计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.200300023

顶点序下图的支配集算法

王 洪 官礼和
重庆交通大学数学与统计学院 重庆 400074
(695949772@qq.com)

摘 要 文中将粗糙集理论中的属性序引入到图论中,研究顶点序下图的支配集问题。首先,在图的顶点集上定义一个全序关系,称为顶点序。然后,利用顶点序定义一个二元等价关系,得到图中所有顶点闭邻接集的一个划分。最后,基于该划分设计了一种顶点序下图的极小支配集算法。同时,证明了该算法在给定顶点序下求解极小支配集的完备性和唯一性,并通过实例分析验证了所提算法的正确性和有效性。

关键词:支配集;顶点序;算法完备性;算法唯一性
中图法分类号 TP18

Dominating Set Algorithm for Graphs Based on Vertex Order

WANG Hong and GUANG Li-he
School of Mathematics and Statistics,Chongqing Jiaotong University,Chongqing 400074,China

Abstract This paper introduces the attribute order in rough set theory into graph theory,and studies the dominating set problem of undirected graphs based on vertex order. First,a total order relation is defined on the vertex set of graph,which is called vertex order. Then,a binary equivalence relation is defined by using the vertex order,and a partition of closed sets of all vertices in graph is obtained. Finally,based on the partition,a minimal dominating set algorithm for graphs under vertex order is designed. At the same time,it proves the completeness and uniqueness of this algorithm for solving the minimum dominating set under a given vertex order. An example is used to show the correctness and effectiveness of the algorithm.

Keywords Dominating set,Vertex order,Algorithm completeness,Algorithm uniqueness

1 引言

图的支配集及其扩展问题,如最小支配集、最小加权支配集、最小连通支配集、最小点覆盖、最大独立集等,是图论中的经典NP完全问题[1],在多文档摘要[2]、社会网络[3]、无线传感器网络[4]、车辆无线自组织网络[5]、经济网络[6]等领域有着广泛的应用。求解这些问题的精确算法[7-9]对小规模问题能快速得到准确的解,但对大规模问题其求解的时间和空间复杂度太高。因此,越来越多的学者开始研究图的支配集及其扩展问题的近似算法。目前,已有的近似算法大致可分为:启发式近似算法[1,10-12]、分布式构造算法[13-14]、动态更新算法[15-16]等。针对块图[17]、轮图[18]、赋权图[19]等广义图中的支配集及其扩展问题也提出了一些近似算法。近似算法虽然能获得较好近似比的结果,但其算法的完备性和唯一性不能保证。Haynes等提出了利用一个布尔函数进行逻辑运算求解图的所有极小支配集的方法[20]。

近年来,许多学者将粗糙集理论[21]和图论进行对比研究,并将图论中的支配集问题转换为粗糙集理论中的属性约简问题进行求解并获得了成功[22-29]。如,Wang等基于覆盖粗糙集研究了图论中的点覆盖、独立集、边覆盖和匹配等问题[22];Cattaneo利用形式概念分析和粗糙集理论来研究了超图[23];Xu等基于广义粗糙集理论研究了有向图的强连通分支求解方法[24];针对图的最小点覆盖问题,Chen等先后提出了基于信息熵[25]和基于正域[26]的启发式算法,Xu等则利用多关系粒计算模型提出了基于信息熵的启发式算法[27];Tan等提出了基于决策表正域的启发式最小完全支配集算法[28]和基于信息熵的启发式最小支配集算法[29]。但这些算法未讨论在不同的顶点序下对应的极小支配集,同时也未提及顶点序与极小支配集之间的对应关系,本文将对顶点序下的极小支配集求解问题展开研究。

在粗糙集理论中,Wang等于2001年首次提出了属性序的概念[30],此后属性序的概念在决策表的Pawlak约简和决策规则挖掘算法中得到了应用[31-33]。该方法在给定的属性序下能得到唯一的属性约简。同理,在支配集问题中,给定一个顶点序,该顶点序是否对应着唯一的一个极小支配集。本文将该方法应用于图的支配集问题求解,基本思想是:对于给定的无向图G,设S表示以每个顶点的闭邻接集为元素的集合,简称为顶点闭邻接集;在顶点集上定义一个全序关系O,

