计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.200800013

一种基于概念可辨识矩阵的概念约简方法

王　霞[1,2]　彭致华[1]　李俊余[1,2]　吴伟志[1,2]
1 浙江海洋大学数理与信息学院　浙江 舟山 316022
2 浙江省海洋大数据挖掘与应用重点实验室(浙江海洋大学)　浙江 舟山 316022

摘　要　基于布尔因子分析的概念约简能够保持形式背景的二元关系不变。借鉴概念格中基于可辨识矩阵求解属性约简的思想,在形式背景上定义概念可辨识矩阵,基于此给出保持二元关系不变的概念约简方法。首先,在形式背景上定义一种新的可辨识矩阵,称之为概念可辨识矩阵。该矩阵的行和列都是形式概念,矩阵的每个元素是由属于所在行的形式概念的所有对象和属性对,但不属于所在列的形式概念的对象和属性对构成的集合。其次,研究概念可辨识矩阵与概念协调集之间的关系,利用概念可辨识矩阵给出概念协调集的判定方法。然后,利用概念可辨识矩阵详细讨论核心概念、相对必要概念和不必要概念的特征,进而分别给出判断这3类形式概念的方法。最后,给出基于概念可辨识矩阵寻找概念约简的步骤。

关键词:形式背景;形式概念;概念约简;概念可辨识矩阵;概念特征
中图法分类号　TP301

Method of Concept Reduction Based on Concept Discernibility Matrix

WANG Xia[1,2],PENG Zhi-hua[1],LI Jun-yu[1,2] and WU Wei-zhi[1,2]
1 School of Mathematics,Physics and Information Science,Zhejiang Ocean University,Zhoushan,Zhejiang 316022,China
2 Key Laboratory of Oceanographic Big Data Mining and Application of Zhejiang Province (Zhejiang Ocean University),Zhoushan,Zhejiang 316022,China

Abstract　The concept reduction of a formal context based on Boolean factor analysis can preserve all binary relations of the formal context. That is the relations between objects and attributes contained in a concept reduction based on Boolean factor analysis are consistent with the binary relations represented by the formal context. Inspired by the idea of discernibility matrix solving attribute reduct in a concept lattice,a concept discernibility matrix is defined in a formal context,and a method of concept reduct based on the concept discernibility matrix is proposed to find all concept reducts. Firstly,a new discernibility matrix is defined in a formal context,which is called concept discernibility matrix of the formal context. Both the rows and columns of the matrix are the formal concepts. Each element of the matrix is a set consisted of all pairs of object and attribute,which belong to the formal concept in the corresponding row,but not to the formal concept in the corresponding column. Secondly,the relationship between the concept discernibility matrix and the concept consistent set is studied,and the method of judging concept consistent set is given by using the concept discernibility matrix. Then,all formal concepts of a formal context are divided into three categories:core concept,relatively necessary concept and unnecessary concept according to their relationship to concept reducts. And characteristics of core concept,relatively necessary concept and unnecessary concept are discussed in detail. Moreover,methods of judging these three kinds of formal concepts are developed respectively by using the concept discernibility matrix. The detailed process of solving all concept reducts of a formal context is given by an example based on the concept discernibility matrix. Finally,solution steps to find all concept reducts are given by using the concept discernibility matrix,and the complexity of each step is simply analyzed.

Keywords　Formal context,Formal concept,Concept reduction,Concept discernibility matrix,Concept characteristic

1　引言

形式概念分析[1-2]是数据分析、知识发现和知识处理的一种有效的数学工具。形式概念分析有两个基本概念,一个是由对象集、属性集和二元关系构成的形式背景,另一个是由外延和内涵构成的形式概念。属性约简是形式概念分析的一个重要研究课题,一个属性约简是一个极小属性子集,它能保持全部属性所具有的某种特定的描述能力不变。在许多属性约简方法[3-10]中,基于可辨识矩阵的约简方法占据着主导地位[11]。可辨识矩阵是由Skowron等[12]提出的,它为信息系

到稿日期:2020-08-03　返修日期:2020-09-23　本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。
基金项目:国家自然科学基金项目(41631179,61773349,61976194);浙江省自然科学基金项目(LY18F030017)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (41631179,61773349,61976194) and Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (LY18F030017).
通信作者:王霞(bblylm@126.com)

统提供了一种有力的属性约简方法。可辨识矩阵的行和列都是对象等价类,它的每个元素均为属性子集,可以区分其所在行和列的对象等价类。文献[3-4]提出了保持概念格的格结构不变的属性约简的定义,并将可辨识矩阵的思想引入形式概念分析中,定义了概念格的可辨识矩阵,用于求解属性约简。该矩阵的行和列都是形式概念,它的每个元素均为属性子集,可以区分其所在行和列的形式概念。文献[7]改进了文献[3-4]中的可辨识矩阵,定义了一种新的可辨识矩阵,用该矩阵求解属性约简可以大大降低计算量。该矩阵的行和列也都是形式概念,不同的是它的每个元素是由行所在的形式概念的内涵与列所在的形式概念的内涵的差构成的。为了进一步降低时间复杂度并节省存储空间,文献[10]基于粒概念定义了对象-属性可辨识矩阵,以求解概念格的属性约简。可辨识矩阵在属性约简中起着重要作用,目前已被成功应用于不同的概念格模型中[13-18]。

从形式概念的角度出发,Cao 等[19]提出了保持二元关系不变的概念约简。一个概念约简是一个极小的形式概念子集,它能保持形式背景中的所有二元关系不变,即一个概念约简所描述的对象和属性之间的二元关系与原形式背景所描述的二元关系是相同的。然而,文献[19]并未给出有效的概念约简方法,因此本文考虑在形式背景中定义一种可行的可辨识矩阵,并基于此矩阵寻找保持二元关系不变的概念约简。

本文首先在形式背景中定义概念可辨识矩阵,并研究概念可辨识矩阵与概念协调集之间的关系,从而利用概念可辨识矩阵给出概念协调集的判定方法;然后,详细讨论核心概念、相对必要概念和不必要概念的特征,并利用概念可辨识矩阵分别给出判断这 3 类形式概念的方法;最后,给出基于概念可辨识矩阵寻找概念约简的步骤。

