

基于深度图像的人脸模型特征点自动标定

李 康 尚 鹏 耿国华

(西北大学信息科学与技术学院 西安 710127)

摘 要 准确标定人脸三维模型上的特征点是颅面形态学研究的关键问题之一。针对目前人脸特征点标定需要手工干预等问题,提出了一种基于深度图像的人脸三维模型特征点标定方法,该方法首先生成人脸三维模型的二维深度图像,然后采用 SUSAN 算子、灰度积分投影等方法在该图像上标定特征点,最终将标定好的特征点映射到人脸三维模型上,从而实现鼻尖点、嘴角点、眼角点以及耳朵处 13 个特征点的标定。实验结果表明,该方法可自动标定人脸模型特征点,准确获得特征点的位置,有效解决了人脸特征点标定因人工参与而带来的不准确性。

关键词 人脸三维模型,特征点标定,二维深度图像,SUSAN 算子

中图分类号 TP391 文献标识码 A

Automatic Location of Feature Points on Three-dimensional Facial Model Based on Depth Image

LI Kang SHANG Peng GENG Guo-hua

(Department of Information Science and Technology, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract Accurate location of feature points on the three-dimensional facial model is one of the key issues in the cranio-facial morphological research. For manual intervention in the process of facial feature points, the paper proposed the method based on the depth image of 3D facial model to locate the feature points. First of all, it generates the two-dimensional depth image of three-dimensional facial model, and then uses SUSAN operator, gray-level integral projection method to locate the feature points on this image, and ultimately maps the located feature points to the facial model, thereby achieves location of thirteen points including nose tip point, mouth corner points, eye corner point and ears points. Experimental results show that the method can automatically locate feature points of the facial model, and accurately obtain the position of the feature points, and effectively solve the problem caused by human involvement of the facial feature point location.

Keywords Three-dimensional facial model, Feature points location, 2D depth image, SUSAN operator

1 引言

人脸三维模型特征点标定是人脸数字模型处理、计算机虚拟现实、模式识别等许多科学研究领域中的难点问题,是人脸形态计算机辅助处理中的重要基础,其标定效果直接影响计算机对人脸模型的理解、识别以及其它后续处理。

人脸特征点标定方法根据数据源的不同分为两类,一类是基于模型图片的特征点标定,另一类是基于模型点云的特征点标定。其中,基于模型图片特征点标定的技术已经相当成熟,主要方法包括:基于脸部几何模型的方法^[1,2]、基于遗传算法和特征脸技术的标定方法^[3]、基于贝叶斯形状模型的方法^[4]、基于图像处理方法和脸部特征点几何关系相结合的方法^[5]、基于改进的活动形状模型(Active Shape Model,简称 ASM)^[6]、基于边缘检测和映射的方法^[7]、基于主动外观模型(Active Appearance Model,简称 AAM)^[8]的方法等。而基于模型点云的特征点标定是在基于模型图片特征点标定技术已

经非常成熟的背景下才开始发展的,目前国内外已经有众多的专家学者研究该领域,其中比较有代表性的方法包括:文献[9]实现了从二维图片和三维深度数据中进行脸部特征的识别,该方法用 Gabor 滤波器在二维空间中描述特征点,在三维空间中用 Point Signature 来描述,首先从三维特征点中提取形状特征,从二维特征点中提取纹理特征,并使用主成分分析法(Principal Component Analysis,简称 PCA)将它们映射到自己的子空间。在该空间中,用对应的归一化形状和纹理权重向量形成一个带参数的向量来表示每一张脸,这样给定一张脸就可以根据相似度函数或者支持向量机(Support Vector Machine,简称 SVM)在模型库中识别出最佳匹配,最终获得人脸识别的目的。文献[10]提出了将层次过滤模式和局部特征相结合的方法精确地定位出鼻尖点,在此基础上,通过一种称之为 IAC(Included Angle Curve)的曲线进一步估计出鼻梁。该方法最主要的特点是可以实现特征点自动检测,很好地定位鼻尖点,同时具有平移和旋转不变性以及适合于不同