本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。
基金项目:国家自然科学基金项目(61573076);重庆市科委项目(cstc2015shmszx30004)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61573076) and Chongqing ScienceTechnology Commission Project (cstc2015shmszx30004).
通信作者:官礼和(guanlihe@cqjtu.edu.cn)

进而定义 S 上的一个二元等价关系 $R(O)$，将 S 划分为若干等价类；基于该划分设计顶点序下的极小支配集算法。对于给定的顶点序，该方法能得到图的一个极小支配集，且相对于顶点序是唯一的。

2　无向图及其支配集

设 $G=(V,E)$ 表示顶点集为 V 和边集为 E 的无向图，本文讨论的图均指无向图。连接一对顶点的多条边称为重边，连接同一个顶点的边称为环。顶点 $v\in V$ 的闭邻接集 $N[v]=\{u\in V|(u,v)\in E\}\cup\{v\}$，记 $S=\{N[v]|v\in V\}$ 表示图 G 的顶点闭邻接集集合。若 $N[v]=\{v\}$，则称 v 为孤立点。

定义 1[29]　给定图 G 和 $D\subseteq V$。若对 $\forall v\in V-D$，都 $\exists u\in D$，使得 $(u,v)\in E$，则称 D 为图 G 的支配集；若对 D 的任何真子集都不是图 G 的支配集，则称 D 为图 G 的极小支配集；若不存在支配集 D^* 使得 $|D^*|<|D|$，则称 D 为图 G 的最小支配集；图 G 的所有极小支配集的交集称为核支配集，核支配集中的顶点称为核支配点。

定义 2　给定图 G，$D\subseteq V$，$u\in D$。记 $S^*=\{\alpha\in S|\alpha\cap(D-\{u\})=\emptyset\}$，如果 $S^*\neq\emptyset$，则称 u 在 D 中是独立的，否则是依赖的。若 $\forall u\in D$ 在 D 中都是独立的，则称 D 是独立的，否则是依赖的。

对图 G 的极小支配集有如下等价定义。

定义 3　给定图 G，则顶点子集 $D\subseteq V$ 是图 G 的极小支配集当且仅当同时满足如下两个条件：

(1)对 $\forall v\in V-D$，都 $\exists u\in D$，使得 $(u,v)\in E$；

(2)对 $\forall u\in D$，都 $\exists v\in V$ 使得 $N[v]\cap D=\emptyset$。

注意：条件(1)仅能保证 D 为支配集，不能保证 D 是极小支配集，且有两种等价描述：1) $\forall v\in V$ 有 $D\cap N[v]\neq\emptyset$；2) $\{\alpha\in S|\alpha\cap D=\emptyset\}=\emptyset$。依据定义 2 可知，条件(2)等价于“$D$ 是独立的”。因此，$D\subseteq V$ 是图 G 的极小支配集的充要条件为“$\{\alpha\in S|\alpha\cap D=\emptyset\}=\emptyset$ 且 D 是独立的”。

例 1　图 1 是一个无向图 $G=(V,E)$，其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$，$v_5$ 是唯一的孤立点，e_2 与 e_3 是一组重边，e_6 是环。

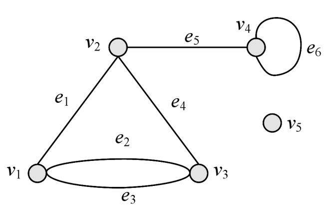

图 1　一个无向图 G

Fig. 1　Undirected grap G

在图 G 中，$N[v_1]=\{v_1,v_2,v_3\}$，$N[v_2]=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$N[v_3]=\{v_1,v_2,v_3\}$，$N[v_4]=\{v_2,v_4\}$，$N[v_5]=\{v_5\}$。顶点子集 $D=\{v_1,v_2,v_5\}$，显然对 $\forall v\in V$ 有 $D\cap N[v]\neq\emptyset$，因此 D 是图 G 的支配集。又由于 $\forall v\in V$ 有 $(D-\{v_1\})\cap N[v]\neq\emptyset$，即 v_1 在 D 中是不独立的，从而 D 是不独立的，因此 D 不是图 G 的极小支配集。

为了求得图 G 的所有极小支配集，Haynes 给出了一种方法，即利用吸收律和分配律进行等值演算得到如下定义的布尔函数[20]。

定义 4[20]　给定图 G，设顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，则布尔函数 f_G 定义为：

$$\begin{aligned} f_G(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_n^*) &= \wedge\{\vee\alpha|\alpha\in S\} \\ &= \wedge\{\vee N[v]|v\in V\} \end{aligned}$$