2 相关工作

本节给出了形式概念分析和因子分析的基本概念和结论。

2.1 形式概念分析的相关知识

定义 1[2] 称(G,M,I)为一个形式背景,其中 G 是一个对象集,M 是一个属性集,I 是 G 和 M 之间的一个二元关系,分别称 G 和 M 的元素为对象和属性。若$(g,m)\in I$,则表示对象 g 具有属性 m。

一个形式背景可以用一个二维表来表示,每一行是一个对象,每一列是一个属性。若$(g,m)\in I$,则 g 行 m 列处记为 1;若$(g,m)\notin I$,则 g 行 m 列处记为 0。于是 G 和 M 之间的二元关系可以用一个布尔矩阵来表示,下文不加区分地用 I 表示形式背景的二元关系以及该二元关系对应的布尔矩阵。

定义 2[2] 设(G,M,I)为形式背景,$A\subseteq G$,$B\subseteq M$。若二元组(A,B)满足 $A'=B$,$B'=A$,则称(A,B)为形式概念,其中:

$$A'=\{m\in M \mid \forall g\in A,(g,m)\in I\}$$

$$B'=\{g\in G \mid \forall m\in B,(g,m)\in I\}$$

设(G,M,I)是形式背景,对任意的形式概念(A_1,B_1),(A_2,B_2),定义如下偏序关系:

$$(A_1,B_1)\leqslant(A_2,B_2)\Leftrightarrow A_1\subseteq A_2(\Leftrightarrow B_1\supseteq B_2)$$

记 $L(G,M,I)$为形式背景(G,M,I)中所有形式概念构成的集合。在 $L(G,M,I)$上定义上、下确界:

$$(A_1,B_1)\wedge(A_2,B_2)=(A_1\cap A_2,(B_1\cup B_2)'') \tag{1}$$

$$(A_1,B_1)\vee(A_2,B_2)=((A_1\cup A_2)'',B_1\cap B_2) \tag{2}$$

则概念格 $L(G,M,I)$是一个完备格,称其为形式背景(G,M,I)的概念格。

$\forall g\in G$,$\forall m\in M$,称$(\{g\}'',\{g\}')$为对象概念,$(\{m\}',\{m\}'')$为属性概念。对象概念集和属性概念集分别记为:

$$\mathscr{O}(G,M,I)=\{(\{g\}'',\{g\}')\mid g\in G\}$$

$$\mathscr{A}(G,M,I)=\{(\{m\}',\{m\}'')\mid m\in M\}$$

性质 1[2] 设(G,M,I)是形式背景,A,A_1,A_2 为任意的对象子集,B,B_1,B_2 为任意的属性子集,则有下列几条性质成立:

1)若 $A_1\subseteq A_2$,则 $A_2'\subseteq A_1'$;若 $B_1\subseteq B_2$,则 $B_2'\subseteq B_1'$。

2)$A\subseteq A''$,$B\subseteq B''$。

3)$A'=A'''$,$B'=B'''$。

4)$(A_1\cap A_2)'\supseteq A_1'\cup A_2'$,$(B_1\cap B_2)'\supseteq B_1'\cup B_2'$。

5)$(A_1\cup A_2)'=A_1'\cap A_2'$,$(B_1\cup B_2)'=B_1'\cap B_2'$。

6)$(A'',A')\in L(G,M,I)$。

7)$A\subseteq B'\Leftrightarrow B\subseteq A'$。

设(G,M,I)为形式背景,若对于$\forall g\in G$,$\forall m\in M$ 均有$(g,m)\in I$,则 $L(G,M,I)=\{(G,M),(\emptyset,\emptyset)\}$;若对于$\forall g\in G$,$\forall m\in M$ 均有$(g,m)\notin I$,则 $L(G,M,I)=\{(G,\emptyset),(\emptyset,M)\}$。下文不考虑这两种特殊情形的形式背景$(G,M,I)$。

2.2 因子分析相关知识

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $n\times k$ 和 $k\times m$ 的布尔矩阵,称 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 为布尔矩阵的乘积,若:

$$(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})_{ij}=\bigvee_{l=1}^{k}\boldsymbol{A}_{il}\cdot\boldsymbol{B}_{lj} \tag{3}$$

其中,$\vee$ 表示逻辑或,$\cdot$ 表示逻辑与。

为了方便构造布尔矩阵,下面将形式背景的对象集和属性集分别记为 $G=\{1,2,\cdots,n\}$和 $M=\{1,2,\cdots,m\}$。此时有 $I_{ij}=1$,当且仅当$(i,j)\in I$,$i=1,2,\cdots,n$;$j=1,2,\cdots,m$。

记 $\mathscr{F}=\{(A_1,B_1),\cdots,(A_k,B_k)\}\subseteq L(G,M,I)$,Belohlávek 等[20]定义矩阵 $\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}}$和 $\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}}$ 为:

$$(\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}})_{il}=\begin{cases}1, & i\in A_l\\ 0, & i\notin A_l\end{cases},1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant l\leqslant k \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}})_{lj}=\begin{cases}1, & j\in B_l\\ 0, & j\notin B_l\end{cases},1\leqslant j\leqslant m,1\leqslant l\leqslant k \tag{5}$$

其中,$(A_l,B_l)\in\mathscr{F}$。

定义 3[20] 设(G,M,I)为形式背景,$\mathscr{F}=\{(A_1,B_1),\cdots,(A_k,B_k)\}\subseteq L(G,M,I)$。若 $I=\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}}\circ\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}}$,则称 $\mathscr{F}$ 为一个因子概念集。其中,$\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}}$和 $\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}}$分别按照式(4)和式(5)生成。

定理 1[20] 设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,总存在 $\mathscr{F}\subseteq L(G,M,I)$使得 $I=\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}}\circ\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}}$,其中 $\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}}$和 $\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}}$按照式(4)和式(5)生成。

定理 2[20] 设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格。$\forall\mathscr{F}\subseteq L(G,M,I)$,若 $I=\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}}\circ\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}}$,则 $\mathscr{O}(G,M,I)\cap\mathscr{A}(G,M,I)\subseteq\mathscr{F}$。

3 保持二元关系不变的概念约简

定义 4[19] 设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概

念格。$\forall \mathscr{F}\subseteq L(G,M,I)$,若 $I=\bigcup_{(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i)\in\mathscr{F}}\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{B}_i$,则称 $\mathscr{F}$ 为保持二元关系不变的概念协调集;进一步,若 $\forall(A,B)\in\mathscr{F}$ 有 $I\neq\bigcup_{(\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{B}_i)\in\mathscr{F}\setminus\{(A,B)\}}A_i\times B_i$,则称 $\mathscr{F}$ 为保持二元关系不变的概念约简。