到稿日期:2013-05-13 返修日期:2013-08-05 本文受 973 计划前期研究专项课题:文化遗产数字化生存中的表示与复原理论方法研究(2011CB311802),国家自然科学基金重点项目:颅面形态学和颅面重构的研究(60736008),国家自然科学基金面上项目:自动颅像重合身份认证关键技术研究(61172170)资助。

李 康(1980—),男,博士生,讲师,主要研究方向为多媒体信息处理、三维可视化技术,E-mail:likang@nwu.edu.cn;尚 鹏(1986—),男,硕士生,主要研究方向为三维可视化技术;耿国华(1954—),女,博士,教授,主要研究方向为智能信息处理、数据库与知识库、图形图像处理。

分辨率的场合,但是该方法的缺陷是只能对特征比较明显的鼻尖点给出精确定位。文献[11]提出了相对角直方图法(RAC, Relative Angle-Context Distribution), 首先要求计算待标定特征点模型上每一个点的相对角直方图, 然后将其与标准模型上特征点的相对角直方图进行比较和匹配, 这样就可以获得该模型上对应的特征点。利用该方法标定的特征点是一个近似的位置, 并不精确。之后, 麻宏静^[12]对相对角直方图法进行了改进, 该方法首先利用 RAC 方法获得特征点的候选邻域, 然后, 在该范围内, 利用点的曲率、法向量以及有效能量等特征, 通过支持向量机(SVM)进行训练和学习, 最终在该邻域内精确标定特征点, 利用上述两步实现了从粗略估计到精准定位其显著的特征点, 但是该方法对于点数庞大的人脸模型定位显得比较困难。王蜜官等人提出了基于局部形状图^[13](Local Shape Map, 简称 LSM)的方法, 该方法利用了模型的局部几何信息, 根据形状索引和曲度等几何信息统计并筛选出可能成为特征的点作为候选集; 然后在统计模型的基础上, 通过对误差进行分析并从中自适应地计算局部形状图的半径, 这样就可以自动地标定鼻尖和眼角处的特征点。该方法受外界因素影响比较小, 标定结果优于其他基于人脸特征点几何拓扑关系的方法, 但是半径大小的选择对定位结果有很大的影响, 该值确定起来比较困难, 而且模型旋转过大时对眼角特征点定位会出现不合理的情况。

本文针对现有方法存在的问题, 将人脸三维模型的特征点标定转换为其对应二维深度图像特征点的标定, 将标定的结果通过三维与二维的关系进行映射, 从而获得三维模型特征点。

2 特征点标定算法流程

本文进行人脸模型特征点标定的主要流程如图 1 所示。

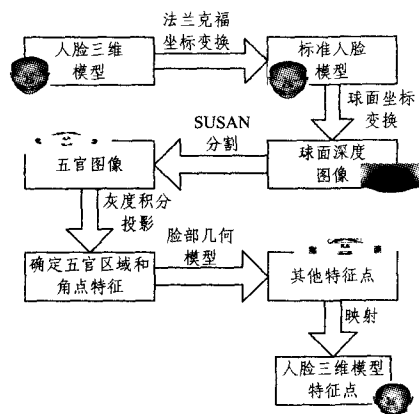


图 1 人脸模型特征点标定流程

主要包括 5 个步骤:

- (1) 法兰克福坐标变换。将模型坐标统一到法兰克福坐标系下, 以穿过耳中点的直线作为 Y 轴, 垂直于 Y 轴并且经过鼻尖点的法向为 X 轴正方向, 根据右手定则即可确定 Z 轴。
- (2) 球面深度图像。利用球面坐标变换生成球面深度图像, 建立三维人脸模型和二维深度图像之间的关系。
- (3) 图像分割。利用 SUSAN 算子分割五官区域。
- (4) 五官区域。利用灰度积分投影变换确定五官的矩形区域。
- (5) 特征点提取。标定特征明显的特征点, 通过将脸部几何模型“三庭五眼”和五官区域结合起来对其他特征点进行标