其中，$v_1^*,v_2^*,\cdots,v_n^*$ 是对应于顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的布尔变量，$\vee N[v]$ 表示 $N[v]$ 中所有顶点 v 对应布尔变量 v^* 的析取。在本文的后续讨论中，将不区分 v_i^* 和 v_i。

引理 1[20]　给定图 G 和 $D\subseteq V$，则 D 是图 G 的极小支配集当且仅当 $\wedge_{v\in D}v$ 是布尔函数 $f_G(v_1,v_2,\cdots,v_2)$ 的析取范式中的一项简单合取式。

引理 1 表明，图 G 的所有极小支配集与布尔函数 $f_G(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 的析取范式中的每个简单合取式一一对应，表达式如下：

$$f_G(v_1,\cdots,v_n)=\wedge\{\vee N[v]|v\in V\}=\bigvee_{i=1}^{p}(\bigwedge_{j=1}^{q_i}v_{t_j})$$

其中，$\bigwedge_{j=1}^{q_i}v_{t_j}$，$i=1,2,\cdots,p$，$1\leqslant t_j\leqslant n$，是布尔函数 $f_G(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 的析取范式中所有的简单合取式。于是，图 G 的所有极小支配集为：$D_i=\{v_{t_j}|j=1,2,\cdots,q_i\}$，$i=1,2,\cdots,p$ 。

推论 1　给定图 G 和顶点 $v\in V$，则 v 是 G 的核支配点当且仅当 v 是 G 的孤立点。

证明：v 是 G 的孤立点等价于 $N[v]=\{v\}$，由式(2)可知 v 必在图 G 的一个极小支配集中，即 v 是 G 的核支配点。反之亦然。

推论 2　给定图 G 和边 $e\in E$，若 e 是图 G 的重边或者环，则图 G 和图 $G-e$ 的所有极小支配集都相同。

证明：无论 e 在图 G 中是环还是存在边 $e^*\in E$ 与 e 构成重边，对 $\forall v\in V$ 在图 G 和 $G-e$ 中的闭邻接集 $N[v]$ 保持相同。由式(1)可知，图 G 和图 $G-e$ 有相同的布尔函数。根据引理 1，图 G 和图 $G-e$ 的所有极小支配集都相同。

推论 2 表明，在图 G 中添加或删除一条重边或环，图 G 的任何极小支配集将保持不变，从而最小支配集也将保持不变。

例 2　在例 1 中，图 G 的布尔函数为：

$$\begin{aligned} f_G(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5) &= (\vee N[v_1])\wedge(\vee N[v_2])\wedge\cdots\wedge(\vee N[v_5]) \\ &= (v_1\vee v_2\vee v_3)\wedge(v_1\vee v_2\vee v_3\vee v_4)\wedge(v_1\vee v_2\vee v_3)\wedge(v_2\vee v_4)\wedge v_5 \end{aligned}$$

利用吸收率和分配律化简后，得到 f_G 的析取范式为：

$$f_G(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=(v_2\wedge v_5)\vee(v_1\wedge v_4\wedge v_5)\vee(v_3\wedge v_4\wedge v_5)$$

从而，图 G 有 3 个极小支配集 $D_1=\{v_2,v_5\}$，$D_2=\{v_1,v_4,v_5\}$ 和 $D_3=\{v_3,v_4,v_5\}$。其中 D_1 是图 G 的唯一最小支配集，孤立点 v_5 是唯一的核支配点，且 $D_1\cap D_2\cap D_3=\{v_5\}$。

3　顶点序下的支配集

本节将在图的顶点集上定义一个全序关系，称为顶点序。根据该顶点序，在顶点闭邻接集集合上定义二元等价关系。由此，提出一种顶点序下的极小支配集算法，并证明该算法的完备性和唯一性。

3.1　顶点序下的支配集算法

定义 5　给定 n 阶图 G，在顶点集 V 上定义一个全序关系“$\prec$”，将 V 中所有顶点分别标上 1 到 n 的整数，进而得到 V 上的一个顶点序列，简称为顶点序，记为：