引理 1　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,$\mathscr{F}\subseteq L(G,M,I)$,则 $I=\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}}\circ\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}}\Leftrightarrow I=\bigcup_{(A_i,B_i)\in\mathscr{F}}A_i\times B_i$。

证明:因为$(i,j)\in I\Leftrightarrow I_{ij}=1,i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m$,且有:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}}\circ\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}})_{ij}=1&\Leftrightarrow\bigvee_{l=1}^{k}(\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}})_{il}\cdot(B_{\mathscr{F}})_{lj}=1\\
&\Leftrightarrow\exists\, l\in\{1,2,\cdots,k\},(\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}})_{il}=1,(\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}})_{lj}=1\\
&\Leftrightarrow\exists(A_l,B_l)\in\mathscr{F},i\in A_l,j\in B_l\\
&\Leftrightarrow\exists(A_l,B_l)\in\mathscr{F},(i,j)\in A_l\times B_l\\
&\Leftrightarrow(i,j)\in\bigcup_{(A_l,B_l)\in\mathscr{F}}A_l\times B_l
\end{aligned}
$$

因此,$I=\boldsymbol{A}_{\mathscr{F}}\circ\boldsymbol{B}_{\mathscr{F}}\Leftrightarrow I=\bigcup_{(A_i,B_i)\in\mathscr{F}}A_i\times B_i$。证毕。

推论 1　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,$\forall\mathscr{F}\subseteq L(G,M,I)$,则 $\mathscr{F}$ 为保持二元关系不变的概念协调集当且仅当 $\mathscr{F}$ 为一个因子概念集。

引理 2　设 $\mathscr{O}(G,M,I)$和 $\mathscr{A}(G,M,I)$为形式背景(G,M,I)的对象概念集和属性概念集,则 $\mathscr{O}(G,M,I)$和 $\mathscr{A}(G,M,I)$都是保持二元关系不变的概念协调集。

证明:显然有 $I=\bigcup_{g\in G}\{g\}\times\{g\}'=\bigcup_{m\in M}\{m\}'\times\{m\}$,且由性质 1 可知,$g\in\{g\}''$,$m\in\{m\}''$,因此 $I=\bigcup_{g\in G}\{g\}''\times\{g\}'=\bigcup_{m\in M}\{m\}'\times\{m\}''$。于是由定义 4 可知,$\mathscr{O}(G,M,I)$和 $\mathscr{A}(G,M,I)$都是保持二元关系不变的概念协调集。证毕。

定义 5[19]　设(G,M,I)为形式背景,$\mathscr{T}=\{\mathscr{F}_i\mid i\in\tau,\tau$ 为指标集$\}$为保持二元关系不变的概念约简全体构成的集合,则 $L(G,M,I)$中的形式概念可分为 3 类:

1)核心概念集 $\mathscr{C}=\bigcap_{i\in\tau}\mathscr{F}_i$;

2)相对必要概念集 $\mathscr{K}=\bigcup_{i\in\tau}\mathscr{F}_i-\bigcap_{i\in\tau}\mathscr{F}_i$;

3)不必要概念集 $\mathscr{U}=L(G,M,I)-\bigcup_{i\in\tau}\mathscr{F}_i$。

结合定理 2 和定义 5 可得推论 2。

推论 2　$\mathscr{O}(G,M,I)\cap\mathscr{A}(G,M,I)\subseteq\mathscr{C}$。

4　保持二元关系不变的约简方法

定义 6　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格。对于任意两个概念$\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)$,$\mathbb{C}_j=(A_j,B_j)$,定义 $D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)=\{(g,m)\mid(g,m)\in A_i\times B_i\setminus A_j\times B_j\}$,称 $\mathscr{D}=(D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)\mid\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j\in L(G,M,I))$为形式背景$(G,M,I)$的概念可辨识矩阵。

引理 3　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,对于 $\forall\mathscr{F}\subseteq L(G,M,I)$,$\forall\mathbb{C}=(A,B)\in L(G,M,I)$有 $\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)=\emptyset\Leftrightarrow A\times B\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}A_i\times B_i$。

证明:因为有:

$$
\begin{aligned}
\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)&=\bigcap_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}(A\times B\setminus A_i\times B_i)\\
&=\bigcap_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}(A\times B\cap\overline{A_i\times B_i})\\
&=A\times B\cap\bigcap_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}\overline{A_i\times B_i}\\
&=A\times B\cap\overline{\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}(A_i\times B_i)}
\end{aligned}
$$

所以 $\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)=\emptyset\Leftrightarrow\forall(g,m)\in A\times B$,即$(g,m)\notin\overline{\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}(A_i\times B_i)}\Leftrightarrow\forall(g,m)\in A\times B$,于是有:

$$
\begin{aligned}
(g,m)\in\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}A_i\times B_i&\Leftrightarrow A\times B\\
&\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}A_i\times B_i
\end{aligned}
$$

证毕。

推论 3　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格。对于 $\forall\mathscr{F}\subseteq L(G,M,I)$,$\mathbb{C}=(A,B)\in L(G,M,I)$,有 $\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)\neq\emptyset$ 当且仅当 $\exists(g,m)\in A\times B$ 使得$(g,m)\notin\bigcup_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{F}\setminus\{\mathbb{C}\}}A_i\times B_i$,其中$\mathbb{C}=(A,B)$,$\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)$。

定理 3　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,$\mathscr{F}\subseteq L(G,M,I)$。则 $\mathscr{F}$ 为保持二元关系不变的概念协调集当且仅当 $\forall\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j\in L(G,M,I)$,有:

$$D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)\in\mathscr{F}}A_k\times B_k$$

证明:(充分性)1)$\forall(g,m)\in I$,若对于 $\forall(A,B)\in L(G,M,I)$有$(g,m)\in A\times B$,则$(g,m)\in\bigcup_{\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)\in\mathscr{F}}A_k\times B_k$。

2)$\forall(g,m)\in I$,若存在$\mathbb{C}_i$,$\mathbb{C}_j\in L(G,M,I)$使得$(g,m)\in D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)\cup D(\mathbb{C}_j,\mathbb{C}_i)$,则由条件 $\forall\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j\in L(G,M,I)$,$D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)\in\mathscr{F}}A_k\times B_k$ 知,$(g,m)\in\bigcup_{\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)\in\mathscr{F}}A_k\times B_k$。因此,$I=\bigcup_{\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)\in\mathscr{F}}A_k\times B_k$,即 $\mathscr{F}$ 为保持二元关系不变的概念协调集。

