(i,j,l)}(p), r_{(i,j,l,q)}(p)$ 等联合可靠性概率的计算则需要先厘清不同的 Q_{n-1}^k 子网络之间的相交情形。文献[9]厘清了 2 个和 3 个 Q_{n-1}^k 子网络之间的相交情形, 并得出了以下结论。

引理 2^[9] 设 $k \geq 3$ 为奇整数。 Q_n^k 中 m 个 Q_{n-1}^k 子网络两

两不相交的情形共有 $\binom{k}{m} n$ 种, 其中 $2 \leq m \leq k$ 。

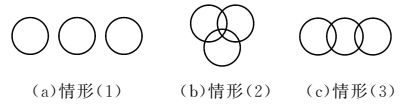
引理 3^[9] 设 $k \geq 3$ 为奇整数。若 Q_n^k 中 m 个 Q_{n-1}^k 子网络两两相交, 并且由其公共顶点构成的集合导出的子图同构于 Q_{n-m}^k , 则这样的情形共有 $\binom{n}{m} k^m$ 种, 其中 $2 \leq m \leq n-1$ 。进一步地, 这样的 m 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $k^n - k^{n-m} (k-1)^m$ 个顶点。

引理 4^[9] 对于奇整数 $k \geq 3$, Q_n^k 中两个 Q_{n-1}^k 子网络 C_1 和 C_2 的不同相交情形有且仅有以下两种:

- (1) C_1 和 C_2 不相交;
- (2) C_1 和 C_2 相交且由 $V(C_1) \cap V(C_2)$ 导出的子图同构于 Q_{n-2}^k 。

引理 5^[9] 对于奇整数 $k \geq 3$, Q_n^k 中 3 个 Q_{n-1}^k 子网络 C_1, C_2 和 C_3 的不同相交情形有且仅有以下 3 种 (见图 1):

- (1) C_1, C_2 和 C_3 两两不相交;
- (2) C_1, C_2 和 C_3 两两相交且由 $V(C_1) \cap V(C_2) \cap V(C_3)$ 导出的子图同构于 Q_{n-3}^k ;
- (3) C_1, C_2 和 C_3 中仅有一个与其他两个均相交。



(a)情形(1) (b)情形(2) (c)情形(3)

图 1 3 个 Q_{n-1}^k 子网络的不同相交情形

Fig. 1 Different intersection patterns of three subgraphs isomorphic to Q_{n-1}^k

引理 6^[9] 设 $n \geq 3$ 为整数, $k \geq 3$ 为奇整数。令 p 为 Q_n^k 中顶点的可靠性概率, 则有:

$$R_{n,n-1}^k(p) \leq knp^{k^{n-1}} - \left[\frac{k(k-1)}{2} np^{2k^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} k^2 p^{k^n - k^{n-2} (k-1)^2} \right] + \left[\frac{k(k-1)(k-2)}{6} np^{3k^{n-1}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} k^3 p^{k^n - k^{n-3} (k-1)^3} + \frac{n(n-1)}{2} k^2 (k-1) p^{3k^{n-1} - 2k^{n-2}} \right]$$

下面将分析 Q_n^k 中的 4 个 Q_{n-1}^k 子网络之间的不同相交情形。由引理 1, 4 个 Q_{n-1}^k 子网络可表示为 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}, X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}, X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 和 $X^{i_4-1} a_{i_4} X^{n-i_4}$, 其中 $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4} \in N_{k-1}$ 为给定的整数。

引理 7 4 个 Q_{n-1}^k 子网络 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}, X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}, X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 和 $X^{i_4-1} a_{i_4} X^{n-i_4}$ 的不同相交情形有且仅有 5 种。

证明: 由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知, 对于任意 $l \in \{1, 2, 3, 4\}$, 有 $V(X^{i_l-1} a_{i_l} X^{n-i_l}) = \{u_1 u_2 \cdots u_n : u_1 u_2 \cdots u_n \in V(Q_n^k), u_{i_l} = a_{i_l}\}$ 。根据 i_1, i_2, i_3, i_4 的不同取值, 考虑以下情形。

