

Lévy Flight 的发展和智能优化算法中的应用综述



郑洁锋 占红武 黄巍 张恒 吴周鑫

浙江工业大学机械工程学院 杭州 310023

(2230231054@qq.com)

摘要 Lévy Flight 源自纯数学概念,目前已被广泛应用于许多领域,如物理、生物、统计、金融和计算机科学等。目前,国内尚无文献对 Lévy Flight 的发展及其在智能优化算法方面的应用进行总结。因此,文中首先回顾了 Lévy Flight 的发展情况和应用,介绍了 Lévy Flight 相关变体的基本原理和应用;然后着重讨论了近十年将 Lévy Flight 应用于智能优化算法的研究,对其应用的方法进行了分类分析;最后总结了 Lévy Flight 的未来发展趋势。文中的目的是让学者了解 Lévy flight 的基本原理和其在智能优化算法中的发展情况,同时促进 Lévy Flight 及其变体在众多学科尤其是计算机科学的发展和运用。

关键词: Lévy Flight; 莱维游走; 截尾莱维飞行; 智能优化; 随机搜索

中图分类号 TP391

Development of Lévy Flight and Its Application in Intelligent Optimization Algorithm

ZHENG Jie-feng, ZHAN Hong-wu, HUANG Wei, ZHANG Heng and WU Zhou-xin

College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China

Abstract Lévy Flight, originated from pure mathematical concepts, has been widely used in many fields, such as physics, biology, statistics, finance and computer science. At present, there is no summary of its development and application in intelligent optimization algorithm in China. Therefore, this paper reviews the development and application of Lévy Flight, and introduces the basic principle and application of Lévy Flight related variants. Then it focuses on the study of applying Lévy Flight to intelligent optimization algorithm in recent ten years, and classifies and analyzes its application methods. Finally, the future development trend of Lévy Flight is summarized. The purpose of the review is to let researchers understand the basic principle of Lévy Flight and its development in intelligent optimization algorithm, and to promote the development and application of Lévy Flight and its variants in many disciplines, especially in computer science.

Keywords Lévy Flight, Lévy Walk, Truncated Lévy Flight, Intelligent optimization, Random search

1 引言

多年来,物理、化学、数学的一些概念为研究生态现象提供了宝贵的工具。最初,Lévy Flight 是数学、物理研究的热门话题,它起源于数学相关的混沌理论。Lévy Flight 是以法国数学家保罗列维(Paul Lévy)的名字命名的,广义地讲,Lévy Flight (LF)是一种步长服从 Lévy 分布的随机游动。Lévy Flight 描述了一类随机游走,与常规随机游走不同的是,其步长服从 Lévy 分布,是一种幂律重尾分布,如 $L(s) \sim s^{-1-\lambda}$ 。其中, λ 是形状指数($0 \leq \lambda \leq 2$)。LF 最初被用于混沌物理现象的研究^[1]。随后,LF 在物理方面的研究和应用更加广泛,例如湍流扩散^[2]、混沌电子轨迹^[3]、异常扩散^[4]、热蒸汽光子^[5]、纳米粒子^[6]等。在生物学上,有学者发现动物觅食与 LF 理论之间存在着密切联系。随后,LF 觅食假说的产生引

起了大量学者对 LF 理论的研究与关注。目前,在很多动物上都发现了 LF 特征的存在,如蜜蜂^[7]、黑豆蚜虫^[8]、血吸虫^[9]、T 细胞^[10]、信天翁^[11],甚至在人类的行走模式中^[12]也发现了 LF 特征。越来越多的自然现象和人类现象可以用 LF 来描述,其成为了一个跨学科的概念。

优化是在给定约束条件的情况下,从众多解决方案中获得最佳结果的行为,优化问题几乎涵盖了所有科学和工程领域。传统的数学优化方法在处理复杂的优化问题时存在局限性,因此研究人员开发了很多智能优化算法来克服这些困难。智能优化算法在函数优化、经济调度、生产调度、控制工程、路径规划等领域取得了成功,各种算法的提出、改进和应用成为了国内外学者关注的热点。智能优化算法的灵感通常来自于大自然的规律和生物群体的行为,例如遗传算法源于生物的进化过程,蚁群算法源于蚁群的觅食行为,模拟退火算法源于

收稿日期:2020-05-28 返修日期:2020-09-09 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家重点研发计划(2018YFB1309404,2018YFB1309401)

This work was supported by the National Key Research and Development Program of China(2018YFB1309404,2018YFB1309401).

通信作者:占红武(waltzhan@hotmail.com)

退火过程中的物理规律等。目前,智能优化算法已发展为一类多学科交叉融合的优化方法,而其中部分智能优化算法的灵感与 LF 在自然界的各种发现密切相关,例如蜜蜂觅食行为中的 LF 特征与蜂群算法^[13-14]。因此,近十年,有大量学者在智能优化算法中引入了 LF 方法,以提升算法的性能。

本文第 2 节概述了 LF 的发展情况及其应用;第 3 节介绍了 LF 和其变体及应用;第 4 节讲述了 LF 在智能优化算法中的应用;第 5 节讨论了 LF 性能和应用方法;最后总结全文。

2 LF 的发展情况

Shlesinger 等^[15]被认为是首次认识 Lévy Flight“超扩散”的学者,他们在蚂蚁的觅食运动中观察到了类似 LF 的特征,LF 开始进入生物学的研究。Viswanathan 等^[16]在信天翁的觅食行为中发现飞行时间间隔呈现幂律分布,这份研究报告是创造性的。LF 觅食假说自此开始酝酿,众多学者开始研究 LF。然而,许多早期研究使用了不适当的统计技术,得出了错误的结论,从而错误地在许多物种上发现了 LF 特征。Edwards 等^[17]引入了健壮准确的替代统计方法来研究 LF。之后的研究都运用这些方法,越来越多的证据表明许多生物体具有 LF 特征。Reynolds 等^[18]记录下正在寻找蜂巢的蜜蜂的飞行路径,结果研究表明该飞行路径具有 LF 特征,并且证明了蜜蜂的这种飞行模式处于最佳搜索模式。他们又以性信息素为源研究蛾类飞行规律,实验结果表明其符合 LF 特征^[19]。Petrovskii 等^[8]分析了黑豆蚜虫的路径,结果表明个体主要以扩散的方式运动,种群的运动共同表现出 LF 特征。Bazazi 等^[9]分析了沙漠蝗虫血吸虫的间歇运动和 LF 特征。Harris 等^[10]的研究表明 T 细胞利用 Lévy 形式的搜索方法来优化对病原体弓形虫的控制。Humphries 等^[11]发现信天翁在觅食过程中表现出了 Lévy 模式。关于人类流动性的报告显示,人类步行的许多统计特征与 LF 相似^[12]。Lévy Flight 觅食假说影响了随后的很多研究,然而它可能并不涵盖生物界中所有的 Lévy 模式^[20]。一些研究表明,当猎物稀疏分布时,LF 是动物觅食过程中的最佳搜索策略。Sims 等^[21]的研究结果预测,白鲨表现出具有 LF 特征的运动是对稀疏猎物的适应。Humphries 等^[22]研究了二维 LF 的觅食和搜索效率,进一步说明了 LF 运动方式的优势,它能够在不可预测的环境中产生更多的资源。Reynolds^[23]认为 LF 觅食假说是临时的,应该用一个更加简单、更加笼统的假设加以补充或者代替。对于 LF 觅食假说是否为最佳的动物觅食策略,目前尚且没有明确的结论,其中还存在许多问题值得研究^[24]。但是,LF 作为一种随机游走的方法,在相对较大的空间尺度上仍能够很好地工作。在人类移动和认知的过程中,也有类似 LF 特征的情况。根据对在线票务跟踪网站的数据分析^[25]发现,人的流动性中存在幂律分布。自从有研究者进行人类的记忆恢复实验后^[26],在人类的认知过程中也有 LF 的特征现象。

Lévy Flight 已被应用于建模许多物理过程。Mercadier 等^[27]通过实验研究了热原子蒸汽中光子异常扩散的过程,证明了它遵循 LF 的基本特征。Pereyra^[28]建立了从皮肤组织反向散射的超声信号收敛到具有非高斯 α 稳定统计量的复杂

LF 随机模型。Volpert 等^[29]讨论了异常扩散的许多模型,包括 LF、截尾 LF 等。Grafov^[30]证明了 LF 可能是基于非高斯马尔可夫噪声构建的,并且符合概率论的中心极限定理。Baudouin 等^[31]认为原子共振的高质量因子和大多数普勒展宽之间的相互作用使光子产生 LF 现象,为研究原子物理学和天体物理学中的 LF 现象奠定了基础。Kharcheva 等^[32]研究了一维势和二维势中 LF 形式的异常扩散。Magdziarz 等^[33]介绍了基于 LF 的淬火陷阱模型,可用于描述静态环境中的 LF 动力学。纳米粒子的 LF 模型增强了纳米流体的对流传热能力^[34],为新型多孔介质的设计提供了思路。