必要性显然成立。证毕。

定理 4　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,$\mathscr{C}$ 为核心概念集,$\mathscr{F}\subseteq L(G,M,I)$。则 $\mathscr{F}\cup\mathscr{C}$ 为保持二元关系不变的概念协调集当且仅当 $\bigcup_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)\setminus\mathscr{C}}\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)\in\mathscr{F}}A_k\times B_k$。

证明:(充分性)$\forall(g,m)\in I$,$\exists\mathbb{C}=(A,B)\in L(G,M,I)$使得$(g,m)\in A\times B$。若$(g,m)\notin\bigcup_{\mathbb{C}_j=(A_j,B_j)\in\mathscr{C}}A_j\times B_j$,则$\mathbb{C}\notin\mathscr{C}$且$(g,m)\in\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)$。于是由条件 $\bigcup_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)\setminus\mathscr{C}}\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)\in\mathscr{F}}A_k\times B_k$ 知,$(g,m)\in\bigcup_{\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)\in\mathscr{F}}A_k\times B_k\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)\in\mathscr{F}\cup\mathscr{C}}A_k\times B_k$。若$(g,m)\in\bigcup_{\mathbb{C}_j=(A_j,B_j)\in\mathscr{C}}A_j\times B_j$,则$(g,m)\in\bigcup_{\mathbb{C}_j=(A_j,B_j)\in\mathscr{F}\cup\mathscr{C}}A_j\times B_j$。因此,$I=\bigcup_{\mathbb{C}_j=(A_j,B_j)\in\mathscr{F}\cup\mathscr{C}}A_j\times B_j$,即 $\mathscr{F}\cup\mathscr{C}$ 为保持二元关系不变的概念协调集。

必要性显然成立。证毕。

例 1　表 1 列出了形式背景(G,M,I),其中对象集 $G=\{1,2,\cdots,12\}$,属性集 $M=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$。

表 1　形式背景(G,M,I)

Table 1　Formal context(G,M,I)

	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	1	1	0	1	0	0	0
2	1	1	0	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1	0	1	0
4	1	1	0	0	0	1	0	1
5	1	1	1	0	1	0	0	0
6	0	1	0	0	1	0	1	0
7	0	1	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0
9	1	1	1	0	1	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0
11	1	1	1	0	1	0	0	0
12	1	1	0	0	0	1	0	1

表1的形式背景(G,M,I)共有9个形式概念，具体如下：$\mathbb{C}_0=(\varnothing,M)$；$\mathbb{C}_1=(\{1,5,9,11\},\{a,b,c,e\})$；$\mathbb{C}_2=(\{2,4,12\},\{a,b,f,h\})$；$\mathbb{C}_3=(\{3,6,7\},\{b,e,g\})$；$\mathbb{C}_4=(\{3,6-8,10\},\{g\})$；$\mathbb{C}_5=(\{1,3,5-7,9,11\},\{b,e\})$；$\mathbb{C}_6=(\{1,2,4,5,9,11,12\},\{a,b\})$；$\mathbb{C}_7=(\{1-7,9,11,12\},\{b\})$；$\mathbb{C}_8=(G,\varnothing)$。

由于$D(\mathbb{C}_0,\mathbb{C}_i)=\varnothing$，$D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_0)=A_i\times B_i$，$D(\mathbb{C}_8,\mathbb{C}_j)=\varnothing$，$D(\mathbb{C}_j,\mathbb{C}_8)=A_j\times B_j$，$i=1,2,\cdots,8$，$j=0,1,\cdots,7$，因此表2列出的概念可辨识矩阵中去掉了$D(\mathbb{C}_0,\mathbb{C}_i)$，$D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_0)$，$D(\mathbb{C}_8,\mathbb{C}_j)$，$D(\mathbb{C}_j,\mathbb{C}_8)$ $(i=1,2,\cdots,8,j=0,1,\cdots,7)$以节省空间。结合定理3、定理4和表2容易验证，表1所列的形式背景有且仅有2个概念约简：

$\mathfrak{F}_1=\{\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_4\}$和$\mathfrak{F}_2=\{\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_4,\mathbb{C}_5\}$。

表2 形式背景(G,M,I)的概念可辨识矩阵$\mathfrak{D}$

Table 2 Conceptual discernibility matrix $\mathfrak{D}$ of formal context (G,M,I)

	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{C}_3$	$\mathbb{C}_4$	$\mathbb{C}_5$	$\mathbb{C}_6$	$\mathbb{C}_7$
$\mathbb{C}_1$	$\varnothing$	$\{1,5,9,11\}\times\{a,b,c,e\}$	$\{1,5,9,11\}\times\{a,b,c,e\}$	$\{1,5,9,11\}\times\{a,b,c,e\}$	$\{1,5,9,11\}\times\{a,c\}$	$\{1,5,9,11\}\times\{c,e\}$	$\{1,5,9,11\}\times\{a,c,e\}$
$\mathbb{C}_2$	$\{2,4,12\}\times\{a,b,f,h\}$	$\varnothing$	$\{2,4,12\}\times\{a,b,f,h\}$	$\{2,4,12\}\times\{a,b,f,h\}$	$\{2,4,12\}\times\{a,b,f,h\}$	$\{2,4,12\}\times\{f,h\}$	$\{2,4,12\}\times\{a,f,h\}$
$\mathbb{C}_3$	$\{3,6,7\}\times\{b,e,g\}$	$\{3,6,7\}\times\{b,e,g\}$	$\varnothing$	$\{3,6,7\}\times\{b,e\}$	$\{3,6,7\}\times\{g\}$	$\{3,6,7\}\times\{b,e,g\}$	$\{3,6,7\}\times\{e,g\}$
$\mathbb{C}_4$	$\{3,6-8,10\}\times\{g\}$	$\{3,6-8,10\}\times\{g\}$	$\{8,10\}\times\{g\}$	$\varnothing$	$\{3,6,7,8,10\}\times\{g\}$	$\{3,6-8,10\}\times\{g\}$	$\{3,6-8,10\}\times\{g\}$
$\mathbb{C}_5$	$\{3,6,7\}\times\{b,e\}$	$\{1,3,5-7,9,11\}\times\{b,e\}$	$\{1,5,9,11\}\times\{b,e\}$	$\{1,3,5-7,9,11\}\times\{b,e\}$	$\varnothing$	$\{\{1,3,5-7,9,11\}\times\{e\},\{3,6,7\}\times\{b\}\}$	$\{1,3,5-7,9,11\}\times\{e\}$
$\mathbb{C}_6$	$\{2,4,12\}\times\{a,b\}$	$\{1,5,9,11\}\times\{b\}$	$\{1,2,4,5,9,11,12\}\times\{a,b\}$	$\{1,2,4,5,9,11,12\}\times\{a,b\}$	$\{\{1,2,4,5,9,11,12\}\times\{a\},\{2,4,12\}\times\{b\}\}$	$\varnothing$	$\{1,2,4,5,9,11,12\}\times\{a\}$
$\mathbb{C}_7$	$\{2-4,6,7,12\}\times\{b\}$	$\{1,3,5-7,9,11\}\times\{b\}$	$\{1,2,4,5,9,11,12\}\times\{b\}$	$\{1-7,9,11,12\}\times\{b\}$	$\{2,4,12\}\times\{b\}$	$\{3,6,7\}\times\{b\}$	$\varnothing$