$O: v_1 \prec v_2 \prec \cdots \prec v_n$

$S=\{N[v] \mid v\in V\}$是以图中顶点的闭邻接集为元素的集合，对$\forall \delta\in S$，δ中的顶点从左到右继承着顶点序O。例如：$\delta=v_jB$，$v_j\in V$，$B\subseteq V$，v_j是在顶点序O下δ的第一个顶点，并称v_j为δ的标签顶点。

基于顶点序O在S上定义一个二元关系如下：

$R(O)=\{(\delta_1,\delta_2)\mid \delta_1,\delta_2\in S$且$\delta_1$与$\delta_2$的标签顶点相同$\}$，容易验证：$R(O)$是$S$上的等价关系，且将$S$划分为多个等价类，用商集来表示该划分为$S/R(O)=\{[v_1],[v_2],\cdots,[v_n]\}$。当$i\neq j$时，$[v_i]\cap[v_j]=\varnothing$，因而这个划分是唯一的。因此，$\forall \delta\in S$，$\delta\in[v_i]$且$\delta\notin[v_j](i\neq j)$，即$S$中的每个元素（顶点的闭邻接集）只属于一个等价类，且由它的标签顶点决定。显然，每个等价类能被标签顶点唯一表示。因此，该划分可以用标签顶点的下标来简单表示，即$S/R(O)=\{[1],[2],\cdots,[n]\}$。

依据顶点序O和划分$S/R(O)$，一种顶点序下的极小支配集算法如算法1所示。

算法1 顶点序下的支配集算法（*MDA_Oder*）

输入：n阶图G=(V,E)，顶点序O：$v_1\prec v_2\prec\cdots\prec v_n$

输出：顶点序O下的支配集D

Step1 令D=∅，$S=\{N[v_i]\mid i=1,2,\cdots,n\}$，其中$N[v_i]=\{v_j\in V\mid (v_j,v_i)\in E\}\cup\{v_i\}$。

Step2 若S=∅，则转Step6；否则转Step3。

Step3 令$\{[S/R(O)]\}=\{i\mid[i]\neq\varnothing,[i]\in S/R(O)\}$，计算$k=\max\{[S/R(O)]\}$。

Step4 v_k是一个新的支配点，令$D=D\cup\{v_k\}$。

Step5 计算$S^*=\{\alpha\in S\mid \alpha\cap\{v_k\}=\varnothing\}$，$S=S^*$，转Step2。

Step6 输出顶点序O下的支配集D，算法结束。

在算法1的Step3中，$\{[S/R(O)]\}$表示划分$S/R(O)$中所有非空等价类的标签顶点的下标集合，而$k=\max\{[S/R(O)]\}$则表示其中的最大下标，$1\leqslant k\leqslant n$。每次迭代都从划分$S/R(O)$的非空等价类中选择下标最大的标签顶点成为新的支配点，并将其加入到D中，然后更新S，即从S中删除包含有新支配点的元素，直到$S=\varnothing$。

算法1的时间复杂度分析如下：设图G有n个顶点和m条边，Step1扫描每一条边即可得到每个顶点的闭邻接集，故其时间复杂度为$O(m)$。Step2到Step3仅需扫描每个顶点的闭邻接集即可得到顶点序下的划分$S/R(O)=\{[1],[2],\cdots,[n]\}$，同时找到最大非空标签顶点类的标号$k$，其时间复杂度为$O(n)$。Step4和Step5将满足条件的$v_k$并入支配集$D$中，并更新闭邻接集合$S$，其时间复杂度为$O(n)$。因此，算法1的时间复杂度为$O(\max(n,m))$，远低于文献[28]中基于决策表正域的最小完全支配集算法的复杂度$O(n^4)$。

为了证明算法1的完备性，先证明两个引理。

引理2 假定$[s],[t]\in S/R(O)$，其标签顶点分别为v_s，v_t。如果$s<t$，则对$\forall\gamma\in[t]$有$\{v_s\}\cap\gamma=\varnothing$，即$v_s\notin\gamma$。

证明：对于$\forall\gamma\in[t]$，根据$[t]$的定义，对$\forall v_k\in\gamma$有$t\leqslant k$。由于$s<t$，因此有$s<t\leqslant k$，$[t]$中所有元素都不包含$[s]$中元素的标签顶点v_s，故$\{v_s\}\cap\gamma=\varnothing$成立。