近十年来,LF 在许多领域中得到了应用。基于 LF 的雷达扫描系统能够加快目标的检测速度,并且不需要对后续数据进行全面扫描,从而提升了系统的性能^[35]。高效搜索算法对机器人研究有重大作用,Sutanyo 等^[36]提出了一种基于 LF 搜索策略的人工势场方法,用于多机器人执行搜索任务。Deng 等^[37]介绍了一种用于复杂网络的新搜索策略,该策略基于 LF 随机游动,显示出了 LF 在随机搜索问题上的优势。Tomassini 等^[38]讨论了 LF 在二维网格上对空间进化游戏的影响,表明 LF 在博弈论也有一定的发展。Zhang 等^[39]提出了一种具有 LF 特性的四舵分配方法,可以解决局部最优问题,能够提供准确可靠的控制能力。Dey 等^[40]提出一种基于马尔可夫链模型的方法对电网进行分析,该方法利用 LF 原理来确定影响区域。在认知心理学中,带有重尾分布的 LF 扩散模型比 Wiener 扩散模型更适合实验数据^[41]。Beccar Varela 等^[42]使用 LF 理论和小波分析技术研究火山爆发过程中产生的地震信号的统计,实验结果表明用 LF 模型能够对地震释放的能量进行建模和分析。LF 独特的随机游走特征使得其在智能优化领域发挥了重要作用,许多算法的搜索策略源自于 LF 或者混合 LF,如布谷鸟算法^[43]、人类心理搜索算法^[44]、蛾搜索算法^[45]等。

此外,许多研究者提出了 LF 相关变体,如图 1 所示。在生物学文献中,Lévy Flight (LF)与莱维步行 (Lévy Walk, LW)基本表达同一个意思,而在物理学和数学的研究中,LF 和 LW 具有不同的意义。LW 在早期的研究中主要应用于经典混沌和非线性流体动力学。目前的研究发现人类移动具有超扩散性,人类步态与 LW 具有统计上相似的特征^[46]。Schelling 等^[47]通过 LW 所走的路径将数据点连接起来,将 LW 转化为寻找集群中心的有效方法,提出了一种新型聚类算法。另外,具有多个内部状态的 LW 可以有效地模拟不会立即移回其初始位置的粒子的运动^[48]。Mantegna 等提出了遵循比例关系的具有有限方差的随机过程,称为截尾莱维飞行 (Truncated Lévy Flight, TLF)^[49]。

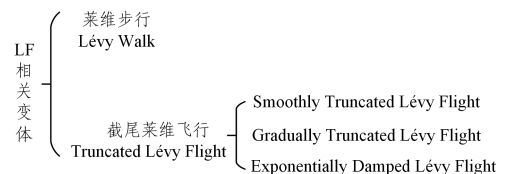


图 1 LF 的相关变体

Fig. 1 LF related variants

在 TLF 的基础上,出现了很多不同形式的变体。Smoothly Truncated Lévy Flight (STLF)^[50]建立在 Mantegna 等的思想的基础上,通过平滑指数回归实现了良好的解析形式。Gradually Truncated Lévy Flight (GTLF)^[51]由 Gupta 等提出,将其截尾与统计分布因子进一步结合,对于实际系统,给定大小的步长概率取决于统计因子和系统或其组件的物理限制。Exponentially Damped Lévy Flight (EDLF)^[52]先对 GTLF 进行修正,在正反馈情况下实现平稳逐渐偏离。TLF 被广泛应用于经济物理学^[53],其适用于描述交易量很大的发达市场的金融指数。Mariani 等^[54]使用 TLF 描述了发达市场和新兴市场接近崩溃时的金融指数的演变。Terdik 等^[55]应用了 STLF 和线性分形模型来检验互联网流量从自相似到 Poisson 的变化。Romanovsky 等^[56]对 TLF 进行了自然推广,阐述的理论与国际市场和俄罗斯股市的股票指数收益的经验数据非常吻合。Mariani 等^[57]使用了一种基于 TLF 模型的技术来研究地震相关的地球物理数据特征。Constantinides 等^[58]将 GARCH 过程和条件 TLF 相结合,建立混合模型,并且该模型显著地描述了不同时间段内的价格变化和相关的波动概率密度分布。Coelho 等^[59]用 TLF 和群体多样性度量策略改进 DE 算法的交叉变异操作,改进了控制参数 CR 和 MF,从而使算法有效地避免了过早收敛。他们将该算法应用于经济负荷分配问题,发现能够以更高的效率获得质量更好的解决方案。移动模型对多跳无线网络协议的仿真和评估至关重要,Cao 等^[60]提出了一种基于 STLF 的移动模型,并且从理论和经验角度证明了该模型更加准确。Pandey 等^[61]使用 TLF 对分子通信通道中的首次到达时间进行建模。机会犯罪通常具有一致的统计特性,可以使用定量工具对其进行建模,Pan 等^[62]针对一维度空间的住宅入室盗窃问题,提出了一种基于 TLF 的平均场连续模型,用于预测犯罪情况的犯罪热点分布,该模型比 URW 和 BRW 模型更有效。

3 LF 及其变体

3.1 Lévy Flight

在数学上,Lévy 分布可以被定义为:

$$L(s, \gamma, \mu) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \exp\left[-\frac{\gamma}{2(s-\mu)}\right] \frac{1}{(s-\mu)^{3/2}}, & 0 < \mu < s < \infty \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mu > 0$ 是最小步长; γ 是规模参数。当 $s \rightarrow \infty$ 时,可以得到:

$$L(s, \gamma, \mu) \approx \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{s^{3/2}} \quad (2)$$

Lévy 分布可以被定义为傅里叶变换的形式:

$$F(k) = \exp[-\alpha |k|^\beta], 0 < \beta \leq 2 \quad (3)$$

其中, α 是规模参数。式(3)只有在一些特殊情况下有解析形式。第一种特殊情况是 $\beta = 2$,可以得到 $F(k) = \exp[-\alpha k^2]$,它的傅里叶变换的倒数符合高斯分布。第二种特殊情况是 $\beta = 1$,可以得到 $F(k) = \exp[-\alpha |k|]$,它符合柯西分布。稳定分布族不能通过基本概率密度函数来描述,由以下积分显示其特征:

$$L(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\alpha |k|^\beta) \cos(qs) dq \quad (4)$$

$$L(s) \rightarrow \frac{\alpha \beta \Gamma(\beta) \sin(\pi\beta/2)}{\pi |s|^{1+\beta}}, s \rightarrow \infty \quad (5)$$

其中, $\Gamma(\beta)$ 是 Gamma 函数,一般情况下,当 s 的值很大时,可以得到:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (6)$$

当 $z = n$ 且为整数时,有 $\Gamma(n) = (n-1)!$ 。一般认为 LF 的生成过程包含两个步骤:方向的选择和服从 Lévy 步长的生成。方向的选择服从均匀分布,随机生成。在 LF 中,短距离步长与偶尔较长距离步长相间,用程序语言来表示 LF 比较困难,通常使用 Mantegna 算法、McCulloch 算法、Rejection 算法来模拟 Lévy 分布。在大部分情况下,对于对称的 Lévy 稳定分布最直接有效的方法是使用 Mantegna 算法^[63]。其中,对称的意思是运动方向可以是坐标轴的正方向也可以是坐标轴的反方向。

Mantegna 提出的算法中,步长 s 的计算公式为:

$$s = \frac{\mu}{|\nu|^{1/\beta}} \quad (7)$$

其中, μ 和 ν 服从正态分布,定义为: $\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2)$, $\nu \sim N(0, \sigma_\nu^2)$ 。 $\sigma_\mu = \left\{ \frac{\Gamma(1+\beta) \sin(\frac{\pi\beta}{2})}{\Gamma\left[\frac{(1+\beta)}{2}\right] \beta * 2^{\frac{(\beta-1)}{2}}} \right\}^{1/\beta}$, σ_ν 一般取 1。

$$\sigma_\nu = \left\{ \frac{\Gamma(1+\beta) \sin(\frac{\pi\beta}{2})}{\Gamma\left[\frac{(1+\beta)}{2}\right] \beta * 2^{\frac{(\beta-1)}{2}}} \right\}^{1/\beta}, \sigma_\nu \text{ 一般取 } 1.$$