定。

(6) 映射。将二维深度图像中标定的特征点映射到人脸三维模型上, 就得到人脸模型的特征点。

3 人脸深度图像

3.1 球面坐标变换

空间一点在极坐标系下表示为 $P(r, \theta, \phi)$, 那么转换到直角坐标系下的方法如图 2 所示。

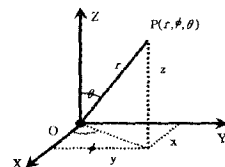


图 2 极坐标转化为直角坐标示意图

假设该点在直角坐标系内表示为 $P'(x, y, z)$, 那么 P' 用 P 表示为:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ 。上式建立了极坐标系表示转换为直角坐标系下表示的方法, 这样就可以将任意极坐标表示的点转换为直角坐标系表示。

3.2 球面深度图像

人脸模型的球面深度图像就是利用其包围球面对人脸模型进行一次全方位均匀采样, 根据其球面的极坐标确定深度图像的位置以及深度, 从而获得其深度图像, 具体步骤如下:

(1) 计算模型的质心。对于模型上的 n 个点 (x_i, y_i, z_i) , $i=1, 2, \dots, n$, 通过式(2)计算其直系的坐标 $P_c(x_c, y_c, z_c)$ 。

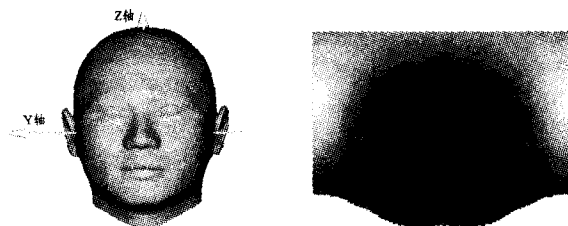
$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ y_c &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ z_c &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 求包围球的半径 r 。质心与模型点云之间的最大距离作为包围球的半径。

(3) 球面采样。以 P_c 为中心、 r 为半径的球面, 按照 θ 和 ϕ 的大小对球面进行顺序均匀采样, 并计算该点的直角坐标表示, 获得球面采样点和中心之间的线段与模型的交点, 将该点作为模型采样点。

(4) 深度图像。假设图像的分辨率为 (w, h) , 那么 (θ, ϕ) 处的采用点在深度图像上的位置为 $(h\theta/\pi, w\phi/2\pi)$, 深度由球心与采样点的距离决定, 同时建立采样点与二维深度图像之间的关系。

按照上面的步骤可以得到任意一个人脸三维模型的二维深度图像, 具体效果如图 3 所示。



(a) 人脸三维模型及其坐标系 (b) 模型对应的深度图像

图 3 人脸三维模型及其对应的深度图像

图 3(a)给出了一个经过法兰克福坐标系变换后的人脸三维模型;图 3(b)给出了其对应的二维深度图像,其分辨率为 256×128 ,从该深度图像中可以明显地看到鼻子、眼睛、嘴巴以及耳朵等特征显著的区域。

4 深度图像特征点自动标定

4.1 SUSAN 算子

SUSAN 算子^[4]是一种基于图像灰度的非线性滤波算子,其原理如图 4 所示,在背景为白色的矩形内有一个灰色的矩形。图中所示的模板(每个圆形模板都有一个圆心,称之为“核”)位于灰色矩形的 5 个不同位置即 a、b、c、d、e 处。

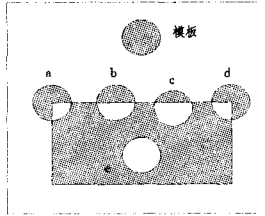


图 4 SUSAN 原理示意图

模板内每一个像素的灰度值都与核像素按照事先约定的规则进行比较,如果在给定的范围内,则认为该像素和核像素具有相似或者相近的灰度,将具有相似灰度的像素区域称为 USAN(Univalue Segment Assimilating Nucleus)。

在图像中,每个像素都与其周围局部灰度相似的区域联系起来,具体来讲就是 USAN,这就是 SUSAN 算子的基础。USAN 区域包括图像内许多局部结构信息,利用局部信息就可以对图像提取所需信息。如图 4 所示,USAN 的面积在局部像素灰度相似的区域达到最大(如图 4 中的 e),模板中心在边缘上时是最大值的一半(如图 4 中的 b),模板中心在角点处达到最小(如图 4 中的 a 和 d),正因为此,就将 USAN 面积作为图像检测的决定因素。