4.1 核心概念的判定方法

定理5 设(G,M,I)为形式背景，$L(G,M,I)$为其概念格，$\mathbb{C}\in L(G,M,I)$。则$\mathbb{C}$为核心概念当且仅当$\bigcap_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)\neq\varnothing$。

证明：不妨设$\mathbb{C}=(A,B)$，则$\mathbb{C}$为核心概念等价于对任意的概念约简$\mathscr{F}$有$\mathbb{C}\in\mathscr{F}$。因此，$\mathbb{C}$为核心概念当且仅当$\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i\times B_i)\in L(G,M,I)\setminus\{\mathbb{C}\}}A_i\times B_i\neq\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i\times B_i)\in L(G,M,I)}A_i\times B_i=I$，这等价于$\exists(g,m)\in\bigcup_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)}A_i\times B_i$使得$(g,m)\notin\bigcup_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)\setminus\{\mathbb{C}\}}A_i\times B_i$。因此，由推论3知，它等价于$\bigcap_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)\neq\varnothing$。证毕。

注：由定理5知，核心概念集为：

$\mathscr{C}=\{\mathbb{C}\in L(G,M,I)\mid\bigcap_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)\neq\varnothing\}$。

例2 （续例1）由表2的概念可辨识矩阵计算得：

$\bigcap_{i=1}^{8}D(\mathbb{C}_0,\mathbb{C}_i)=\varnothing$

$D(\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_0)\cap(\bigcap_{i=2}^{8}D(\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_i))=\{1,5,9,11\}\times\{c\}\neq\varnothing$

$(\bigcap_{i=0}^{1}D(\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_i))\cap(\bigcap_{j=3}^{8}D(\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_j))=\{2,4,12\}\times\{f,h\}\neq\varnothing$

$(\bigcap_{i=0}^{2}D(\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_i))\cap(\bigcap_{j=4}^{8}D(\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_j))=\varnothing$

$(\bigcap_{i=0}^{3}D(\mathbb{C}_4,\mathbb{C}_i))\cap(\bigcap_{j=5}^{8}D(\mathbb{C}_4,\mathbb{C}_j))=\{8,10\}\times\{g\}\neq\varnothing$

$(\bigcap_{i=0}^{4}D(\mathbb{C}_5,\mathbb{C}_i))\cap(\bigcap_{j=6}^{8}D(\mathbb{C}_5,\mathbb{C}_j))=\varnothing$

$(\bigcap_{i=0}^{5}D(\mathbb{C}_6,\mathbb{C}_i))\cap(\bigcap_{j=7}^{8}D(\mathbb{C}_5,\mathbb{C}_j))=\varnothing$

$(\bigcap_{i=0}^{6}D(\mathbb{C}_7,\mathbb{C}_i))\cap D(\mathbb{C}_8,\mathbb{C}_7)=\varnothing$

$\bigcap_{i=0}^{7}D(\mathbb{C}_8,\mathbb{C}_i)=\varnothing$

根据定理5可得，核心概念集为$\mathscr{C}=\{\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_4\}$。

推论4 设(G,M,I)为形式背景，$L(G,M,I)$为其概念格，$(A,B)\in L(G,M,I)$。则(A,B)为核心概念当且仅当$\exists(g,m)\in Y$使得(A,B)为唯一满足$(g,m)\in A\times B$的形式概念。

定理6[19] 设(G,M,I)为形式背景，$L(G,M,I)$为其概念格，$(A,B)\in L(G,M,I)$。则(A,B)为核心概念当且仅当$(A,B)\in\mathscr{O}(G,M,I)\cap\mathscr{A}(G,M,I)$。

证明：由定理5可知：

$\mathbb{C}=(A,B)$为核心概念

$\Leftrightarrow\bigcap_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)\neq\varnothing$

$\Leftrightarrow\exists(g,m)\in\bigcap_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)$

$\Leftrightarrow\exists(g,m)\in A_i\times B_i$且$\forall\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in L(G,M,I)$

若$(A_i,B_i)\neq(A,B)$，则$(g,m)\notin A_i\times B_i$，又由于$(g,m)\in(\{g\}'',\{g\}')$且$(g,m)\in(\{m\}',\{m\}'')$，这等价于$(A,B)=(\{g\}'',\{g\}')=(\{m\}',\{m\}'')$。即$(A,B)\in\mathscr{O}(G,M,I)\cap\mathscr{A}(G,M,I)$。证毕。

注：核心概念集也可以表示为$\mathscr{C}=\mathscr{O}(G,M,I)\cap\mathscr{A}(G,M,I)$。

4.2 相对必要概念的判断方法

设(G,M,I)为形式背景，$L(G,M,I)$为其概念格，$\mathscr{C}$为核心概念集，$(g,m)\in Y$，记：

$$\varepsilon_{(g,m)}=\{\mathbb{C}\in L(G,M,I)\setminus\mathscr{C}\mid(g,m)\in\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)\}\quad(6)$$