一般把 LF 用于位置更新的公式,可以表示为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \alpha \oplus Levy(\lambda), i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

其中, x_i^t 表示第 t 代第 i 个个体的位置, \oplus 表示点对点乘法, α 为步长控制参数, $Levy(\lambda)$ 为服从 Lévy 分布的路径,并且 $Levy \sim \mu = t^{-\lambda-1}, 0 \leq \lambda \leq 2$ 。

3.2 Lévy Walk

本节对物理学中的 LW 进行了介绍。一般认为,LF 的飞行时间是恒定的,LW 的步行速度是恒定的。因此,在 LW 中,时间与长度成正比,LF 和 LW 之间的区别主要在于移动速度。

本文讨论的 LW 是连续时间随机游走模型的特例,假设粒子随机游走的速度是恒定的,移动的方向是不断改变的,位移 $x(t)$ 与时间 t 有关。在初始时刻 $t = 0$ 时,粒子以恒定速度 v 游走,然后随机选择一个方向进行下一次运动,这个过程被称为更新过程。粒子运动的持续时间的概率密度函数为 $\varphi(t)$,每次游走需要的时间间隔是独立的。如图 2 所示,假设粒子从 $t = 0$ 时刻开始运动, t_1, t_2, t_3, t_4 分别改变了一次方向,可以得出第一次运动花费的时间为 $\tau_1 = t_1$,第二次为 $\tau_2 = t_2 - t_1$,第三次为 $\tau_3 = t_3 - t_2$,第四次为 $\tau_4 = t_4 - t_3$ 。

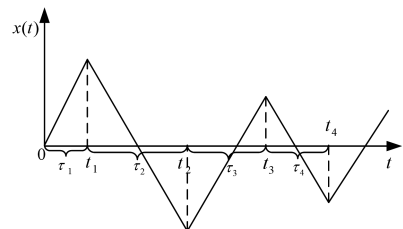


图 2 粒子位移图

Fig. 2 Particle displacement diagram

粒子在时间 $(0, t)$ 内,最后一步花费时间的分布函数为:

$$\int_0^t \varphi(t') dt' \quad (9)$$

粒子在 $(0, t)$ 时间内发生一次跳跃以后保持静止的概率为:

$$\Phi(t) = 1 - \int_0^t \varphi(t') dt' = \int_t^\infty \varphi(t') dt' \quad (10)$$

$\Phi(t)$ 有时被称为粒子在某个位置上的生存概率。引入时间-空间的耦合函数 $\psi(s, t)$,用于表示粒子花费时间 t 游走的距离为 s 。

$$\psi(s, t) = \frac{1}{2} \delta(|s| - vt) \varphi(t) \quad (11)$$

其中, $\varphi(t)$ 为等待时间的概率密度函数,服从 Lévy 分布,粒子移动速度 v 决定了跳跃的步长。LW 也可以定义为连续时间的随机行走,其转折点是相关 LF 的访问点,与 LF 不同的是, LW 包含完成每个飞行所花费的时间^[46]。

3.3 Truncated Lévy Flight

Lévy^[10] 和 Khintchine^[11] 解决了所有稳定分布都必须遵循的函数形式的问题, Truncated Lévy Flight 最一般的表示是通过特征函数 $\varphi(q)$ 来表示,如式(12)所示:

$$\ln(\varphi(q)) = \begin{cases} i\mu q - \gamma |q|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right], & \alpha \neq 1 \\ \mu q - \gamma |q| \left[1 + i\beta \frac{q}{|q|} \frac{2}{\pi} \ln|q| \right], & \alpha = 1 \end{cases} \quad (12)$$

其中, $0 \leq \alpha \leq 2$; $i = \sqrt{-1}$; γ 为正比例因子; μ 为实数; β 为不对称参数,其取值范围为 $[-1, 1]$ 。只有在 3 种特殊情况下才知道稳定的 Lévy 分布的解析形式: 1) Lévy-Smirnov 分布, $\alpha = 1/2, \beta = 1$; 2) Lorentz 分布, $\alpha = 1, \beta = 0$; 3) Gaussian 分布, $\alpha = 2$ 。在这里建立 TLF 时,只讨论均值为零 ($\mu = 0$) 的对称分布 ($\beta = 0$)。在这种情况下,特征函数采用以下形式:

$$\varphi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha} \quad (13)$$

分布的特征函数是其傅里叶变换,因此 α 和 γ 的稳定分布为:

$$P_L(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma|q|^\alpha} \cos(qx) dq \quad (14)$$

对于 $|x|$ 较大的情况,分布渐近性由以下计算式给出:

$$P_L(|x|) \approx \frac{\gamma \Gamma(1+\alpha) \sin(\pi\alpha/2)}{\pi |x|^{1+\alpha}} \approx |x|^{-(1+\alpha)} \quad (15)$$

$$P_L(x=0) = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha\gamma^{1/\alpha}} \quad (16)$$

TLF 分布的定义如下^[49]:

$$P_T(x) = \begin{cases} 0, & x < -l \\ C \cdot P_L(x), & -l \leq x \leq l \\ 0, & x > l \end{cases} \quad (17)$$

其中, C 是满足概率密度归一化条件的常数,即变化曲线下的总面积始终等于 1,并且当 $l \rightarrow \infty$ 时, $C \rightarrow 1$ 。TLF 的分布是不稳定的,但方差有限,收敛于高斯分布,收敛速度较慢。TLF 在分布的中央部分与 LF 类似,但远端的衰减比 LF 陡峭, TLF 实际上是在指定的位置进行截尾。

4 LF 在智能优化算法中的应用

LF 在很多智能优化算法中都能发挥重要的作用,有部分

算法是直接基于 LF 提出的,也有很多学者将 LF 策略引入智能优化算法中。同时,研究者发现基于 LF 的算法比其非 LF 同类算法表现出了更好的或等效的结果,尤其是 LF 策略能够在无法获得先验信息、目标难以确定且目标分布稀疏的情况下发挥重要作用。本节对近十年 LF 在智能优化算法中的应用进行了整理总结,如图 3 所示。表 1 列出了本节出现的部分符号的说明。

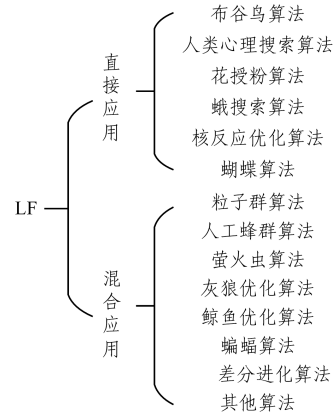


图 3 应用 LF 的算法

Fig. 3 Algorithm using LF

表 1 符号说明

Table 1 Symbol description

符号	含义
α	步长控制参数
x_i^t	第 t 代第 i 个个体的位置
x_i^{t+1}	第 $t+1$ 代第 i 个个体的位置
x_{best}^t	第 t 代最优个体的位置
x_{gbest}	全局最优解
v_i^t	第 t 代第 i 个个体的速度
\oplus	点对点乘法
Levy(λ)	LF 运动
s	LF 的步长
rand	$[0, 1]$ 之间的均匀分布
randn	$[0, 1]$ 之间的高斯分布
T	最大迭代次数
t	当前迭代次数
sign	符号函数
D	搜索空间维度
lb	搜索空间下界
ub	搜索空间上界

4.1 直接应用算法

4.1.1 布谷鸟算法

布谷鸟算法被用于许多领域,包括图像处理、负荷经济调度、组合优化、设计优化、数据挖掘等。布谷鸟算法由 Yang 等^[43] 提出,其主要思想来源于布谷鸟独特的繁殖方式。在布谷鸟算法中,鸟巢中的每个蛋都代表一个解决方案,其策略是不断使用更好的解决方案来代替鸟巢中不太好的解决方案。布谷鸟算法的具体步骤如下。

步骤 1(初始化) 设置鸟巢种群规模 n 、搜索空间维数 D 、最大迭代次数 T 、发现概率 p_a 、搜索精度 ϵ 等参数。随机初始化鸟巢的位置 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$, 定义适应度函数 $f(x)$ 。

步骤 2 计算每个鸟巢位置的适应度值并进行比较,

得到当前的最优函数值。

步骤3 利用 LF 方式对除最优鸟巢以外的其他鸟巢的位置和状态进行更新,计算适应度值,将获得的适应度值与当前的最优适应度值进行比较,若获得的适应度值较好,则更新当前最优值。

其中,位置更新公式为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \alpha \oplus Levy(\lambda) \quad (18)$$

由 Mantegana 算法计算的位置更新公式为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \alpha \cdot s \cdot (x_i^t - x_{best}^t) \quad (19)$$