情形 1 $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$ 。

此时必有 $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}$ 两两互不相等。由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知, 对于任意不同的 $p, q \in \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}\}$, 有 $V(X^{i_1-1} p X^{n-i_1}) \cap V(X^{i_1-1} q X^{n-i_1}) = \emptyset$, 即此时 4 个 Q_{n-1}^k 子网络两两不相交, 如图 2(a) 所示。

情形 2 i_1, i_2, i_3, i_4 两两互不相等。

由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知,对于任意不同的 $l, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, 有 $V(X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}) \cap V(X^{i_j-1} a_{i_j} X^{n-i_j}) \neq \emptyset$, 即此时 4 个 Q_{n-1}^k 子网络两两相交。注意到,任意的 $u_1 u_2 \cdots u_n \in V(X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}) \cap V(X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}) \cap V(X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}) \cap V(X^{i_4-1} a_{i_4} X^{n-i_4})$ 满足 $u_1 u_2 \cdots u_n \in V(Q_n^k)$, $u_{i_1} = a_{i_1}, u_{i_2} = a_{i_2}, u_{i_3} = a_{i_3}, u_{i_4} = a_{i_4}$ 。由 Q_n^k 的定义可知,此时 4 个 Q_{n-1}^k 子网络公共顶点构成的集合导出的子图同构于 Q_{n-4}^k , 如图 2(b) 所示。

情形 3 i_1, i_2, i_3, i_4 中仅有两个取值相同。

不妨设 $i_1 = i_2$, 则必有 $a_{i_1} \neq a_{i_2}$ 。此时, i_1, i_3, i_4 两两互不相等。由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知, $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 不相交, 且对于任意的 $j \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{l\}$, 有 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_j-1} a_{i_j} X^{n-i_j}$ 相交(其中 $l=3, 4$), 即此时 4 个 Q_{n-1}^k 子网络之间的相交情形如图 2(c) 所示。

情形 4 i_1, i_2, i_3, i_4 中仅有 3 个取值相同。

不妨设 $i_1 = i_2 = i_3$, 则必有 $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ 两两互不相等。此时, $i_4 \neq i_1$ 。由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知, $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}, X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 和 $X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 两两不相交, 且对于任意的 $j \in \{1, 2, 3\}$ 有 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_j-1} a_{i_j} X^{n-i_j}$ 相交, 如图 2(d) 所示。

情形 5 i_1, i_2, i_3, i_4 中有两个取值相同且另外两个也取值相同。

不妨设 $i_1 = i_2, i_3 = i_4$ 且 $i_1 \neq i_3$, 则必有 $a_{i_1} \neq a_{i_2}, a_{i_3} \neq a_{i_4}$ 。由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知, $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 不相交, $X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 和 $X^{i_4-1} a_{i_4} X^{n-i_4}$ 不相交, 且对于任意的 $l \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4\}$, $X^{i_l-1} a_{i_l} X^{n-i_l}$ 和 $X^{i_j-1} a_{i_j} X^{n-i_j}$ 相交, 如图 2(e) 所示。

综上, i_1, i_2, i_3, i_4 的不同取值情形均已考虑, 因此 4 个 Q_{n-1}^k 子网络之间的不同相交情形有且仅有 5 种(见图 2)。引理 7 证毕。

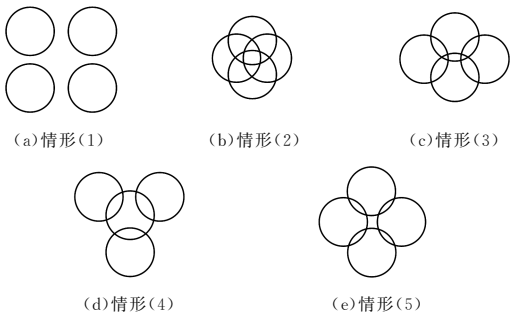


图 2 4 个 Q_{n-1}^k 子网络的不同相交情形

Fig. 2 Different intersection patterns of four subgraphs isomorphic to Q_{n-1}^k

进一步地, 有如下结论成立。

引理 8 4 个 Q_{n-1}^k 子网络 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}, X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}, X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 和 $X^{i_4-1} a_{i_4} X^{n-i_4}$ 的不同相交情形(见图 2)满足:

(1) 情形(1)共有 $\binom{k}{4} n$ 种, 且这一情形下 4 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $4k^{n-1}$ 个顶点;