显然，$\forall(g,m)\in Y$，若$\varepsilon_{(g,m)}\neq\varnothing$，则对于任意的概念约简$\mathscr{F}$，有$\mathscr{F}\cap\varepsilon_{(g,m)}\neq\varnothing$。

引理4 设(G,M,I)为形式背景，$L(G,M,I)$为其概念格，$\mathscr{C}$为核心概念集，若$\exists(g_0,m_0)\in Y$使得$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|=2$，则$\varepsilon_{(g_0,m_0)}\subseteq\mathscr{K}$。

证明：若$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|=2$，不妨设$\varepsilon_{(g_0,m_0)}=\{\mathbb{C}_l,\mathbb{C}_k\}$。由式(6)和$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|=2$知，$\exists(g_0,m_0)\in Y$使得：

$(g_0,m_0)\in\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C}_l,\mathbb{C}_j)\cap\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C}_k,\mathbb{C}_j)$

记$\mathbb{C}_l=(A_l,B_l)$,$\mathbb{C}_k=(A_k,B_k)$,则$(g_0,m_0)\in A_l\times B_l\cap A_k\times B_k$,且$(g_0,m_0)\notin A_i\times B_i$,$\forall\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in L(G,M,I)\backslash\{\mathbb{C}_l,\mathbb{C}_k\}$。

故,对于任意的概念约简$\mathscr{F}$,若$\mathbb{C}_l\notin\mathscr{F}$,则必有$\mathbb{C}_k\in\mathscr{F}$。又因为$\mathbb{C}_l,\mathbb{C}_k\in L(G,M,I)\backslash\mathscr{C}$,因此存在约简$\mathscr{F}_1$使得$\mathbb{C}_k\notin\mathscr{F}_1$,则此时必有$\mathbb{C}_l\in\mathscr{F}_1$。于是,$\mathbb{C}_l,\mathbb{C}_k\in\mathscr{K}$,即$\varepsilon_{(g_0,m_0)}\subseteq\mathscr{K}$。证毕。

引理5　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,$\mathscr{C}$为核心概念集,若$\exists(g_0,m_0)\in Y$使得$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|\geqslant3$,且$\forall\varepsilon\subset\varepsilon_{(g_0,m_0)}$有:$\forall(g,m)\in Y,\varepsilon\neq\varepsilon_{(g,m)}$,则$\varepsilon_{(g_0,m_0)}\subseteq\mathscr{K}$。

证明:若$\exists(g_0,m_0)\in Y$使得$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|\geqslant3$,则$\varepsilon_{(g_0,m_0)}\cap\mathscr{C}=\varnothing$,因此$\forall\mathbb{C}\in\varepsilon_{(g_0,m_0)}$必存在不包含$\mathbb{C}$的概念约简。

由式(6)可知,任意的概念约简必包含$\varepsilon_{(g_0,m_0)}$中的某个元素,即$\varepsilon_{(g_0,m_0)}\cap\mathscr{K}\neq\varnothing$。又因为对于$\forall\varepsilon\subset\varepsilon_{(g_0,m_0)}$有$\forall(g,m)\in Y,\varepsilon\neq\varepsilon_{(g,m)}$,所以$\forall\mathbb{C}\in\varepsilon_{(g_0,m_0)}$必存在包含$\mathbb{C}$的概念约简。

故,对于$\forall\mathbb{C}\in\varepsilon_{(g_0,m_0)}$有$\mathbb{C}\in\mathscr{K}$,即$\varepsilon_{(g_0,m_0)}\subseteq\mathscr{K}$。证毕。

定理7　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,$\mathscr{C}$为核心概念集,$\forall\mathbb{C}\in L(G,M,I)$。则$\mathbb{C}\in\mathscr{K}\Leftrightarrow\exists(g_0,m_0)\in\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)$,使得$\mathbb{C}\in\varepsilon_{(g_0,m_0)}$满足:$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|=2$,或者$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|\geqslant3$且$\forall\varepsilon\subset\varepsilon_{(g_0,m_0)}\backslash\{\mathbb{C}\}$有$\forall(g,m)\in Y,\varepsilon\neq\varepsilon_{(g,m)}$。

证明:(必然性)若$\mathbb{C}\in\mathscr{K}$,则存在约简$\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2$,使得$\mathbb{C}\in\mathscr{F}_1$,且$\mathbb{C}\notin\mathscr{F}_2$,则$\exists(g_0,m_0)\in\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)$,且$(g_0,m_0)\in\bigcup_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{F}_2}\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)$,即存在$\exists\mathbb{C}_1\in\mathscr{F}_2$使得$(g_0,m_0)\in\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_j)$。故,$\mathbb{C},\mathbb{C}_1\in\varepsilon_{(g_0,m_0)}$,于是$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|\geqslant2$,即$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|=2$或者$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|\geqslant3$。

接着证明:若$\exists(g_0,m_0)\in\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)$使得$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|\geqslant3$,则$\forall\varepsilon\subset\varepsilon_{(g_0,m_0)}\backslash\{\mathbb{C}\}$有$\forall(g,m)\in Y,\varepsilon\neq\varepsilon_{(g,m)}$。否则,$\forall(g_i,m_i)\in\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)$,若$|\varepsilon_{(g_i,m_i)}|\geqslant3$,且$\exists\varepsilon_i\subset\varepsilon_{(g_i,m_i)}\backslash\{\mathbb{C}\}$使得$\varepsilon_i=\varepsilon_{(g_{il},m_{il})}$,则$\mathscr{F}_1\cap\varepsilon_i\neq\varnothing$。于是,$(g_0,m_0)\in\bigcup_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{F}_1\backslash\{\mathbb{C}\}}\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)$,即$\mathscr{F}_1\backslash\{\mathbb{C}\}$为概念协调集,矛盾。

(充分性)由引理4和引理5可知充分性成立。证毕。

例3　由表2中的概念可辨识矩阵可知,$\varepsilon_{(3,e)}=\{\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_5\}$,因此根据定理7知,$\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_5$为相对必要概念。又因为$\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C}_7,\mathbb{C}_j)=\{(3,b),(6,b),(7,b)\}$,$\varepsilon_{(3,b)}=\varepsilon_{(6,b)}=\varepsilon_{(7,b)}=\{\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_5,\mathbb{C}_7\}$,且$\varepsilon_{(3,e)}\subset\varepsilon_{(3,b)}=\varepsilon_{(6,b)}=\varepsilon_{(7,b)}$,所以由定理7知,$\mathbb{C}_7$不是相对必要概念。