SUSAN 算子与其他普通算子一样,使用预先定义好的模板在图像上移动,当模板中心与图像中某个像素重合时,需要比较模板中心的像素灰度与模板内其他像素灰度的相似性:

$$s(p_x, p_0) = \begin{cases} 0, & |G(p_x) - G(p_0)| > t \\ 1, & |G(p_x) - G(p_0)| \leq t \end{cases} \quad (3)$$

其中, p_0 表示模板中心像素的位置, p_x 表示模板中非中心像素的位置; $G(p_0)$ 和 $G(p_x)$ 分别表示位置 p_0 和 p_x 处的灰度值; t 是比较两个灰度差值的阈值,也即图像特征检测的最小差值,同时也是局部检测区域噪声的最大值。 $s(p_x, p_0)$ 表示位置 p_x 和 p_0 处灰度相似与否,如果为 0,表示该两点处灰度不相似,否则表示相似。

依据模板内相似值 s ,可以获得在 USAN 中像素的总和,也即 USAN 的面积:

$$sq(p_0) = \sum_{p_x \neq p_0} s(p_x, p_0) \quad (4)$$

接下来需要将 sq 与一个固定的几何阈值 g 作比较,一般为 $3sq_{\max}/4$, sq_{\max} 为 sq 可以取得的最大值,通过下面的式(5)可以检测到初始边缘。

$$C(p_0) = \begin{cases} g - sq(p_0), & sq(p_0) < g \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

$C(p_0)$ 即图像的特征,也是 SUSAN 算子基本原理的数学表示。

该算法对于图像特征检测有很好的结果,但是 s 可以通

过一个更加稳定和灵敏的函数表示:

$$s(p_x, p_0) = e^{-\frac{(G(p_x) - G(p_0))^6}{t}} \quad (6)$$

该式比式(3)更加平滑,因为一个像素灰度微小的变化对 s 没有太大的影响。

4.2 基于 SUSAN 算子的五官分割

本文利用 SUSAN 算子分割出五官区域的具体步骤如下:

(1)人脸区域。采用 OTSU 方法进行图像二值化,获得人脸区域及其外轮廓。

(2)截取深度图像的人脸区域。将背景用白色表示,保留深度图像的其他部分即人脸区域。

(3)五官分割。对人脸区域进行 SUSAN 分割,得到五官区域。

(a)求阈值 t 。假设图像的最大灰度和最小灰度分别用 G_{\max} 和 G_{\min} 表示,那么在深度图像中 t 表示为:

$$t = (G_{\max} - G_{\min}) / 20 \quad (7)$$

(b)计算 USAN。当模板在图像上移动的过程中,按照式(4)计算 USAN 的大小。

(c)将式(5)改写为:

$$C(p_0) = \begin{cases} 255, & sq(p_0) < g \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

这样图像中就只包含两种像素值,达到了对图像分割的目的。

(4)五官区域定位。经过 SUSAN 算子分割后,人脸区域边缘也会被检测到,此时需要进行过滤。本文主要采用在人脸区域外轮廓上,以轮廓点为中心点,半径为 10 个像素,从半径开始向外找到与圆心灰度一致的点并将其设置为白色,剩下的就是五官部分。

SUSAN 算子分割的实验结果如图 5 所示。图 5(a)表示经过 OTSU 二值化后的结果,五官区域都在黑色区域内;图 5(b)表示从深度图像中截取出人脸感兴趣区域,可以看出感兴趣的五官区域都包含在其中;图 5(c)表示经过 SUSAN 算子分割之后的结果,包括五官以及人脸区域的轮廓,该结果包含的杂质少,五官轮廓清晰,便于特征检测;在此基础上删除人脸轮廓,之后就得到如图 5(d)所示的五官,背景中没有任何杂质,便于五官定位。

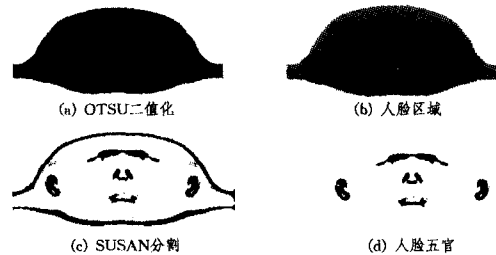


图 5 人脸五官分割

4.3 基于灰度积分投影的五官及特征定位

经过 SUSAN 算子分割出五官之后,接下来最重要的任务就是能够从中标定出五官区域,因为根据积分投影的极大点、极小点或者凹凸波形的起止点可以获得具有明显特征的区域,所以采用其来完成该项任务。