步骤4 位置更新后,将随机数 r 与 p_a 进行比较,如果 $r > p_a$ 就以偏好随机游走的方式更新鸟巢位置,保留适应度较好的位置;若 $r \leq p_a$,则鸟巢位置不变。

步骤5 若满足最大迭代次数或搜索精度要求,则继续下一步,否则转回步骤3。

步骤6 输出全局最优鸟巢的位置。

4.1.2 人类心理搜索算法

人类心理搜索算法模拟在线竞拍空间的探索策略^[44],人类心理搜索算法用 LF 方法搜索每个解周围的区域,将解移向最佳区域,寻找更优解。Radicchi 等^[64]证明了人类在探索在线拍卖的竞价空间中有类似 LF 的特征。这种算法主要分为3个步骤:心理搜索、分组、移动。人类心理搜索算法的具体步骤如下。

步骤1(初始化) 设置种群规模 n 、搜索空间维度 D 、最大迭代次数 T 、搜索精度 ϵ 等参数,随机初始化投标,计算出价成本值。

步骤2(心理搜索) 为每个出价生成连续值,一部分新的出价是基于 LF 创建的。计算出价成本值,若新的出价更低则替换原出价,否则不变。产生新的出价的计算式如下:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + (2 - t * (2/T)) * 0.01 * s * (x_i^t - x_{gbest}^t) \quad (20)$$

其中, $(2 - t * (2/T))$ 是衰减因子,从 2 减少到 0。

步骤3(分组) 用聚类算法对出价进行分组。计算每个分组的平均成本值,选择平均成本值最低的小组作为赢家小组。

步骤4(移动) 选择赢家小组中的最佳出价,根据移动公式将其他出价移向它。计算出价成本值,新的出价更低则替换原出价,否则不变。

步骤5 若满足最大迭代次数或搜索精度要求,则继续下一步,否则转步骤2。

步骤6 输出全局最优出价。

在算法开始时,衰减因子较大,提高了算法的多样性,后期衰减因子变小,提高了算法的优化性能。对于每个出价,参数 β 在 0 到 2 之间分配一个随机数。目前,研究者已验证人类心理搜索算法在优化函数、工程问题、图像分割^[65]中的有效性。

4.1.3 花授粉算法

Yang^[66]根据花卉的授粉过程,提出了花授粉算法。授粉过程可以分为自花授粉或异花授粉。异花授粉指不同植物的花朵之间的授粉行为,自花授粉指同一植物的花朵之间的授

粉行为,而异花授粉可能发生在远距离,可以认为是全局授粉,而自花授粉被认为是局部授粉。花授粉算法^[67]的步骤如下。

步骤1 初始化种群规模 n 、最大迭代次数 T 、搜索空间维度 D 、切换概率 p 等参数,随机初始化种群。

步骤2 寻找初始种群的最优花粉。

步骤3 如果随机数 $r < p$,则进行异花授粉行为,遵循 LF 方法更新全局授粉;否则,进行自花授粉,随机更新局部搜索。计算适应度值,若更新后的解更优,则替换,否则解保持不变。

步骤4 若满足最大迭代次数或搜索精度要求,则继续下一步,否则转回步骤3。

步骤5 输出最优解。

全局授粉表示为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + s \cdot (x_i^t - x_{gbest}^t) \quad (21)$$

全局授粉时,昆虫携带花粉长距离飞行和移动,用 LF 来模拟昆虫授粉过程中的飞行行为。Gao 等^[68]研究了花授粉算法在 3 种随机游动模型下的搜索性能,结果表明 Cauchy 模型可以在低维测试函数上快速获得全局最优解,Gaussian 模型在多维单峰函数上实现了精度和时间的最佳平衡,LF 模型是多维单峰函数的最佳搜索策略。

4.1.4 蛾搜索算法

蛾搜索算法模拟飞蛾的趋光性特性,即靠近光源或远离光源的运动。研究人员在飞蛾的飞行过程中发现了 LF 特征,结合趋光性和 LF 特性^[19],提出了蛾搜索算法^[45]。蛾搜索算法将最优的飞蛾作为目标,将其置于停止移动状态,与最优飞蛾距离较小的飞蛾以 LF 方式围绕最优飞蛾运动,与其距离较远的飞蛾会直线飞向目标。蛾搜索算法的步骤如下。

步骤1 初始化种群规模 n 、最大迭代次数 T 、搜索空间维度 D 、最大步长 s_{max} 、适应度函数 $f(x)$ 等参数。随机产生初始种群。

步骤2 计算每个飞蛾的适应度值。

步骤3 根据适应度值对飞蛾个体进行排序,将其平均分成两个子种群。

步骤4 用 LF 方式更新子种群 1 中的所有飞蛾的位置,以直线飞行方式更新子种群 2 中的所有飞蛾的位置。根据更新后所有飞蛾的适应度值决定是否更新位置。

LF 更新位置的公式为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + (s_{max}/l^2) \cdot s \quad (22)$$

其中, s_{max} 表示最大步长,由问题给定。

步骤5 若满足最大迭代次数或搜索精度要求,则继续下一步,否则转回步骤3。

步骤6 输出最优解。

在大多数测试函数和工程应用中,蛾搜索算法可以更高效、更准确地搜索最优解,并且实现过程简单灵活。

4.1.5 核反应优化算法

核反应优化算法^[69]模拟物理的核反应过程,由核裂变和核聚变两个阶段组成。核裂变阶段指核与中子之间的高斯游

走和微分演化,核聚变阶段由电离和聚变组成。LF的变体在核聚变阶段应用,帮助算法逃离局部最优解。在核裂变阶段寻求在当前最优解附近的更好解,在核聚变阶段执行全局搜索。核反应优化算法的步骤如下。

步骤1 初始化种群规模 n 、最大迭代次数 T 、搜索空间维度 D 、适应度函数 $f(x)$ 等参数。随机产生初始种群。

步骤2 计算核的适应度值。

步骤3 核裂变阶段。计算中子,若发生裂变,则计算次级或初级裂变产物;否则,计算偶数核的非裂变状态,计算核的适应度值,利用精英策略更新种群。

步骤4 核聚变阶段。计算电离概率 p_a ,判断原子核是否发生电离,用 LF 方法更新电离状态和非电离状态,计算核的适应度值,更新种群。计算融合概率,若原子核发生电离,则产生融合核;否则用 LF 方法跳出局部最优,修改离子的非融合状态,计算核的适应度值,更新种群。

步骤5 若满足最大迭代次数或搜索精度要求,则继续下一步,否则转回步骤3。

步骤6 输出最优解。

在电离过程中,使用 LF 策略的更新方式为:

$$X_{i,d}^{lon} = X_{i,d}^{Fi} + (\alpha \oplus s)_d \cdot (X_{i,d}^{Fi} - X_{best,d}^{Fi}), X_{r2,d}^{Fi} = X_{i,d}^{Fi} \quad (23)$$

$$X_{i,d}^{lon} = X_{i,d}^{Fi} + (\alpha \oplus s)_d \cdot (ub_d - lb_d), X_{r2,d}^{Fi} \neq X_{i,d}^{Fi} \quad (24)$$

其中, $X_{i,d}^{lon}$ 表示电离后第 i 个离子的第 d 个变量, $X_{i,d}^{Fi}$ 表示第 i 个裂变核的第 d 个变量。

在融合过程中,使用 LF 策略的更新方式为:

$$X_i^{Fu} = X_i^{lon} + \alpha \otimes s \oplus (X_i^{lon} - X_{best}^{lon}) \quad (25)$$

其中, X_i^{Fu} 是第 i 个融合产物, $\alpha = 0.01$ 。利用 LF 策略进行随机搜索,可以避免各个阶段的局部最优解。核反应优化算法在约束工程设计问题上表现得准确、高效。

4.1.6 蝴蝶算法

蝴蝶算法^[70]是基于蝴蝶觅食的思想,蝴蝶通过感知不同花朵的味道来寻找合适的食物。蝴蝶算法的步骤如下。

步骤1 初始化种群规模 n 、最大迭代次数 T 、搜索空间维度 D 、适应度函数 $f(x)$ 、转换概率 p 等参数。随机初始化种群。

步骤2 计算蝴蝶个体的适应度值,找出最优的解。计算最优蝴蝶个体产生的香味浓度。

步骤3 如果随机数 $r < p$,则进行全局位置更新;否则进行局部位置更新。

步骤4 更新蝴蝶个体和全局最优解。

步骤5 若满足最大迭代次数或搜索精度要求,则继续下一步,否则转回步骤3。

步骤6 输出最优解。

蝴蝶算法中的全局搜索方法为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + (x_{gbest} - x_i^t) \times Levy(\lambda) \times F_i \quad (26)$$