4.3　不必要概念的判断方法

引理6　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,$\mathscr{C}$为核心概念集,$\mathbb{C}\in L(G,M,I)\backslash\mathscr{C}$。若$\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)=\varnothing$,则$\mathbb{C}$为不必要概念。

证明:不妨设$\mathbb{C}=(A,B)$,若$\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{C}\backslash\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)=\varnothing$,则根据引理1可得$A\times B\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{C}\backslash\{\mathbb{C}\}}A_i\times B_i=\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{C}}A_i\times B_i$。因此,对于任意的概念协调集$\mathscr{F}$,有$A\times B\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_i=(A_i,B_i)\in\mathscr{C}}A_i\times B_i\subseteq\bigcup_{\mathbb{C}_j=(A_j,B_j)\in\mathscr{F}\backslash\{\mathbb{C}\}}A_j\times B_j$。于是,对于任意的概念协调集$\mathscr{F}$,有$\bigcup_{\mathbb{C}_j=(A_j,B_j)\in\mathscr{F}\backslash\{\mathbb{C}\}}A_j\times B_j=\bigcup_{\mathbb{C}_j=(A_j,B_j)\in\mathscr{F}}A_j\times B_j$,即$\mathscr{F}\backslash\{\mathbb{C}\}$也是概念协调集。故,$\mathbb{C}$为不必要概念。证毕。

注:记$\mathscr{U}_0=\{\mathbb{C}\in L(G,M,I)\backslash\mathscr{C}\mid\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)=\varnothing\}$,则$\mathscr{U}_0\subseteq\mathscr{U}$。

例4　(续例1)由表2的概念可辨识矩阵计算得:

$D(\mathbb{C}_0,\mathbb{C}_1)\cap D(\mathbb{C}_0,\mathbb{C}_2)\cap D(\mathbb{C}_0,\mathbb{C}_4)=\varnothing$

$D(\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_1)\cap D(\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_2)\cap D(\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_4)=\{3,6,7\}\times\{b,e\}\neq\varnothing$

$D(\mathbb{C}_5,\mathbb{C}_1)\cap D(\mathbb{C}_5,\mathbb{C}_2)\cap D(\mathbb{C}_5,\mathbb{C}_4)=\{3,6,7\}\times\{b,e\}\neq\varnothing$

$D(\mathbb{C}_6,\mathbb{C}_1)\cap D(\mathbb{C}_6,\mathbb{C}_2)\cap D(\mathbb{C}_6,\mathbb{C}_4)=\varnothing$

$D(\mathbb{C}_7,\mathbb{C}_1)\cap D(\mathbb{C}_7,\mathbb{C}_2)\cap D(\mathbb{C}_7,\mathbb{C}_4)=\{3,6,7\}\times\{b\}\neq\varnothing$

$D(\mathbb{C}_8,\mathbb{C}_1)\cap D(\mathbb{C}_8,\mathbb{C}_2)\cap D(\mathbb{C}_8,\mathbb{C}_4)=\varnothing$

结合引理6知,$\mathbb{C}_0,\mathbb{C}_6,\mathbb{C}_8$为不必要概念。

推论5　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,对于$\forall\mathbb{C}=(A,B)\in L(G,M,I)$,若$A=\varnothing$或者$B=\varnothing$,则$(A,B)$为不必要概念。

证明:对于$\forall\mathbb{C}=(A,B)\in L(G,M,I)$,若$A=\varnothing$或者$B=\varnothing$,则$\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)=\varnothing$,于是由引理6知,$\mathbb{C}$为不必要概念。证毕。

引理7　设(G,M,I)为形式背景,则:1)$(G,G')\in\mathscr{C}\cup\mathscr{U}$;2)$(M',M)\in\mathscr{C}\cup\mathscr{U}$。

证明:下面只证明1),类似地可证明2)。

若$G'=\varnothing$,则由推论5知,$(G,G')\in\mathscr{U}$,即(G,G')为不必要概念。

若$G'\neq\varnothing$,且$\forall g\in G$有$(G,G')\neq(\{g\}'',\{g\}')$,则$\forall g\in G$使得$\{g\}''\subset G$。于是,$\forall m\in G'\subset\{g\}'$,即$\forall(g,m)\in G\times G'$,有$(g,m)\in\{g\}''\times\{g\}'$。因此,结合定理5和定理7知,$\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{C}\backslash\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)=\varnothing$,其中$\mathbb{C}=(G,G')$。因此,由引理6知,$(G,G')\in\mathscr{U}$,即$(G,G')$为不必要概念。

若$G'\neq\varnothing$,且$\exists g\in G$使得$(G,G')=(\{g\}'',\{g\}')$,则$\forall m\in\{g\}'$,$\{m\}'\supseteq\{g\}''$,因此$(\{m\}',\{m\}'')=(G,G')$,即$(G,G')=(\{g\}'',\{g\}')=(\{m\}',\{m\}'')$。则由定理6知,$(G,G')\in\mathscr{C}$,即$(G,G')$为核心概念。证毕。

定理8　设(G,M,I)为形式背景,则:

1)$(G,G')\in\mathscr{C}\Leftrightarrow G'\neq\varnothing$且$\exists g\in G$使得$(G,G')=(\{g\}'',\{g\}')$。

2)$(G,G')\in\mathscr{U}\Leftrightarrow G'=\varnothing$或者$\forall g\in G$有$(G,G')\neq(\{g\}'',\{g\}')$。

3)$(M',M)\in\mathscr{C}\Leftrightarrow M'\neq\varnothing$且$\exists m\in M$使得$(M',M)=(\{m\}',\{m\}'')$。

4)$(M',M)\in\mathscr{U}\Leftrightarrow M'=\varnothing$或者$\forall m\in M$有$(M',M)\neq(\{m\}',\{m\}'')$。

定理9　设(G,M,I)为形式背景,$L(G,M,I)$为其概念格,$\mathscr{C}$为核心概念集,$\forall\mathbb{C}\in L(G,M,I)\backslash\mathscr{C}$,则$\mathbb{C}\in\mathscr{U}\Leftrightarrow\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)=\varnothing$,或者$\forall(g,m)\in\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)$有$|\varepsilon_{(g,m)}|\geqslant3$且$\exists\varepsilon\subset\varepsilon_{(g,m)}$使得$\varepsilon=\varepsilon_{(g_1,m_1)}$,$(g_1,m_1)\in Y$。