(2) 情形(2)共有 $\binom{n}{4} k^4$ 种, 且这一情形下 4 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $k^n - k^{n-4} (k-1)^4$ 个顶点;

(3) 情形(3)共有 $\binom{k}{2} n \binom{n-1}{2} k^2$ 种, 且这一情形下 4 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $4k^{n-1} - 5k^{n-2} + 2k^{n-3}$ 个顶点;

(4) 情形(4)共有 $\binom{k}{3} n(n-1)k$ 种, 且这一情形下(4)个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $4k^{n-1} - 3k^{n-2}$ 个顶点;

(5) 情形(5)共有 $\binom{n}{2} \binom{k}{2} \binom{k}{2}$ 种, 且这一情形下 4 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $4k^{n-1} - 4k^{n-2}$ 个顶点。

证明: 针对情形(1), 如图 2(a) 所示, 4 个 Q_{n-1}^k 子网络两两不相交。由引理 2, 该情形共有 $\binom{k}{4} n$ 种。进一步地, 这样的 4 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $4k^{n-1}$ 个顶点。

针对情形(2), 如图 2(b) 所示, 4 个 Q_{n-1}^k 子网络两两相交, 并且由其公共顶点构成的集合导出的子图同构于 Q_{n-4}^k 。由引理 3, 该情形共有 $\binom{n}{4} k^4$ 种。进一步地, 这样的 4 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $k^n - k^{n-4} (k-1)^4$ 个顶点。

针对情形(3), 如图 2(c) 所示, 不妨设 $i_1 = i_2$ 。由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知, $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 不相交, 且对于任意的 $j \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{l\}$ 有 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_j-1} a_{i_j} X^{n-i_j}$ 相交(其中 $l=3, 4$)。由引理 2, $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 不同的选法共有 $\binom{k}{2} n$ 种。当选定 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 时, i_3 和 i_4 不同的选法有 $\binom{n-1}{2}$ 种, a_{i_3} 和 a_{i_4} 均可在 N_{k-1} 中任取。因此情形(3)共有 $\binom{k}{2} n \binom{n-1}{2} k^2$ 种。由引理 3, $X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}, X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 和 $X^{i_4-1} a_{i_4} X^{n-i_4}$ 共有 $k^n - k^{n-3} (k-1)^3$ 个顶点。由引理 4 和引理 5, $|V(X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}) \cap (V(X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}) \cup V(X^{i_4-1} a_{i_4} X^{n-i_4}))| = 2k^{n-2} - k^{n-3}$ 。从而可知, 这样的 4 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $k^n - k^{n-3} (k-1)^3 + k^{n-1} - (2k^{n-2} - k^{n-3}) = 4k^{n-1} - 5k^{n-2} + 2k^{n-3}$ 个顶点。

针对情形(4), 如图 2(d) 所示, 不妨设 $i_1 = i_2 = i_3$ 。由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知, $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}, X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 和 $X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 两两不相交, 且对于任意的 $j \in \{1, 2, 3\}$ 有 $X^{i_4-1} a_{i_4} X^{n-i_4}$ 和 $X^{i_j-1} a_{i_j} X^{n-i_j}$ 相交。由引理 2, $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}, X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 和 $X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 不同的选法共有 $\binom{k}{3} n$ 种。当选定 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}, X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 和 $X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 时, i_4 不同的选法有 $n-1$ 种, a_{i_4} 可在 N_{k-1} 中任取。因此情形(4)共有 $\binom{k}{3} n(n-1)k$ 种。由引理 4, 对于任意的 $j \in \{1, 2, 3\}$, $|V(X^{i_4-1} a_{i_4} X^{n-i_4}) \cap V(X^{i_j-1} a_{i_j} X^{n-i_j})| = k^{n-2}$ 。从而可知, 这样的 4 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $4k^{n-1} - 3k^{n-2}$ 个顶点。