灰度积分投影^[15]包括水平灰度积分投影和垂直灰度积分投影,水平灰度积分投影就是在垂直坐标不变的情况下,对以它为垂直坐标的所有像素计算灰度值之和,也即在灰度图像中对某一行的像素灰度求和。垂直灰度积分投影就是在水平

平坐标不变的情况下,对以它为水平坐标的所有像素计算灰度值之和,也即在灰度图像中对某一列的像素灰度求和。

假设灰度图像用 G 来表示,其分辨率为 $m \times n$,那么 (x, y) ($x \in [1, m], y \in [1, n]$) 点处的灰度值用 $G(x, y)$ 表示,那么水平灰度积分投影 G_h 和垂直积分投影 G_v 在数学上表示为:

$$G_h = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y) dx, x \in [x_1, x_2] \quad (9)$$

$$G_v = \int_{y_1}^{y_2} G(x, y) dy, y \in [y_1, y_2]$$

在灰度图像中,因为像素的灰度值在矩阵中存放,所以上述式改写为:

$$G_h = \sum_{x_1}^{x_2} G(x, y) \quad (10)$$

$$G_v = \sum_{y_1}^{y_2} G(x, y)$$

根据深度图像中五官的分布情况,具体标定出五官区域的先后顺序为:耳朵、嘴巴、鼻子及眼睛。

具体来讲,首先对分割图像进行垂直积分投影,结果如图 6(a)所示,在该投影中找到第一个凹波形的起止点即为左耳朵区域的起止水平坐标,然后在该凹区域的水平坐标内进行水平积分投影,结果如图 6(b)所示,此时会得到一个凹波形,它的起止点为左耳朵的起止垂直坐标,这样就可以得到左耳朵所在的矩形区域。

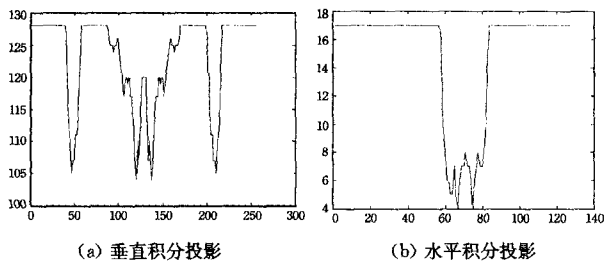


图 6 灰度积分投影

同理,也可以标定右耳朵的矩形区域,其定位结果如图 7 所示。



图 7 耳朵区域

当耳朵区域定位结束之后,就可以删除左右耳朵,剩余其他五官的分割图,如图 8 所示。因为嘴巴和鼻子之间没有重合的部分,所以此时可以先利用水平积分投影获得嘴巴区域的垂直坐标范围,然后在该区域内进行垂直积分投影得到嘴巴区域的水平坐标范围,这样就定位了嘴巴所在的矩形区域。



图 8 删除耳朵

同理可以得到鼻子、眼睛以及眉骨部分的矩形区域,五官定位结果如图 9 所示。



图 9 五官区域

因为 SUSAN 算子兼有特征点检测的功能,结合五官区域定位的结果,可以得到如图 10 所示的 11 个点,包括左右耳朵的 6 个特征点、2 个嘴角点、1 个鼻尖点以及 2 个外眼角点,内眼角点处的特征不明显而没有标定。具体来讲,耳朵区域的耳尖和耳垂底端点,分别是耳朵矩形区域的上下边界与该区域的交点,耳屏位于耳尖和耳垂底端点连线的中央;左右嘴角点位于嘴角矩形区域左右边界与该区域的交点处;鼻尖位于鼻子矩形区域下边界与该区域的交点处;两个外眼角点位于眼睛眉骨矩形区域与该区域的左右交点处。