例5　(续例1)由表2的概念可辨识矩阵计算得:

$D(\mathbb{C}_6,\mathbb{C}_1)\cap D(\mathbb{C}_6,\mathbb{C}_2)\cap D(\mathbb{C}_6,\mathbb{C}_4)=\varnothing$

$D(\mathbb{C}_7,\mathbb{C}_1)\cap D(\mathbb{C}_7,\mathbb{C}_2)\cap D(\mathbb{C}_7,\mathbb{C}_4)=\{3,6,7\}\times\{b\}\neq\emptyset$,且 $\varepsilon_{(3,b)}=\varepsilon_{(6,b)}=\varepsilon_{(7,b)}=\{\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_5,\mathbb{C}_7\}$,$\varepsilon_{(3,e)}=\{\mathbb{C}_3,\mathbb{C}_5\}\subset\varepsilon_{(3,b)}=\varepsilon_{(6,b)}=\varepsilon_{(7,b)}$。

根据定理 9 可知,$\mathbb{C}_6$,$\mathbb{C}_7$ 均为不必要概念。因此,结合例 4 可知,不必要概念集为 $\mathscr{U}=\{\mathbb{C}_0,\mathbb{C}_6,\mathbb{C}_7,\mathbb{C}_8\}$。

根据第 4.1—4.3 节,下面给出寻找概念约简或概念特征的 4 个步骤。

步骤 1 计算概念可辨识矩阵 $\mathscr{D}=(D(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j)\mid\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_j\in L(G,M,I))$。

步骤 2 根据定理 5,判断核心概念集 $\mathscr{C}$,即 $\mathbb{C}\in\mathscr{C}\Leftrightarrow\bigcap_{\mathbb{C}_i\in L(G,M,I)\setminus\{\mathbb{C}\}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)\neq\emptyset$。

步骤 3 根据引理 6,判断不必要概念子集 $\mathscr{U}_0=\{\mathbb{C}\in L(G,M,I)\setminus\mathscr{C}\mid\bigcap_{\mathbb{C}_i\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_i)=\emptyset\}$。

步骤 4 根据定理 7,判断相对必要属性集 $\mathscr{K}$,即 $\forall\mathbb{C}\in L(G,M,I)\setminus\mathscr{C}\cup\mathscr{U}_0$,判断:

$\exists(g_0,m_0)\in\bigcap_{\mathbb{C}_j\in\mathscr{C}}D(\mathbb{C},\mathbb{C}_j)$ 使得 $\mathbb{C}\in\varepsilon_{(g_0,m_0)}$ 满足:$|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|=2$,或者 $|\varepsilon_{(g_0,m_0)}|\geqslant 3$ 且 $\forall\varepsilon\subset\varepsilon_{(g_0,m_0)}\setminus\{\mathbb{C}\}$ 有 $\forall(g,m)\in Y$,$\varepsilon\neq\varepsilon_{(g,m)}$。

结束语 受可辨识矩阵思想的启发,本文定义了概念可辨识矩阵,并基于此研究了概念约简与概念可辨识矩阵之间的关系,包括核心概念、相对必要概念和不必要概念与概念可辨识矩阵之间的关系,并相应地给出了判定方法。

将三元因子分析与三元概念分析相结合,可以研究三元概念约简的相关问题。同样地,如何将可辨识矩阵引入三元概念分析中研究三元概念约简的判定方法,将是我们进一步要考虑的问题。

参 考 文 献

[1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts[M]// Ordered Sets. Dordrecht: Reidel, 1982: 445-470.

[2] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations[M]. Berlin: Springer, 1999: 17-61.

[3] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattice[J]. Science in China (Series E), 2005, 35(6): 628-639.

[4] ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction in concept lattice based on discernibility matrix[C]// 10th International Conference Proceedings of Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing. Berlin: Springer, 2005: 157-165.

[5] WANG X, ZHANG W X. Knowledge reduction in concept lattices based on irreducible elements[J]. Transaction on Computational Science V, 2009, 55(40): 128-142.

[6] WU W Z, LEUNG Y, MI J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineer, 2009, 21(10): 1461-1474.

[7] QI J J. Attribute reduction in formal contexts based on a new discernibility matrix[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2009, 30(1): 305-314.

[8] LIU J, MI J S. A novel approach to attribute reduction in formal concept lattices, Rough Sets and Knowledge Technology[C]// Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology 3rd International Conference. Berlin: Springer, 2008: 426-433.

[9] WANG X, MA J M. A novel approach to attribute reduction in concept lattices[C]// Proceedings of Rough Sets and Knowledge Technology 1st International Conference. Berlin: Springer, 2006, 4062: 522-529.

[10] LI L J, LI M Z, MI J S, et al. A simple discernibility matrix for attribute reduction in formal concept analysis based on granular concepts[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2019, 37(2): 1-13.

[11] KONECNY J. On attribute reduction in concept lattices: methods based on discernibility matrix are outperformed by basic clarification and reduction[J]. Information Sciences, 2017, 415-416: 199-212.

[12] SKOWRON A, RAUSZER C. The discernibility matrices and functions in information systems[J]. Intelligent Decision Support. Theory and Decision Library, 1992, 11: 331-362.

[13] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts[J]. Science in China (Series E), 2008, 32(2): 195-208.

[14] CHEN J K, MI J S, XIE B, et al. A fast attribute reduction method for large formal decision contexts[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 106: 1-17.

[15] JANOSTIK R, KONECNY J. General framework for consistencies in decision contexts[J]. Information Sciences, 2020, 530: 180-200.

[16] REN R S, WEI L. The attribute reductions of three-way concept lattices[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99: 92-102.

[17] SHAO M W, LI K W. Attribute reduction in generalized one-sided formal contexts[J]. Information Sciences, 2017, 378: 317-327.

[18] SHAO M W, YANG H Z, WU W Z. Knowledge reduction in formal fuzzy contexts[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 73: 265-275.

[19] CAO L, WEI L, QI J J. Concept reduction preserving binary relations[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2018, 31(6): 516-524.

[20] BELOHLÁVEK R, VYCHODIL V. Discovery of optimal factors in binary data via a novel method of matrix decomposition[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2010, 76(1): 3-20.

WANG Xia, born in 1980, Ph.D, associate professor. Her main research interests include formal concept analysis, rough set theory and granular computing.