其中, F_i 表示第 i 只蝴蝶的香味吸引程度。局部搜索的方法为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + (x_j^t - x_k^t) \times Levy(\lambda) \times F_i \quad (27)$$

其中, x_j^t 和 x_k^t 是第 t 次迭代过程中随机选择的两只蝴蝶的位

置。蝴蝶算法在探索和利用最优解方面具有优越的性能,并且收敛速度快,能够避免陷入局部最优。

4.2 混合应用算法

许多学者将 LF 机制混合应用到各种智能优化算法中,以发挥其优势。本文结合 85 篇文献对混合应用算法进行了综述,图 4 给出了各智能优化算法文献数的占比,LF 在这些算法中的应用方式如后文的表 2、表 3 所列。

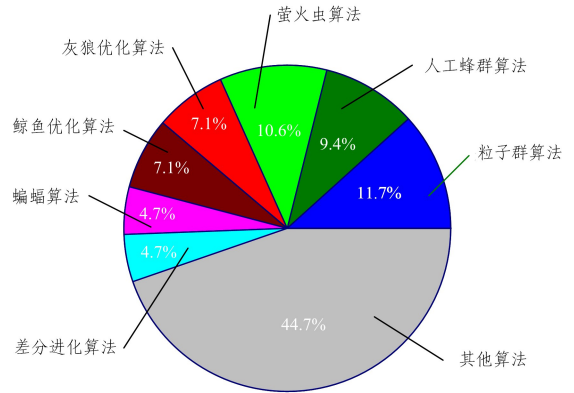


图 4 各智能优化算法的占比

Fig. 4 Proportion of intelligent optimization algorithms

表 2 部分算法中 LF 的应用方式

Table 2 LF application mode in some algorithms

原算法	参考文献	LF 的应用方式
粒子群算法	[71,76]	改进速度更新公式
	[79]	替换惯性系数
	[72-74,77]	条件判断,更新最差粒子位置
	[75,80]	以一定概率采用 LF 更新粒子位置
	[78]	对一部分粒子采用 LF 机制
人工蜂群算法	[13]	对一部分雇佣蜂采用 LF 机制
	[14,81]	更改初始化操作
	[82]	结合混沌理论更新雇佣蜂位置
	[83]	局部搜索策略
	[84]	以一定概率采用 LF 更新
	[85]	侦察蜂采用 LF 机制
	[86]	观察蜂采用 LF 游动
萤火虫算法	[87]	结合混沌理论更新位置
	[88]	引入到全局搜索算子
	[90-94]	更改原公式
	[96]	结合精英主义策略、反对学习理论
灰狼优化算法	[95]	增加全局搜索算子
	[89]	引入到围捕阶段
	[97]	引入到跟踪阶段
	[98]	引入到系数向量
	[99]	引入到狩猎策略
	[100]	结合正弦余弦算子后,再根据条件选择更新
	[103]	结合心理搜索算子,再根据概率选择更新
鲸鱼优化算法	[104]	引入到探索猎物阶段
	[107]	引入到狩猎和搜索阶段
	[108]	结合混沌理论引入到狩猎阶段
	[109]	引入到系数向量
	[105]	增加 LF 策略更新步骤
	[106]	引入到螺旋运动,再根据概率选择更新
蝙蝠算法	[110]	结合混沌理论引入到局部搜索
	[111]	替换随机分布
	[112]	引入到搜索过程
	[113]	初始化内部子群采用 LF 模型
差分进化算法	[114-116]	更改变异操作
	[59]	TLF 更改调节机制

表3 其他算法中 LF 的应用方式

Table 3 LF application in other algorithms

原算法	参考文献	LF 的应用方式
其他算法	[117-120,122]	引入到位置或速度更新公式
	[121]	概率选择,再更新位置
	[123]	更改恒星位置更新方式
	[124]	替换随机游走
	[125]	引入到局部搜索
	[129,132,137,139,141]	更改原位置更新公式
	[142,144,146,149-150]	
	[130]	引入到变异操作
	[131]	引入到交换操作
	[133]	引入到领导者位置更新
	[134,135]	更改地图和指南针算子
	[136]	引入到种群迭代阶段
	[140,153]	引入到步长算子
	[143]	建立信息共享机制
	[147]	引入到初始化操作
	[148]	引入到全局搜索算子
	[152]	结合混沌理论求涡流圆心
	[154]	引入到原子速度更新公式
	[126]	条件选择更新
[127-128]	增加 LF 策略更新步骤	
[138]	并行增加 LF 策略更新步骤	
[145,151]	概率选择更新	

4.2.1 粒子群算法

粒子群算法是受鸟群觅食过程的启发而提出的。该算法将鸟群中的个体称为粒子,不断迭代更新粒子的位置和速度,不断追寻个体极值和群体极值,直到得到满足终止条件的最优解。标准粒子群算法的粒子速度和位置更新方式为:

$$v_i^{t+1} = \omega * v_i^t + b_1 * rand * (p_i^t - v_i^t) + b_2 * rand * (x_{gbest} - v_i^t) \quad (28)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1} \quad (29)$$

其中, ω 为惯性系数, p_i^t 为第 i 个粒子在觅食过程中的个体极值, b_1 表示自我认知参数, b_2 表示社会认知参数。将 LF 策略引入粒子群算法,粒子群算法改进的方向主要有位置、速度、惯性系数。文献[71]将 LF 引入多目标粒子群算法,将速度的更新公式改进为:

$$v_i^{t+1} = \omega * v_i^t + b_1 * rand * (P_i^t - v_i^t) + b_2 * rand * (x_{gbest} - v_i^t) + s \quad (30)$$

文献[72]指出,在粒子的演化过程中,如果多次迭代更新粒子位置,粒子并没有得到改善,即 $Particle_flag \leq T$,则按照原算法更新粒子位置,否则用 LF 方式更新粒子位置。 $Particle_flag$ 表示粒子迭代没有得到改善的次数, T 为极限值。使用 LF 更新粒子的方式为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + S \quad (31)$$

$$S = \begin{cases} \alpha * s * (x_{gbest} - x_i^t), & rand > 0.5 \\ \alpha * s, & rand \leq 0.5 \end{cases} \quad (32)$$

文献[73]结合了正弦余弦策略和 LF 策略,先判断粒子经过多次迭代是否改善,再将正弦余弦与 LF 相结合来更新粒子位置,更新公式如下:

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} Levy(x_i^t) + r_1 \sin(r_2) |r_3 x_{gbest} - x_i^t|, & r_4 < 0.5 \\ Levy(x_i^t) + r_1 \cos(r_2) |r_3 x_{gbest} - x_i^t|, & r_4 \geq 0.5 \end{cases} \quad (33)$$

$$Levy(x_i^t) = x_i^t + 0.01 * s \oplus x_i^t \oplus rand(size(x_i^t)) \quad (34)$$

其中, r_1, r_2, r_3 是随机数。文献[74]用式(35)更新粒子位置:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + 0.01 * s * (x_i^t - x_{gbest}) \quad (35)$$

文献[75]中,粒子的新状态计算式如下:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^t + \alpha * sign(rand - 0.5) \oplus Levy(\lambda) \quad (36)$$

文献[76]将速度更新公式更改为:

$$v_i^{t+1} = \omega * Levy(\lambda) + b_1 * rand * (p_i^t - x_j^t) + b_2 * rand * (x_{gbest} - x_j^t) \quad (37)$$

文献[77]中的算法在每次迭代中,群中最坏的粒子都是目标,并且它的位置通过 LF 来更新,更新方式如式(18)所示。文献[78]对一部分粒子采用 LF 机制,以避免局部最优,并确保搜索空间的多样性。粒子的更新方式如式(18)所示。文献[79]提出了一种新的粒子群优化方法,将 LF 应用于惯性系数,将惯性系数设置为随机变量并且其具有 Lévy 分布。文献[80]提出了一种基于 LF 和随机搜索的改进粒子群算法,LF 的更新方式如式(18)所示,随机搜索方法为布谷鸟算法。