图 10 五官角点特征

4.4 基于人脸几何模型的内眼角定位

因为在 SUSAN 算子分割五官的图像中很难确定内眼角点的位置,此时可以利用计算机人脸特征提取中常用的“三庭五眼”方法^[16]来近似定位。

它是根据人脸各部分的比例来确定的。如图 11 所示,所谓的“三庭”就是将额头发际线和颞底线之间的垂直长度记为单位 1,发际线到眉线、眉线到鼻底线以及鼻底线到颞底线之间的距离分别占该长度的 1/3。“五眼”是以一个眼睛的外眼角和内眼角之间的水平距离为单位 1,将左右两侧发际线之间的水平距离分为 5 个眼睛的长度,即左侧发际线到左眼外眼角、左眼外眼角到左眼内眼角、左眼内眼角到右眼内眼角、右眼内眼角到右眼外眼角以及右眼外眼角到右侧发际线的水平距离相等,都为一个眼的长度。

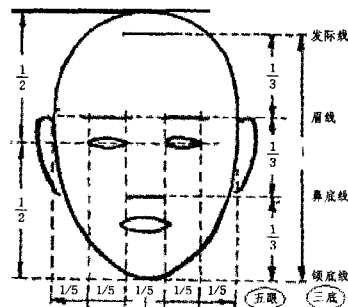


图 11 三庭五眼

在前面的方法中,已经获得左右外眼角点,根据“三庭五眼”中“五眼”可知,左右外眼角点之间的水平距离大约为 3 个眼睛的长度,这样就可以在外眼角确定的水平线上确定出两个内眼角的位置,结果如图 12 所示。



图 12 面部特征点

在该深度图像中,根据上述方法获得了两个内眼角点,同时将其他特征点也反映在该深度图像上。从直观的效果来看,标定出的特征点与其真实特征点的位置相吻合。

5 人脸模型特征点标定

在标定三维模型深度图像的特征点之后,需要将其映射到三维模型上,主要是利用球面坐标变换和模型采样的过程

中在三维模型和二维深度图像之间建立的关系进行映射,其映射关系如图 13 所示。对于人脸三维模型,首先求其包围球,对于包围球上的任意一点 (r, θ, ϕ) 变换到直角系表示为 (x, y, z) ,然后采样该点处对应模型上的点 (x_s, y_s, z_s) 。同时,通过极坐标也可以计算出该点在二维深度图像中对应的位置为 $(h\theta/\pi, w\phi/2\pi)$ 。在获得二维图像特征点后,也可以根据图像的位置计算出对应的 (θ, ϕ) ,进而可以计算出采样点的坐标,这样模型的采样点和图像位置之间就建立了一一对应的关系。

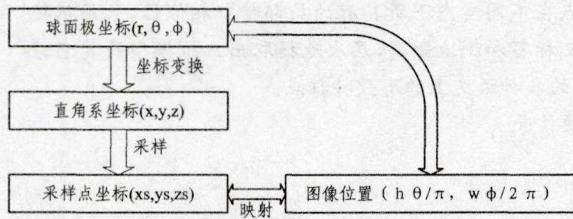


图 13 映射关系图

按照上面的对应关系,可以将深度图像中获得的特征点映射到三维模型中。映射之后,人脸三维模型的特征点如图 14 所示。

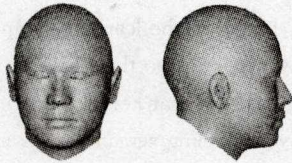


图 14 人脸模型特征点结果

从实验结果可以看出,映射到人脸三维模型的特征点基本都在预先定义的特征点附近,能够反映特征点的位置。

利用上述方法对多套人脸模型进行特征点标定,标定结果如图 15 所示。

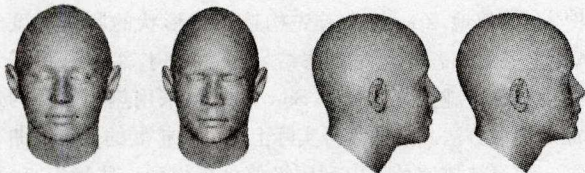


图 15 人脸模型特征点

结束语 本文方法利用三维人脸模型的二维深度图像的特征点标定很好地解决了三维特征点标定中的人工干预等问题,利用二维深度图像特征点标定的成熟算法,实现利用二维信息标定三维特征点的方法。该方法不需要手工参与,自动化标定了所需的特征点,从直观效果来看,达到了精确定位的目的。