针对情形(5), 如图 2(e) 所示, 不妨设 $i_1 = i_2$ 且 $i_3 = i_4$ 。

由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知, $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_2-1} a_{i_2} X^{n-i_2}$ 不相交, $X^{i_3-1} a_{i_3} X^{n-i_3}$ 和 $X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 不相交, 对于任意的 $l \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4\}, X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}$ 和 $X^{i_j-1} a_{i_j} X^{n-i_j}$ 相交. i_1 和 i_3 不同的选法有 $\binom{n}{2}$ 种. 当选定 i_1 和 i_3 时, a_{i_1} 和 a_{i_2} 不同的选法有 $\binom{k}{2}$ 种, a_{i_3} 和 a_{i_4} 不同的选法有 $\binom{k}{2}$ 种. 因此, 情形(5)共有 $\binom{n}{2} \binom{k}{2} \binom{k}{2}$ 种. 根据引理 4, 对于任意的 $l \in \{1, 2\}$ 和 $j \in \{3, 4\}, |V(X^{i_1-1} a_{i_1} X^{n-i_1}) \cap V(X^{i_j-1} a_{i_j} X^{n-i_j})| = k^{n-2}$. 从而可知, 这样的 4 个 Q_{n-1}^k 子网络共有 $4k^{n-1} - 4k^{n-2}$ 个顶点. 引理 8 证毕.

易证, 这 5 种情形共有 $\binom{k}{4} n + \binom{n}{4} k^4 + \binom{k}{2} n \binom{n-1}{2} k^2 + \binom{k}{3} n(n-1)k + \binom{n}{2} \binom{k}{2} \binom{k}{2} = \binom{nk}{4}$ 种.

注意到式(1)右端第 5 项为正数, 通过计算式(1)右端前 4 项的和可以给出 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的一个下界.

定理 1 设 $n \geq 3$ 为整数, $k \geq 3$ 为奇整数. 令 p 为 Q_n^k 中顶点的可靠性概率, 则有:

$$\begin{aligned} R_{n,n-1}^k(p) &\geq knp^{k^{n-1}} - \left[\frac{k(k-1)}{2} np^{2k^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} k^2 p^{k^n - k^{n-2}(k-1)^2} \right] + \left[\frac{k(k-1)(k-2)}{6} \right. \\ &np^{3k^{n-1}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} k^3 p^{k^n - k^{n-3}(k-1)^3} + \frac{n(n-1)}{2} k^2 (k-1) p^{3k^{n-1} - 2k^{n-2}} \left. \right] - \\ &\left[\frac{nk(k-1)(k-2)(k-3)}{24} p^{4k^{n-1}} + \frac{nk^4(n-1)(n-2)(n-3)}{24} p^{k^n - k^{n-4}(k-1)^4} + \right. \\ &\frac{nk^3(k-1)(n-1)(n-2)}{4} p^{4k^{n-1} - 5k^{n-2} + 2k^{n-3}} + \frac{nk^2(k-1)(k-2)(n-1)}{6} p^{4k^{n-1} - 3k^{n-2}} + \\ &\left. \frac{nk^2(k-1)^2(n-1)}{8} p^{4k^{n-1} - 4k^{n-2}} \right] \end{aligned}$$

证明: 由式(1)可知,

$$\begin{aligned} R_{n,n-1}^k(p) &\geq \sum_{i=1}^{nk} r_{(i)}(p) + (-1) \sum_{i,j=1,2,\dots,nk}^{i < j} r_{(i,j)}(p) + (-1)^2 \\ &\sum_{i,j,l=1,2,\dots,nk}^{i < j < l} r_{(i,j,l)}(p) + (-1)^3 \sum_{i,j,l,q=1,2,\dots,nk}^{i < j < l < q} r_{(i,j,l,q)}(p) \end{aligned}$$

由引理 2—引理 5, 上述不等式右端前 3 项的和为:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{nk} r_{(i)}(p) + (-1) \sum_{i,j=1,2,\dots,nk}^{i < j} r_{(i,j)}(p) + (-1)^2 \sum_{i,j,l=1,2,\dots,nk}^{i < j < l} r_{(i,j,l)}(p) \\ &= knp^{k^{n-1}} - \left[\frac{k(k-1)}{2} np^{2k^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} k^2 p^{k^n - k^{n-2}(k-1)^2} \right] + \\ &\left[\frac{k(k-1)(k-2)}{6} np^{3k^{n-1}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} k^3 p^{k^n - k^{n-3}(k-1)^3} + \frac{n(n-1)}{2} k^2 (k-1) p^{3k^{n-1} - 2k^{n-2}} \right] \end{aligned}$$