4.2.2 人工蜂群算法

人工蜂群算法是模拟蜜蜂采蜜行为而提出的,组成因素有雇佣蜂、观察蜂和侦查蜂。每个雇佣蜂对应一个解,在迭代中对食物源的邻域进行搜索。观察蜂根据食物源的丰富程度对解进行改进。侦查蜂不断且随机地在蜂巢附近寻找蜜源。LF 策略对人工蜂群的改进主要用在初始化阶段、雇佣蜂阶段、观察蜂阶段。文献[81]使用 LF 对人工蜂群算法进行初始化:

$$x_{ij}^{t+1} = x_{ij}^t + \alpha \oplus Levy(\lambda) \quad (38)$$

文献[82]采用混沌映射和 LF 相结合的方法更新雇佣蜂,更新公式为:

$$v_i^t = x_i^t + (\alpha(g) \oplus Levy(\lambda)) * (x_i^t - x_{gbest}) \quad (39)$$

$$\alpha(g+1) = 4 * \alpha(g) * (1 - \alpha(g)) \quad (40)$$

文献[83]提出基于 LF 随机游走的局部搜索策略,并与反对学习理论相结合,更新方式如式(38)所示。文献[14]基于斑块概念和 LF 初始化算法中的蜜蜂种群,模拟蜜蜂在自然界的真实觅食情况,使得蜜蜂群体的移动更自然,与自然界接近。文献[13]将雇佣蜂分为两部分,一部分根据原始算法采集区域的最优信息,另一部分围绕当前全局最优解进行 LF 游动,如式(18)所示。文献[84]中,观察蜂考虑适应度值的情况,若适应度值较差,观察蜂就会以一定概率以 LF 形式游动。文献[85]的多目标蜂群算法中,侦察蜂更新位置公式用 LF 方法代替 Rw 函数。文献[86]中的观察蜂阶段采用 LF 游动,如式(18)所示。

4.2.3 萤火虫算法

萤火虫算法是模拟萤火虫的闪烁吸引行为,萤火虫会聚集在最亮的个体附近,较亮的萤火虫具有较大的吸引力。基于这种特性,萤火虫算法依靠个体之间的吸引来移动位置,通过不断移动更新位置,最终趋于最优解。萤火虫的相对光亮度为:

$$I = I_0 \times e^{-\gamma r_{ij}} \quad (41)$$

其中, I_0 表示萤火虫自身的亮度, γ 表示光强吸收系数, r_{ij} 表示萤火虫个体 i 和 j 之间的距离。萤火虫的吸引度公式为:

$$\beta = \beta_0 \times e^{-\gamma r_{ij}^2} \quad (42)$$

其中, β 表示萤火虫的吸引度; β_0 是光源处的吸引度, 即最大吸引度。文献[87]将混沌理论与 LF 相结合, 然后引入萤火虫算法中, 如式(43)、式(44)所示:

$$c_s(t+1) = 4.0 \times c_s(t) \times (1 - c_s(t)), 0 \leq c_s(0) \leq 1 \quad (43)$$

$$x_i = x_i + \beta \cdot (x_j - x_i) + c_s \oplus Levy(\lambda) \quad (44)$$

文献[88-89]将 LF 方法作为全局搜索算子, 提高了传统萤火虫算法的性能, 全局搜索公式如式(18)所示。文献[90-94]将位置更新公式修改为:

$$x_i = x_i + \beta(x_j - x_i) + rand \cdot sign[rand - 1/2] \oplus Levy(\lambda) \quad (45)$$

文献[95]用精英主义策略、LF 策略和反对学习理论来改进基本萤火虫算法, 其中 LF 策略的更新方式如式(45)所示。在目标稀疏分布情况下, LF 具有更好的搜索性能, 受此启发, 文献[96]用萤火虫算法改善 LF 性能, 该方法被成功用于水下机器人的部署, 对机器人运动的分布模式进行优化。

4.2.4 灰狼优化算法

灰狼优化算法模拟自然界中灰狼的领导层结构和猎杀机制。狼群社会等级层次制度中, 第一层为领导者 α , 是具有管理能力的个体; 第二层为智囊团 β , 协助 α 进行决策; 第三层为 δ , 听从 α 和 β 的命令; 最底层是 ω , 负责种群内部关系的平衡。狼群的狩猎过程主要包括跟踪、包围、攻击。文献[97]先进行混沌初始化操作, 然后在狼围捕阶段引入 LF 特性, 位置更新方式如下:

$$x_i^{t+1} = x_{gbest} + rand * s * |x_{gbest} - x_i^t| \quad (46)$$

文献[98]改进的算法将 LF 引入到跟踪阶段, 位置更新方式如下:

$$S = 0.01 \times s \times (\bar{X} - \bar{X}_\alpha) \quad (47)$$

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_\alpha + S, \bar{X}_2 = \bar{X}_\beta + S, \bar{X}_3 = \bar{X}_\delta + S \quad (48)$$

$$\bar{X}(t+1) = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3}{3} \quad (49)$$

其中, \bar{X}_α , \bar{X}_β 和 \bar{X}_δ 分别表示 α , β 和 δ 的当前位置, \bar{X} 表示当前灰狼的位置, $\bar{X}(t+1)$ 表示 ω 的最终位置。

文献[99]在灰狼算法中引入 LF 方法, 使得系数向量的取值不再是线性下降, 而是按照 Lévy 分布, 其计算方式如下:

$$A = Levy(S) * r_1 \quad (50)$$

其中, S 是狼的位置, r_1 是随机向量。

文献[100-101]将灰狼的狩猎策略与二项式交叉杂交, 再引入 LF 策略更新每一只狼的位置, 位置更新方式如下:

$$\bar{X}_{t+1} = \bar{X}_t + \alpha \times s \times (\bar{X}_t - \bar{X}_\alpha) \quad (51)$$

文献[102]结合了 LF 策略和正余弦算子, 正余弦算子与 LF 策略能够相互协调。改进算法中, LF 的位置更新公式如式(18)所示。文献[103]的改进算法针对寻优过程中的领导层灰狼根据概率选择更新操作, 其中一个操作就是 LF。

4.2.5 鲸鱼优化算法

鲸鱼优化算法(WOA)是模拟座头鲸的捕猎行为而提出的, 座头鲸利用 bubble-net 狩猎方法将猎物吞下, 整个捕食过程可以分成 3 个阶段: 包围猎物、狩猎行为、搜索猎物。文献[104]中, 在探索猎物阶段, WOA 利用 LF 增强全局优化能力, LF 用于更新座头鲸的位置, 公式如下:

$$x_i^{t+1} = x_{rand}^t + sign[rand - 1/2] \times 0.01 \times s \times [x_{rand}^t - x_i^t] \quad (52)$$

其中, $sign$ 函数有 3 个取值, 即 $-1, 0, 1$, 其本质上表示方向。 x_{rand}^t 是从当前一代中随机选择的位置向量。文献[105]将更新公式表示为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + rand \times sign[rand - 1/2] \oplus Levy(\lambda) \quad (53)$$

文献[106]将 LF 引入鲸鱼优化算法中的螺旋运动中, 则狩猎行为的数学描述为:

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} x_{gbest} - A \cdot \vec{D}, & rand < 0.5 \\ s \times (x_i^t - x_{gbest}) + x_i^t, & rand \geq 0.5 \end{cases} \quad (54)$$

文献[107]将狩猎行为和搜索猎物模型分别修改为:

$$x_i^{t+1} = x_{gbest} - randn \cdot s \cdot \vec{D} \quad (55)$$

$$x_i^{t+1} = x_{rand}^t - randn \cdot s \cdot \vec{D} \quad (56)$$

文献[108]在狩猎行为中引入 LF 和混沌理论的数学描述为:

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} x_i^t + (x_{gbest} - randn \vec{D}) \cdot Levy(\lambda), & p < 0.5 \\ x_i^t + (De^{bl} \cos(2\pi l) + x_{gbest}) \cdot Levy(\lambda), & p \geq 0.5 \end{cases} \quad (57)$$

其中, $A = 2a \cdot r - a$, $C = 2 \cdot r$, r 是 $[0, 1]$ 之间的随机数, $D = |C \cdot x_{rand}^t - x_i^t|$, $D = |x_{gbest} - x_i^t|$, b 用来定义螺旋线的形状, l 是 $[-1, 1]$ 之间的随机数, p 是 $[0, 1]$ 之间的随机数。文献[109]修改系数向量 \vec{C} 使其服从 Lévy 分布。

4.2.6 蝙蝠算法

蝙蝠算法是模拟自然界中蝙蝠的特征而设计的, 蝙蝠利用自身的“声纳”来探测猎物, 采用回声定位原理避免障碍物。研究者将蝙蝠的移动和搜寻过程模拟成优化和搜索过程。文献[110]将混沌理论与 LF 相结合, 以改进蝙蝠对最优解区域的局部搜索, 搜索更新方式如下:

$$x_i^t = x_i^{t+1} + c_s \otimes Levy(\lambda) \quad (58)$$

$$c_s(t+1) = 4.0 \times c_s(t) \times (1 - c_s(t)), 0 \leq c_s(0) \leq 1 \quad (59)$$

文献[111]将局部搜索更新方式改为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + Levy(\lambda) \cdot A_i^* \quad (60)$$