引理2表明，在算法1的Step5中，如果等价类的标签顶点的下标大于新成为支配点v_k的下标k，则这些等价类中的任何元素不会因为新加入的支配点v_k而被删除。

引理3 给定图G和顶点序O，D是算法1的解，$S=\{N[v]\mid v\in V\}$是图G的顶点闭邻接集集合，$N=\max\{[S/R(O)]\}$，则v_N在D中是独立的。

证明：依据算法1的Step4可知，$v_N\in D$。令$S'=\{\alpha\in S\mid \alpha\cap(D-\{v_N\})=\varnothing\}$。对于$\forall v_k\in D-\{v_N\}$，由算法1和$v_N$的定义有$k<N$。由引理2知，对$\forall\beta\in[N]$有$\{v_k\}\cap\beta=\varnothing$。由$v_k$的任意性知，对$\forall\beta\in[N]$有$\beta\cap(D-\{v_N\})=\varnothing$。因此，$\varnothing\neq[N]\subseteq S'$，进而$S'\neq\varnothing$。由定义2知，$v_N$在$D$中是独立的。

引理3表明，在按算法1计算支配集D时，与$\max\{[S/R(O)]\}$相关的标签顶点在D中是独立的。

3.2 算法1的完备性

在算法1的Step5中，删除的非空等价类中的元素和S中的等价类都是有限的，因此算法1在有限次迭代后必有$S=\varnothing$。因此，算法1终止时，由定义3中的条件(1)可知，算法1的解D是图G的支配集。

事实上，算法1的计算过程给出了一个关于图G的顶点闭邻接集集合S的序列$S_0,S_1,\cdots,S_k$，并且通过序列中的每个S_i都能找出唯一的支配点v_i。从而，有一个对应的支配点序列$v_0,v_1,\cdots,v_{k-1}$，它们在顶点序O中的标签分别为n_0，$n_1,\cdots,n_{k-1}$，有$n_0>n_1>\cdots>n_{k-1}$。此外，$S_{j+1}=S_j-E_j$，其中$E_j=\{\alpha\in S_j\mid\alpha\cap\{v_j\}\neq\varnothing\}$，$S_0=S$，$S_k=\varnothing$，$j=0,1,\cdots,k-1$。

定理1 给定图G和顶点序O，算法1对极小支配集是完备的。

证明：由于算法1停止时，输出的解D必须满足$S^*=\{\alpha\in S\mid\alpha\cap D=\varnothing\}=\varnothing$，其中$S=\{N[v]\mid v\in V\}$是图$G$的顶点闭邻接集集合。进而依据定义3中的条件(1)可知，D是图G的支配集。为了证明D是极小支配集，仅须证明D是独立的。

记$n_0=\max\{[S_0/R(O)]\}$，由引理3可知v_0在D中是独立的。不妨假定支配点集$Q=\{v_0,v_1,\cdots,v_{p-1}\}$中的每个顶点在$D$中都是独立的。如果$S_p=S_k=\varnothing$，则$D=Q$，定理得证，否则仅须证明$v_p$在$D$中是独立的。

如果$S_p\neq\varnothing$，则$n_p=\max\{[S_p/R(O)]\}$，$v_p\in D$，$n_p<n_{p-1}<\cdots<n_0$。反证法，如果v_p在D中不是独立的，则依据定义2有$\{\alpha\in S\mid\alpha\cap(D-\{v_p\})=\varnothing\}=\varnothing$。因为$[n_p]\subseteq S_p\subseteq S$，所以$\{\alpha\in[n_p]\mid\alpha\cap(D-\{v_p\})=\varnothing\}=\varnothing$，即在$S_p$中对$\forall\beta\in[n_p]$，$\beta\cap Q\neq\varnothing$和$\beta\cap\{v_{p+1},v_{p+2},\cdots,v_{k-1}\}\neq\varnothing$二者必有一个成立。由引理2，一定有$\beta\cap\{v_{p+1},v_{p+2},\cdots,v_{k-1}\}=\varnothing$。因此，只有$\beta\cap Q\neq\varnothing$成立，即在$S_p$中对$\forall\beta\in[n_p]$都有$\beta\cap Q\neq\varnothing$。依据算法1的Step5可知，在$S_p$中有$[n_p]=\varnothing$。然而，$n_p=\max\{[S_p/R(O)]\}$，在$S_p$中有$[n_p]\neq\varnothing$，矛盾。因此，$v_p$在$D$中是独立的，定理得证。