由引理 7 和引理 8 可知, 4 个 Q_{n-1}^k 子网络之间的不同相

交情形有且仅有 5 种(见图 2), 且有: 与情形(1)相对应的联合可靠性概率为 $\binom{k}{4} np^{4k^{n-1}}$; 与情形(2)相对应的联合可靠性概率为 $\binom{n}{4} k^4 p^{k^n - k^{n-4}(k-1)^4}$; 与情形(3)相对应的联合可靠性概率为 $\binom{k}{2} n \binom{n-1}{2} k^2 p^{4k^{n-1} - 5k^{n-2} + 2k^{n-3}}$; 与情形(4)相对应的联合可靠性概率为 $\binom{k}{3} n(n-1)k p^{4k^{n-1} - 3k^{n-2}}$; 与情形(5)相对应的联合可靠性概率为 $\binom{n}{2} \binom{k}{2} \binom{k}{2} p^{4k^{n-1} - 4k^{n-2}}$. 故:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j,l,q=1,2,\dots,nk}^{i < j < l < q} r_{(i,j,l,q)}(p) \\ &= \binom{k}{4} np^{4k^{n-1}} + \binom{n}{4} k^4 p^{k^n - k^{n-4}(k-1)^4} + \binom{k}{2} n \binom{n-1}{2} k^2 p^{4k^{n-1} - 5k^{n-2} + 2k^{n-3}} + \binom{k}{3} n(n-1)k p^{4k^{n-1} - 3k^{n-2}} + \\ &\binom{n}{2} \binom{k}{2} \binom{k}{2} p^{4k^{n-1} - 4k^{n-2}} \\ &= \frac{nk(k-1)(k-2)(k-3)}{24} p^{4k^{n-1}} + \frac{nk^4(n-1)(n-2)(n-3)}{24} p^{k^n - k^{n-4}(k-1)^4} + \\ &\frac{nk^3(k-1)(n-1)(n-2)}{4} p^{4k^{n-1} - 5k^{n-2} + 2k^{n-3}} + \frac{nk^2(k-1)(k-2)(n-1)}{6} p^{4k^{n-1} - 3k^{n-2}} + \\ &\frac{nk^2(k-1)^2(n-1)}{8} p^{4k^{n-1} - 4k^{n-2}} \end{aligned}$$

从而可知,

$$\begin{aligned} R_{n,n-1}^k(p) &\geq knp^{k^{n-1}} - \left[\frac{k(k-1)}{2} np^{2k^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} k^2 p^{k^n - k^{n-2}(k-1)^2} \right] + \left[\frac{k(k-1)(k-2)}{6} \right. \\ &np^{3k^{n-1}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} k^3 p^{k^n - k^{n-3}(k-1)^3} + \frac{n(n-1)}{2} k^2 (k-1) p^{3k^{n-1} - 2k^{n-2}} \left. \right] - \\ &\left[\frac{nk(k-1)(k-2)(k-3)}{24} p^{4k^{n-1}} + \frac{nk^4(n-1)(n-2)(n-3)}{24} p^{k^n - k^{n-4}(k-1)^4} + \right. \\ &\frac{nk^3(k-1)(n-1)(n-2)}{4} p^{4k^{n-1} - 5k^{n-2} + 2k^{n-3}} + \frac{nk^2(k-1)(k-2)(n-1)}{6} p^{4k^{n-1} - 3k^{n-2}} + \\ &\left. \frac{nk^2(k-1)^2(n-1)}{8} p^{4k^{n-1} - 4k^{n-2}} \right] \end{aligned}$$

定理 1 证毕.

引理 6 给出了 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的一个上界, 定理 1 给出了 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的一个下界, 利用 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的上下界的平均值可以给出 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的一个近似值, 即有如下结论成立.