[1] Jeng Shi-hong, Liao Hong-yuan, Han Chin-chuan, et al. Facial feature detection using geometrical face model: an efficient approach [J]. Pattern Recognition, 1998, 31(3): 273-282

[2] Cosar S, Cetin M. A graphical model based solution to the facial feature point tracking problem [J]. Image and Vision Computing, 2011, 29(5): 335-350

[3] Wong K W, Lam K M, Siu W C. An efficient algorithm for human face detection and facial feature extraction under different conditions [J]. Pattern Recognition, 2001, 34(10): 1993-2004

[4] Xue Zhong, Li S Z, Teoh E K. Bayesian shape model for facial feature extraction and recognition [J]. Pattern Recognition, 2003, 36(12): 2819-2833

[5] Shih F Y, Chuang C. Automatic extraction of head and face boundaries and facial features [J]. Information Sciences, 2004, 158: 117-130

[6] Zheng Zhong-long, Jiong Jia, Chunjiang Duanmu, et al. Facial feature localization based on an improved active shape mode [J]. Information Sciences, 2008, 178(9): 2215-2223

[7] Gizatdinova Y, Surakka V. Automatic edge-based localization of facial features from images with complex facial expressions [J]. Pattern Recognition Letters, 2010, 31(15): 2436-2446

[8] Zhou Yue, Li Yin, Wu Zheng, et al. Robust facial feature points extraction in color images [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2011, 24(1): 195-200

[9] Wang Yin-jie, Chua C S, Ho Y K. Facial feature detection and face recognition from 2D and 3D images [J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23(10): 1191-1202

[10] Xu Cheng-hua, Tan Tie-niu, Wang Yun-hong, et al. Combining local features for robust nose location in 3D facial data [J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27(13): 1487-1494

[11] Feng Jun, Ip H H S, Lai L Y, et al. Robust point correspondence matching and similarity measuring for 3D models by relative angle-context distributions [J]. Image and Vision Computing, 2008, 26(8): 761-775

[12] 麻宏静. 基于相对角聚类和支持向量机的人脸特征点定位技术研究[D]. 西安: 西北大学, 2010

[13] 王密宫, 陈锻生, 林超. 基于局部形状图的三维人脸特征点自动定位[J]. 计算机应用, 2010, 30(5): 1255-1258

[14] Smith S M, Brady J M. SUSAN—A New Approach to Low Level Image Processing [J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 23(1): 45-78

[15] 吴福培, 张宪民, 邝泳聪, 等. 无铅焊点鲁棒定位的灰度积分投影算法[J]. 华南理工大学学报, 2009, 37(9): 98-102

[16] 刘晓宁. 计算机辅助颅像重合技术的研究与实现[D]. 西安: 西北大学, 2003

(上接第 262 页)

[12] Chen S M. Similarity Measures between Vague Sets and between Elements [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1997, 27(1): 153-158

[13] Hong D H, Kim C A. A Note Similarity Measures between Vague Sets and between Elements. [J]. Information Sciences, 1999, 115: 83-96

[14] 李松, 郝忠孝. 含核 Vague 区域和 Vague 洞区域关系及蕴涵定理[J]. 计算机科学, 2009, 36(12): 171-175

[15] 张倩生, 蒋盛益. 基于 Vague 双向近似推理的系统决策方法[J].

计算机科学, 2010, 37(4): 219-223

[16] 王昌. Vague 集的模糊熵、相似度量 and 距离测度的关系[J]. 计算机科学, 2010, 37(10): 221-224, 274

[17] 韦波, 黎胜, 黎珍惜. 多测度 Vague 集相似度量[J]. 计算机科学, 2012, 39(7): 219-221, 241

[18] 张振华, 杨静宇, 叶有培, 等. 一种新区间值 vague 集及其在模式识别中的应用[J]. 计算机科学, 2011, 38(10): 194-198

[19] 徐凤生, 史开泉. Vague 集模糊熵度量的新构造方法[J]. 计算机科学, 2011, 38(9): 208-210