定理1表明，对于给定的图和顶点序，算法1得到的解是极小支配集。顶点序可以视为用户对其偏好的一种表示，因此这对基于图的机器学习是一个很重要的性质。

3.3 算法1的唯一性

下面对算法1的唯一性定理进行证明。

定理2 给定图G，相对于顶点序O，算法1的结果是唯一的。

证明：由定理1可知，算法1的解是极小支配集。在算法1的迭代计算过程中，给出的关于图G的顶点闭邻接集集合S的序列为$S_0,S_1,\cdots,S_k$，$S_0=S$，$S_k=\varnothing$，其中的每一个S_i能被算法1和定义3中条件(1)唯一确定。因此，$n_j=\max\{[S_j/R(O)]\}$，等价类$[n_j]$和标签顶点v_j都是唯一的，$j=0,1,\cdots,$

$k-1$。从而，形成的支配点序列 $v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}$ 也被唯一确定。因此，由算法 1 得到的结果 $D=\{v_0, v_1, \cdots, v_{k-1}\}$ 是唯一的。定理得证。

事实上，以往的各种启发式支配集算法[1,10-12]采用的是顶点集 V 上的部分序，而不是算法 1 中采用的全序。因此，这些近似算法很难保证其结果是极小支配集和其结果的唯一性。

为了更好地理解算法 1，下面给出一个例子。

例 3　在例 1 中，假定顶点序 $O: v_1 \prec v_2 \prec v_3 \prec v_4 \prec v_5$。图 G 中每个顶点的闭邻接集为：$N[v_1]=\{v_1, v_2, v_3\}$，$N[v_2]=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，$N[v_3]=\{v_1, v_2, v_3\}$，$N[v_4]=\{v_2, v_4\}$，$N[v_5]=\{v_5\}$。从而 $S=\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_5\}\}$。计算 $k=\max\{1,2,5\}=5$，从而 $D=\{v_5\}$。计算 $S^*=\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$，$S=S^* \neq \emptyset$，进而 $k=\max\{[S/R(O)]\}=\max\{1,2\}=2$，$D=\{v_2, v_5\}$。此时，$S^*=\emptyset$，从而 $S=\emptyset$，输出极小支配集 $D=\{v_2, v_5\}$，算法结束。

同理，依据不同的顶点序，利用算法 1 可以得到相应的唯一极小支配集。

(1) $O: v_2 \prec v_1 \prec v_3 \prec v_4 \prec v_5$

$S/R(O)=\{\{v_2 v_1 v_3, v_2 v_1 v_3 v_4, v_2 v_4\}, \{v_5\}\}$，$D=\{v_2 v_5\}$；

(2) $O: v_3 \prec v_4 \prec v_1 \prec v_2 \prec v_5$

$S/R(O)=\{\{v_3 v_1 v_2, v_3 v_4 v_1 v_2\}, \{v_4 v_2\}, \{v_5\}\}$，$D=\{v_3 v_4 v_5\}$；

(3) $O: v_1 \prec v_4 \prec v_3 \prec v_2 \prec v_5$

$S/R(O)=\{\{v_1 v_3 v_2, v_1 v_4 v_3 v_2\}, \{v_4 v_2\}, \{v_5\}\}$，$D=\{v_1 v_4 v_5\}$。

容易验证，上面的极小支配集都是独立的。根据定理 2，给定一个顶点序，基于算法 1 的极小支配集是唯一的。但是，顶点序与极小支配集之间的关系仅是一个映射关系，但不是一一映射。

结束语　任意图的最小支配集是一个 NP 完全问题。精确算法主要是利用分支简化策略、复杂度分析和测度分析等技术降低其复杂度，同时讨论支配数的上下限问题，可为近似算法设计提供理论指导，以避免去追求一些理论上已经证明不可能达到的近似度。近似算法主要采用启发式信息、分布式构造和动态搜索等技术进行设计，能获得较好的近似度，但其算法的完备性和唯一性很难保证。近年来，用其他方法或形式（如粗糙集理论）来等价描述图论中的支配集及其扩展问题，以便找到其他有效的解决方法，已成为另一个研究热点。