定理 2 设 $n \geq 3$ 为整数, $k \geq 3$ 为奇整数. 令 p 为 Q_n^k 中顶点的可靠性概率, 则有:

$$\begin{aligned}
R_{n,n-1}^k(p) \approx & knp^{k^{n-1}} - \left[\frac{k(k-1)}{2} np^{2k^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} \right. \\
& \left. k^2 p^{k^n - k^{n-2}(k-1)^2} \right] + \left[\frac{k(k-1)(k-2)}{6} np^{3k^{n-1}} + \right. \\
& \left. \frac{n(n-1)(n-2)}{6} k^3 p^{k^n - k^{n-3}(k-1)^3} + \right. \\
& \left. \frac{n(n-1)}{2} k^2 (k-1) p^{3k^{n-1} - 2k^{n-2}} \right] - \\
& \frac{1}{2} \left[\frac{nk(k-1)(k-2)(k-3)}{24} p^{4k^{n-1}} + \right. \\
& \left. \frac{nk^4(n-1)(n-2)(n-3)}{24} p^{k^n - k^{n-4}(k-1)^4} + \right. \\
& \left. \frac{nk^3(k-1)(n-1)(n-2)}{4} p^{4k^{n-1} - 5k^{n-2} + 2k^{n-3}} + \right. \\
& \left. \frac{nk^2(k-1)(k-2)(n-1)}{6} p^{4k^{n-1} - 3k^{n-2}} + \right. \\
& \left. \frac{nk^2(k-1)^2(n-1)}{8} p^{4k^{n-1} - 4k^{n-2}} \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

3.2 Q_{n-1}^k 子网络搜寻算法

对于发生一定数目点故障的 Q_n^k ,下面给出一个在故障的 Q_n^k 中搜寻 Q_{n-1}^k 子网络的算法。

算法1 Q_{n-1}^k 子网络搜寻算法

输入:k元n方体 Q_n^k 以及 Q_n^k 中的一个故障点集 F

输出: Q_n^k 中无故障的 Q_{n-1}^k 子网络集合 S

1. 令 $S := \emptyset$
2. for $i=1$ to n do
3. $D_i := \{0, 1, \dots, k-1\}$
4. end for
5. while $F \neq \emptyset$ do
6. 选择一个点 $a_1 a_2 \dots a_n \in F$
7. for $i=1$ to n do
8. $D_i := D_i - \{a_i\}$
9. end for
10. $F := F - \{a_1 a_2 \dots a_n\}$

11. end while
12. for $i=1$ to n do
13. $S := S \cup \{X^{i-1} a_i X^{n-i} : a_i \in D_i\}$
14. end for
15. 返回 S

算法1的正确性可由以下两个结论直接得出:

(1)由引理1, Q_n^k 中任一个 Q_{n-1}^k 子网络可用某个 $X^{i-1} a_i X^{n-i}$ 唯一表示,其中 $1 \leq i \leq n, a_i \in N_{k-1}$ 为某一给定的整数。故 Q_n^k 中所有 Q_{n-1}^k 子网络的集合可表示为 $\{X^{i-1} a_i X^{n-i} : 1 \leq i \leq n, a_i \in N_{k-1}\}$ 。

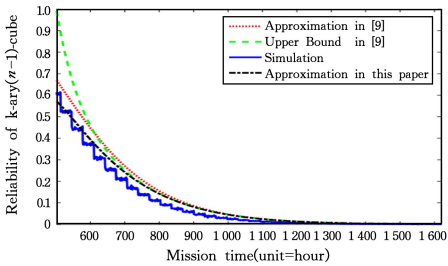
(2)由 Q_n^k 的子网络符号化表示的定义可知,点 $a_1 a_2 \dots a_n \in V(a_1 X^{n-1}) \cap V(a_2 X^{n-2}) \cap \dots \cap V(a_n X^{n-1})$ 。故点 $a_1 a_2 \dots a_n$ 发生故障将会破坏 Q_n^k 中 n 个 Q_{n-1}^k 子网络 $a_1 X^{n-1}, a_2 X^{n-2}, \dots, X^{n-1} a_n$ 。

给定 Q_n^k 及其故障点集 F,执行算法1。当算法1终止时,若 $S \neq \emptyset$,则 S 中各个元素所对应的 Q_{n-1}^k 子网络均为无故障的;若 $S = \emptyset$,则 Q_n^k 中不存在无故障的 Q_{n-1}^k 子网络。