其中, A_i^* 是 t 迭代次数下所有蝙蝠的平均响度。

文献[112]在搜索过程中引入 LF 方法来更新蝙蝠的位置, 其计算式如下:

$$x_i^{t+1} = v_i^t + 0.01 \times s \times x_i^t \quad (61)$$

文献[113]在初始化时将蝙蝠种群设置成双子群, 在外部子群采用动态权重模型, 在内部子群采用 LF 模型。内部开发小组用于提高本地开发能力, 其更新形式如下:

$$\begin{cases} f_i = f_{\min} + (f_{\max} - f_{\min})rand \\ v_{ij}^k = v_{ij}^{k-1} + Levy(\lambda) \otimes (x_{gbest}^k - x_{ij}^{k-1}) f_i \\ x_{ij}^k = x_{ij}^{k-1} + v_{ij}^k \end{cases} \quad (62)$$

其中, f_{\max} 和 f_{\min} 分别表示频率的最大值和最小值; v_{ij}^k 表示在第 k 次迭代时, 第 i 个蝙蝠的第 j 个速度的变化值; x_{ij}^k 和 x_{ij}^{k-1} 是位置变量。

4.2.7 差分进化算法

差分进化算法模拟生物进化的随机模型, 保存适应环境的个体, 主要根据个体之间的差异实现个体进化。差分进化

算法主要包括变异、交叉、选择 3 个操作,通常在变异操作中引入 LF 来改善原始算法的性能。文献[114-116]将变异操作更新为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + F \times (x_j^t - x_k^t) + 0.001 \times s \times SLC \times (x_j^t - x_k^t) \quad (63)$$

其中, F 是变异因子, SLC 表示社会学习组件。文献[59]结合变体 TLF 随机游动来改进差分进化算法,其主要目的是改善突变因子和交叉率之间的调节机制:

$$SM_d = (1 - \text{div}_d(k)) \cdot \ln\left(\frac{1}{u}\right) \quad (64)$$

其中, $\text{div}_d(k)$ 是解向量第 d 维的归一化参数, u 是 TLF 生成的值, SM_d 表示改进的突变因子。

4.2.8 其他算法

由上文可知,许多算法会直接应用式(18)对算法中的个体位置或速度等进行更新,以提升算法的全局搜索能力、收敛速度和种群的多样性,例如蚱蜢优化算法^[117]、磷虾群算法^[118]、和声算法^[119]、分布估计算法^[120]、果蝇优化算法^[121]、生物地理优化算法^[122]。

文献[123]将 LF 引入黑洞算法中,每颗恒星的运动由 LF 决定,改进后的恒星位置更新方式为:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + (0.01 \times s \times \text{rand} \times (x_{gbest} - x_i^t)) \quad (65)$$

文献[124]将原始恒星位置更新后,通过 LF 局部搜索算子更新其位置,计算方式如下:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + 0.015 * \text{sign}(\text{rand} - 1/2) \oplus s \quad (66)$$

文献[125]在混合蛙跳的局部搜索步骤中采用基于 LF 的吸引子,更新最差的青蛙位置,以提高算法的局部搜索能力。更新公式如下:

$$x_w' = x_w + \text{rand} \cdot (\text{rand} \cdot \text{randn} \cdot s \otimes x_{gbest} - x_w) \quad (67)$$

其中, x_w 表示最差的青蛙位置。文献[126]采用类似的思想,将青蛙种群根据适应度排序分成两个子群,前半部分采用随机微分更新法,后半部分采用 LF 方式更新:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \text{rand} * s \oplus (x_{best} - x_i^t) \quad (68)$$

其中, x_{best} 表示子群中最好的解。

文献[127-128]中改进正弦余弦算法的策略是应用 LF 产生新的解,具体计算方式如式(18)所示。LF 用于扩展搜索过程以发现新的区域,这是绕过停滞状态和防止陷入局部最优的最佳保证。文献[129]用 LF 来提高正弦余弦算法的性能,替换的更新方式如下:

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} x_i^t + r_1 * \sin(r_2) * |r_3 x_{gbest} - x_i^t|, & \text{rand} < 0.5 \\ s \cdot (x_i^t - x_{gbest}) + x_i^t, & \text{rand} \geq 0.5 \end{cases} \quad (69)$$

其中, r_1 , r_2 和 r_3 是随机数。文献[130]利用 LF 优化变异算子,从而提高遗传算法的搜索能力,变异操作如式(18)所示。文献[131]提出了一种基于 LF 的遗传算法,基于 LF 的算法是一种连续优化技术,因为使用的基因是离散值,所以不能直接适应 LF 的概率密度函数。文献[131]通过以下规则重新定义了飞行长度:如果一条染色体 a 进行了 m 次交换操作,那么由此产生的新染色体为 B , m 是 a 和 B 之间的飞行长度,交换操作的次数就是搜索空间上的飞行长度。更新解决方案时,交换操作的数量为:

$$m = \begin{cases} [L] + 1, & l < L/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (70)$$

其中, L 是染色体的长度,执行 m 次交换操作。文献[132]将 LF 策略引入到 Salp Swarm 算法中,以提高全局搜索能力。Salp 的位置更新公式如下:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + 0.01 \cdot s \cdot x_i^t \cdot \text{rand} \quad (71)$$

文献[133]对 Salp 领导者位置进行更新,更新公式为:

$$x_i^t = F + c[(ub_i - lb_i) \oplus \text{Levy}(\lambda) + lb_i] \quad (72)$$

其中, c 为收敛因子。

文献[134-135]中的算法利用 LF 扩展解的多样性,改进鸽子启发式算法中的地图和指南针算子:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + s \oplus (x_i^t - x_{gbest}) \cdot \text{randn} \quad (73)$$

文献[136]为避免 Jaya 算法陷入局部最优解,将 LF 纳入种群迭代阶段,将 LF 应用于当前迭代的每个变量,计算形式如下:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + 0.01 \times s \times (x_i^t - x_{gbest}) \times \text{rand}(\text{size}(x_i^t)) + \text{rand} \times (x_{gbest} - |x_i^t|) - \text{rand} \times (x_{worst} - |x_i^t|) \quad (74)$$

文献[137]用 LF 随机游动代替蚁狮算法中的均匀分布随机游动,提高了算法全局寻优的局部搜索能力。文献[138]在蚁狮算法过程中新增并行的 LF 搜索策略,然后将其与原算法生成的解进行对比,以选择更合适的解。文献[139]用 LF 代替原算法中的随机游走机制。文献[140]提出的文化算法是一种超启发算法,其明确利用信念空间中的知识作为指导改进搜索的重要组成部分,并将 LF 搜索的模糊系统作为一个新的组成部分。改进后的方法用于指导个体在搜索空间的开发,步长自适应改变且符合 Lévy 分布:

$$\tau(g) = 0.0018 \times \text{Levy}(\lambda) \times CLC \quad (75)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \tau(g) \times \text{rand} \quad (76)$$

其中, CLC 是文化学习的组成部分。文献[141]提出了一种基于 LF 的多宇宙优化算法,通过 LF 对黑洞/白洞进行远距离改造,该算法将在更广阔的宇宙跳出局部最优,改造的计算式如下:

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} x_i^t + TDR \times ((ub_i - lb_i) \times \text{Levy}(\lambda) + lb_i), & \text{rand} < H \\ x_i^t - TDR \times ((ub_i - lb_i) \times \text{Levy}(\lambda) + lb_i), & \text{rand} \geq H \end{cases} \quad (77)$$

其中, TDR 是动态参数; H 是极限值,取 0.5。

动物迁徙优化算法是动物从一个地方迁徙到另一个地方寻找食物和安全栖息地的过程,主要分为迁移阶段和动物数量更新阶段。文献[142]提出了用 LF 策略改进动物迁徙优化算法。一般情况下,LF 产生的步长很大,导致解出了边界,故使用一个乘法器 0.0001 来减小步长。全局搜索算法还使用了社会学习组件 SLC ,全局搜索算法的更新公式如下:

$$x_i^{t+1} = x_j^t + \text{rand} \times (x_{gbest} - x_i^t) + 0.0001 \times s \times SLC \times (x_k^t - x_i^t) \quad (78)$$

文献[143]提出一种基于 LF 的回溯搜索算法,建立了一种基于 LF 的信息共享机制,增强了种群多样性。信息共享机制的计算式如下:

$$v_i = \begin{cases} x_i + s \cdot (x_{old} - x_i), & 0 \leq rand \leq 1/3 \\ x_i + s \cdot (x_j - x_k), & 1/3 < rand \leq 2/3 \\ x_i + rand \cdot (x_{gbest} - x_i), & 2/3 < rand \leq 1 \end{cases} \quad (79)$$