本文针对无向图的支配集问题，在顶点集上事先定义一个顶点序，由此设计了一种顶点序下的极小支配集算法，该算法不仅对图的极小支配集是完备的，而且相对于顶点序其结果是唯一的。显然，事先定义的顶点序是算法获得成功的关键。值得注意的是，本文方法和结果表明：从图的顶点序空间到极小支配集空间之间存在一个映射，即：

$$D=\mathrm{Minimal\_ds}(S, O)$$

其中，$S=\{N[v] \mid v \in V\}$ 表示以图 G 中顶点的闭邻接集为元素的集合，是图 G 的一种简单描述。由例 3 可见，这个映射不是顶点序空间到极小支配集空间的一一映射。由此，顶点集上的顶点序对图论的研究具有重要的理论意义。研究这种映射的性质及其在最小支配集、最小加权支配集、最小连通支配集等支配集扩展问题中的应用是我们今后的工作之一。此外，如何根据实际需要（如支配点设置的难易程度、成本代价、实时性以及领域用户的需求和兴趣等）来定义顶点序，实现面向领域用户需求的图挖掘算法是我们今后的另一个主要工作。

参 考 文 献

[1] PAREKH A K. Analysis of a greedy heuristic for finding small dominating sets in graphs [J]. Information Processing Letters, 1991, 39(5): 237-240.

[2] SHEN C, LI T. Multi-document summarization via the minimum dominating set [C]// Proceedings of the 23rd International Conference on Computational Linguistics. Association for Computational Linguistics, Stroudsburg, PA, USA, 2010: 984-992.

[3] DINH T N, SHEN Y, NGUYEN D T, et al. On the approximability of positive influence dominating set in social networks [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2014, 27(3): 487-503.

[4] BORIA N, MURAT C, PASCHOS V T. The probabilistic minimum dominating set problem [J]. Discrete Applied Mathematics, 2018, 234: 93-113.

[5] CHINNASAMY A, SIVAKUMAR B, SURESH A, et al. Minimum connected dominating set based RSU allocation for smartCloud vehicles in VANET [J]. Cluster Computing, 2019, 22: S12795-S12804.

[6] HANAKA T, NISHIMURA N, ONO H. On directed covering and domination problems [J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 259: 76-99.

[7] LU G, ZHOU M T, TANG Y, et al. A survey on exact algorithms for dominating set related problems in arbitrary graphs [J]. Chinese Journal of Computer, 2010, 33(6): 121-135.

[8] LIN M C, MIZRAHI M J, SZWARCFITER J L. Exact algorithms for minimum weighted dominating induced matching [J]. Algorithmica, 2017, 77(3): 642-660.

[9] ZHOU X Q, YE A S, ZHANG Z Q. Exact algorithm for connected dominating set in undirected graphs [J]. Application Research of Computers, 2019, 36(9): 2569-2574.

[10] LIN G, ZHU W X, ALI M M. An effective hybrid memetic algorithm for the minimum weight dominating set problem [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(6): 892-907.

[11] ABED S A, RAIS H M. Hybrid bat algorithm for minimum dominating set problem [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 33(4): 2329-2339.

[12] YUAN F Y, LI C X, GAO X, et al. A novel hybrid algorithm for minimum total dominating set problem [J]. Mathematics, 2019, 7(3): 222-232.

[13] JIA L J, RAJARAMAN R, SUEL T. An efficient distributed algorithm for constructing small dominating sets [J]. Distributed Computing, 2002, 15(4): 193-205.

[14] JALLU R K, PRASAD P R, DAS G K. Distributed construction of connected dominating set in unit disk graphs [J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2017, 104: 159-166.

[15] HJULER N, ITALIANO G F, PAROTSIDIS N, et al. Dominating sets and connected dominating sets in dynamic graphs [C]// Proceedings of the 36th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2019). Editors: Niedermeier R and Paul C, 2019: 1-35.