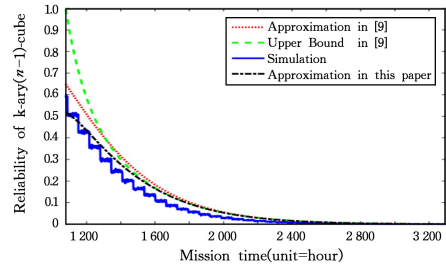
4 实验分析

4.1 Q_{n-1}^k 子网络的可靠性实验分析

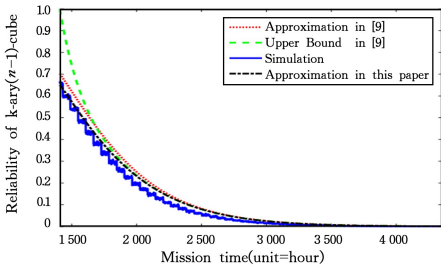
为了评估 Q_{n-1}^k 子网络可靠性理论结果的精确性,本节使用 MATLAB 对 Q_n^k 中 Q_{n-1}^k 子网络的可靠性进行仿真实验。选取不同规模的 Q_n^k ($n=5, 6, k=5, 7$) 为实验对象。假定 Q_n^k 中顶点的可靠性是独立同分布的,且均服从故障率为 λ 的指数分布。在任意时刻 t, Q_n^k 中顶点的可靠性为 $p = e^{-\lambda t}$, Q_n^k 中发生故障的顶点数为 $f = k^n (1 - e^{-\lambda t})$,按照文献[9]的方法通过随机生成 10000 次故障顶点集对这一时刻的 $R_{n,n-1}^k(p)$ 进行仿真,并将仿真结果与本文给出的 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的近似值(式(2))、文献[9]中给出的上界(引理6)和近似结果(文献[9]中的式(4))进行对比,具体结果如图3所示。



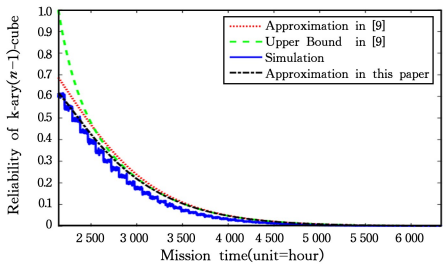
(a) $n=5, k=5, \lambda=10^{-5}/h$



(b) $n=6, k=5, \lambda=10^{-6}/h$



(c) $n=5, k=7, \lambda=10^{-6}/h$



(d) $n=6, k=7, \lambda=10^{-7}/h$

图3 Q_n^k 中 Q_{n-1}^k 子网络的可靠性分析结果

Fig. 3 Analysis results of Q_{n-1}^k reliability in Q_n^k

从图 3 可以看出,对于不同规模的 Q_n^k ,本文得出的近似值与仿真结果均更为接近,并且随着 p 逐渐减小,这一近似值与仿真结果趋于一致。这表明本文得出的 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的近似值是更为精确的。

4.2 Q_{n-1}^k 子网络搜寻算法实例

本节使用 C 语言实现算法 1,并且以 5 元 3 方体 Q_3^5 和 5 元 4 方体 Q_4^5 为例,通过随机生成不同规模的故障点集 F 对算法 1 进行测试,部分测试结果如表 1 和表 2 所列。实验结果表明,对于发生一定数目点故障的 Q_n^k ,若已知其全部故障点的具体分布,则算法 1 可以给出 Q_n^k 中所有无故障的 Q_{n-1}^k 子网络。

表 1 带有点故障的 Q_3^5 中无故障的 Q_2^5 子网络

Table 1 Fault-free Q_2^5 subnetworks in the Q_3^5 with node failures

Node failures	Fault-free Q_2^5 subnetworks
301,324	0XX,1XX,2XX,4XX,X1X, X3X,X4X,XX0,XX2,XX3
402,211,123,244,223	0XX,3XX,X3X,XX0
044,441,141,004,220	3XX,X1X,X3X,XX2,XX3
124,112,442,242,401, 103,324,110,011,321	X3X
020,433,301,211,133, 002,401,003,101,441, 140,342,313,404,321	∅

表 2 带有点故障的 Q_4^5 中无故障的 Q_3^5 子网络

Table 2 Fault-free Q_3^5 subnetworks in the Q_4^5 with node failures

Node failures	Fault-free Q_3^5 subnetworks
0211,1403,4230,0114	2XXX,3XXX,X0XX,X3XX, XX2X,XX4X,XXX2
1401,1330,0443,4032, 1014,0400,4420,0012	2XXX,3XXX,X1XX,X2XX
4101,3103,1402,1021, 0203,2121,1134,2332	XX1X,XX4X,XXX0
1401,2301,0003,3021, 1023,1140,1311,1014, 3134,0243,2314,1004	4XXX,XXX2
1134,1443,3032,2042, 3324,2111,4212,3000, 0003,1432,3144,3344, 2210,0222,1022,2334	∅