[16] BOYAR J, EIDENBENZ S J, FAV RHOOLDT LM, et al. Online dominating set [J]. Algorithmica, 2019, 81: 1938-1964.
[17] PRADHAN D, JHA A. On computing a minimum secure dominating set in block graphs [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2018, 35: 613-631.
[18] ADAWIYAH R, AGUSTIN I H, DAFIK, et al. Related wheel graphs and its locating edge domination number [J]. Journal of Physics Conference Series, 2018, 1022: 1-8.
[19] SUKHAMAY K. Relationship between optimal k-distance dominating sets in a weighted graph and its spanning trees [J]. Information Processing Letters, 2019, 147: 3-5.
[20] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Fundamentals of domination in graphs [M]. New York, USA: Marcel Dekker, 1998.
[21] PAWLAK Z. Rough sets [J]. International Journal of Information & Computer Sciences, 1982, 11: 341-356.
[22] WANG S P, ZHU Q X, ZHU W, et al. Equivalent characterizations of some graph problems by covering-based rough sets [J]. Journal of Applied Mathematics, 2013, 2013: 1-7.
[23] CATTANEO G, CHIASELOTTI G, CIUCCI D, et al. On the connection of hypergraph theory with formal concept analysis and rough set theory [J]. Information Sciences, 2016, 330(2): 342-357.
[24] XU T H, WANG G Y. Finding strongly connected components of simple digraphs based on generalized rough sets theory [J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 149: 88-98.
[25] CHEN J K, LIN Y J, LIN G P, et al. The relationship between attribute reducts in rough sets and minimal vertex covers of graphs [J]. Information Sciences, 2015, 325: 87-97.
[26] CHEN J K, LIN Y J, LI J J, et al. A rough set method for the minimum vertex cover problem of graphs [J]. Applied Soft Computing, 2016, 42: 360-367.
[27] XU Q Y, TAN A H, LI J J. A rough set method for the vertex cover problem in graph theory [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2016, 30: 2003-2013.
[28] TAN A H, TAO Y Z, WANG C. A rough-set based solution of the total domination problem [C] // Polkowski L. et al. (eds) Rough Sets. IJCRS 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol 10313, Springer, Cham, 2017: 131-139.
[29] TAN A H, LI J J, CHEN J K, et al. An Attribute Reduction Method Based on Rough Sets for Dominating Sets of Graph [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2015, 28(6): 507-512.
[30] WANG J, WANG J. Reduction algorithms based on discernibility matrix: The order attributes method [J]. Journal of Computer Science and Technology, 2001, 16(6): 489-504.
[31] HU F, WANG G Y. Quick reduction algorithm basedon attributes order [J]. Chinese Journal of Computer, 2007, 30(8): 1429-1435.
[32] HAN S Q, ZHAO M. Reduct Theory [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2010: 65-264.
[33] GUAN L H, WANG G Y, HU F. A decision rules mining algorithm based on attribute order [J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 313-316.

WANG Hong, born in 1995, postgraduate. His main research interests include rough set theory, graph theory and its applications.

GUAN Li-he, born in 1975, Ph.D, associate professor. His main research interests include rough set, data mining and knowledge acquisition.

(上接第 436 页)

[7] LIANG Q S, WU Y L, FENG L. User ranking algorithm for microblog search based on MapReduce [J]. Journal of Computer Applications, 2012, 32(11): 2989-2993.
[8] GUAN T, WANG L, JIN J H, et al. Knowledge contribution behavior in online Q&A communities: An empirical investigation [J]. Computers in Human Behavior, 2018, 81: 137-147.
[9] NIE L, ZHAO Y, WANG X, et al. Learning to recommend descriptive tags for questions in social forums [J]. ACM Transactions on Information Systems, 2014, 32: 5.
[10] SHEN H Y, LIU G X, WANG H Y, et al. SocialQ&A: An Online Social Network Based Question and Answer System [J]. IEEE Transactions on Big Data, 2017, 3(1): 91-106.
[11] FU H Y, OH S. Quality assessment of answers with user-identi? ed criteria and data-driven features in social Q&A [J]. Information Processing and Management, 2019, 56: 14-28.
[12] LONG P T, ANH N V D, VI N T T, et al. A meaningful model for computing users' importance scores in Q&A systems[C] // Proceedings of the Second Symposium on Information and Communication. 2011: 120-126.
[13] LV L Y, ZHANG Y C, YEUNG C H, et al. Leaders in Social Networks, the Delicious Case [J]. Plos One, 2011, 6(6): e21202.
[14] BHANU M, CHANDRA J. Exploiting response patterns for identifying topical experts in Stack Overflow[C] // International Conference on Digital Information Management. 2016: 139-144.
[15] WILLIAMS S. Pearson's correlation coefficient [J]. The New Zealand Medical Journal, 1996, 109(1015): 38.

LI Xiao, born in 1994, postgraduate student. His main research interests include mining software repository and so on.

LI Hui, born in 1983, Ph.D, associate professor, master supervisor, is a member of China Computer Federation. His main research interests include mining software repository, and complex networks.