结束语 以具有优良性能的互连网络为底层拓扑结构设计高性能并行计算机系统已经成为高性能计算领域的一个发展趋势。互连网络的容错能力是衡量网络性能的关键指标。本文对概率故障条件下 Q_n^k 中 Q_{n-1}^k 子网络的可靠性 $R_{n,n-1}^k(p)$ 进行了研究。对于 $k \geq 3$ 为奇整数,首先给出了 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的一个下界,并结合已有上界得出了 $R_{n,n-1}^k(p)$ 的一个近似值。仿真实验表明,该近似值是较为精确的,该结论可以为设计以 Q_n^k 为底层拓扑的并行计算机系统提供理论参考。其次,提出了在发生点故障的 Q_n^k 中搜寻 Q_{n-1}^k 子网络的算法,这可以帮助工程师在基于 Q_n^k 构建的并行计算机系统中进行相关算法的设计与分析。

值得注意的是, $R_{n,n-1}^k(p)$ 的精确值的计算依赖于厘清更多 Q_{n-1}^k 子网络的不同相交情形。然而,随着 Q_{n-1}^k 子网络个数

的不断增加,这些子网络之间的相交情形将变得越来越复杂。对于 $m > 1$,概率故障条件下 $Q_n^k(k \geq 3$ 为奇整数)中 Q_{n-m}^k 子网络的可靠性是值得进一步研究的方向。

参考文献

- [1] CHANG Y, BHUYAN L. A combinatorial analysis of subcube reliability in hypercube[J]. IEEE Transactions on Computers, 1995, 44(7): 952-956.
- [2] WU X, LATIFI S. Substar reliability analysis in star networks [J]. Information Sciences, 2008, 178: 2337-2348.
- [3] LIN L, XU L, ZHOU S, et al. The reliability of subgraphs in the arrangement graph[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2015, 64(2): 807-818.
- [4] LI X, ZHOU S, XU X, et al. The reliability analysis based on subsystems of (n, k)-star graph[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2016, 65(4): 1700-1709.
- [5] MAO W, NICOL D M. On k-ary n-cubes: theory and applications[J]. Discrete Applied Mathematics, 2003, 129(1): 171-193.
- [6] ANDERSON E, BROOKS J, GRASSL C, et al. Performance of the CRAY T3E Multiprocessor[C]// Proceedings of the 1997 ACM/IEEE Conference on Supercomputing. New York: ACM Press, 1997: 1-17.
- [7] ADIGA N R, BLUMRICH M A, CHEN D, et al. Blue Gene/L torus interconnection network[J]. IBM Journal of Research and Development, 2005, 49(2/3): 265-276.
- [8] CHEN X-B. Paired 2-disjoint path covers of faulty k-ary n-cubes [J]. Theoretical Computer Science, 2016, 609: 494-499.
- [9] FENG K, JI Z, WEI W. Subnetwork reliability analysis in k-ary n-cubes[J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 267: 85-92.
- [10] LV Y, FAN J, HSU D F, et al. Structure connectivity and substructure connectivity of k-ary n-cube networks[J]. Information Sciences, 2018, 433/434: 115-124.
- [11] LIU A, WANG S, YUAN J, et al. The h-extra connectivity of k-ary n-cubes[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 784: 21-45.
- [12] WANG S, ZHANG G, FENG K. Fault tolerance in k-ary n-cube networks[J]. Theoretical Computer Science, 2012, 460: 34-41.
- [13] YANG Y, LI J, WANG S. Embedding various cycles with prescribed paths into k-ary n-cubes[J]. Discrete Applied Mathematics, 2017, 220: 161-169.
- [14] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory[M]. New York: Springer, 2008: 1-450.
- [15] SANE S. Combinatorial Techniques[M]. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016: 57-79.



FENG Kai, born in 1987, Ph.D, associate professor, master supervisor, is a member of China Computer Federation. His main research interests include fault-tolerance of interconnection network, graph theory and its applications.