其中, j 和 k 是随机选择的 1 至 N 之间的数。式(79)第一行由历史人口生成,第 2 行由当前人口产生,第 3 行表示当前最优个体引导产生新解。文献[144]针对乌鸦搜索算法中每个个体的位置根据两种行为进行调整,用感知概率决定乌鸦进行追击还是选择逃避,并引入了 LF 的位置更新方式:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + 0.01 - s \oplus (x_i^t - x_{gbest}^t) \quad (80)$$

文献[145]指出 LF 适合于远离全局最优值的乌鸦个体,具有较强的开发能力。其通过选择性因子判断是否使用 LF 方法,对远离全局最优个体进行邻域搜索,以提高算法的局部开发能力,具体更新方式如下:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + Levy(D) \cdot s \cdot x_i^t \quad (81)$$

文献[146]用 LF 策略代替鸟群算法中的随机行走策略:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + (x_j^t - x_k^t) \cdot s \cdot rand \quad (82)$$

文献[147]利用 LF 改进鸟群算法的初始化操作,保证了初始种群的多样性:

$$x_i = lb + (ub - lb) \times \alpha \times s \quad (83)$$

文献[148]在入侵杂草优化算法中利用 LF 机制作为空间搜索过程中的全局搜索算子,使用该算子的更新方法如下:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + N(0, \sigma_i^2) + s \cdot rand \quad (84)$$

文献[149]用 LF 策略更新大象位置,便于象群优化算法跳出局部最优,位置更新公式如下:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + Levy(\lambda) + \alpha \cdot (x_{gbest}^t - x_i^t) \cdot rand \quad (85)$$

文献[150]提出一种新的经济调度算法,利用 LF 策略丰富更新过程,新的粒子位置计算式为:

$$x_i^{t+1} = rand \cdot \mathbf{F}_i + rand \cdot k_v \cdot v_i + 0.01 \cdot s \cdot (x_{gbest}^t - x_i^t) + x_i^t \quad (86)$$

其中, \mathbf{F}_i 表示第 i 个粒子的力矢量, k_v 为线性下降函数。文献[151]在自私兽群优化算法中加入 LF 策略,提高了其全局搜索能力和精度。当兽群受到捕食者的攻击时,领导者以一定概率命令兽群进行 LF 操作,使得兽群得到分散,避免了巨大的损失。在领导者更新过程中加入 LF 操作,可以更好地模拟被捕食者攻击时兽群的逃逸状态。领导者的位置更新方式如下:

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} x_i^t + rand(size(D)) \oplus (0.01 \cdot s \cdot (x_i^t - x_{gbest}^t)), & \vartheta < 0.5 \\ x_i^t + c^k, & \vartheta \geq 0.5 \end{cases} \quad (87)$$

其中, ϑ 在 $[0, 1]$ 之间, c^k 是执行算法原来的位置更新操作。

涡流搜索算法的灵感来自于由搅拌流体的涡流形成的涡流模式。文献[152]用 LF 结合混沌理论改进涡流搜索算法,其用 LF 策略求圆心,因为 LF 在不确定环境下能够最大限度地提高资源搜索过程的效率。求圆心的方式如下:

$$x_i^t = x_{gbest}^t + 0.01 \times s \times (x_{gbest}^t - x_i^t) \times rand \quad (88)$$

文献[153]改进了细菌觅食算法,每个细菌移动的长度由 LF 决定。迭代开始时,较大的步长搜索效率高,到了迭代后期,较小的步长可以对解进行微调。改进的细菌趋化运动方式为:

$$L = \frac{\omega}{t} \cdot |s| \quad (89)$$

其中, ω 控制步长的权重。该算法采用全局最优解来指导细菌的运动:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + (x_{gbest}^t - x_i^t) \cdot L \cdot \Delta'(i) \quad (90)$$

其中, Δ' 是改进的翻滚方向,每个细菌随机选择一个维度翻滚,以减小不同维度之间的相互干扰。文献[154]在原子搜索算法中用 LF 更新原子的速度方程:

$$v_i^{t+1} = \omega \cdot rand \cdot v_i^t \cdot 0.01 \times s \times (x_i^t - x_{gbest}^t) + rand(g_i^t - x_i^t) + a_i \quad (91)$$

其中, a_i 为原子的加速度, g_i^t 为相邻原子的最佳位置。

5 讨论

5.1 LF 的性能

近十年来, LF 被应用于上述智能优化算法中,对原算法所起的作用主要是增强搜索能力、避免局部最优、加快收敛速度、增加种群多样性。Lévy 分布是一种稳定的分布,具有无限均值且方差具有发散特性,因此可能发生较大距离的跳跃。LF 飞行模式的特点就是有许多的步长和偶尔的大步长,如图 5 所示。它能够在全局优化问题中有效搜索空间中的远处区域,并且有助于算法避免陷入局部最优值。例如,在人工蜂群算法中,如果步长较大,则当前解与随机选择的解差异较大,跳过最优解的可能性也较大;如果步长很小,算法的收敛速度会显著降低,容易陷入局部最优。因此,使用 LF 作为随机游动策略提高了算法的勘探开发能力。将 LF 策略应用于算法以增强局部搜索能力时,步长可能不匹配。若原始的 LF 步长太大,则可能在域外或边界上产生新的解。由前文可知, LF 的有效性很大程度上取决于步长分布参数的正确选择。研究过程中常选用乘法器来减小步长,保证 LF 策略的搜索性能,通常乘法器选择 0.01, 0.001。

在缺乏食物源位置先验知识的情况下, LF 运动是非破坏性觅食中搜索者的最优搜索策略^[18]。LF 策略经常用来替换原始算法中的均匀分布、高斯分布。与高斯分布相比, LF 使改进算法的迭代次数更少,算法的收敛速度更快。在事先没有可用资源信息的情况下,基于 LF 的算法能够得到更好的结果。假设一个 D 维空间,该空间特征的长度为 L , 精度为 ϵ , 那么高斯随机游动所需的最大迭代次数为^[18]:

$$N_{\max} \approx \frac{L^2}{\epsilon^2 D} \quad (92)$$

如果使用 LF 代替高斯随机游动,那么所需的最大迭代次数为:

$$N'_{\max} \approx \left(\frac{L^2}{\epsilon^2 D} \right)^{1/(3-\beta)} \quad (93)$$

假设 $L = 10$, $D = 20$, $\epsilon = 10^{-5}$, $\beta = 1.5$, 那么 $N_{\max} \approx 5 \times 10^{10}$, $N'_{\max} \approx 1.4 \times 10^7$ 。由此可见,在智能优化算法中引入 LF 后收敛速度更快。

LF 的一个重要参数是 β ^[155], 在 Lévy 分布中, β 是控制分布形状的参数。由 LF 轨迹可知, β 值越小, 飞行跳跃的距离就越大, 那么搜索空间的能力就越强, 而 β 值越大, 则越能增强算法的开发能力。通过研究发现, LF 在未知空间内获得最大搜索效率时 $\beta = 1.5$ ^[156]。因此, 第 4 节所述的大部分文献

是这样取值的;有部分文献根据改进效果对 β 的取值进行了研究,最终选取合适的值;还有一部分文献随机选择 β 的取值,以增加多样性。因此,使用 LF 改进智能优化算法时,可以根据需要来改变 β 值,比如若需要增强开发能力,则可以取较大的 β 值。

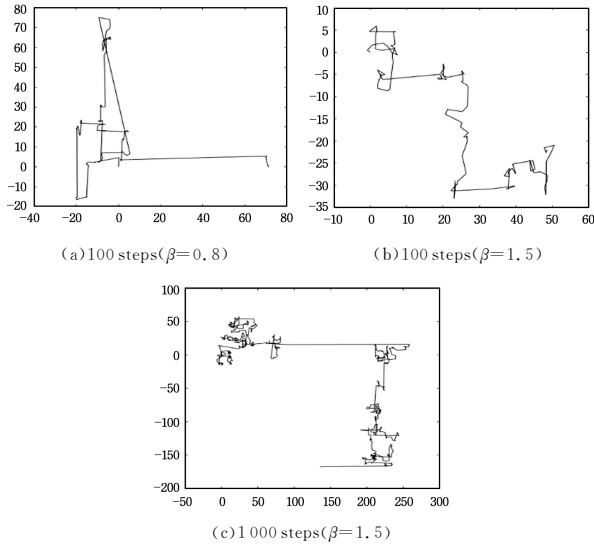


图5 二维平面下 LF 的运动轨迹 (从原点开始)

Fig. 5 Motion trace of LF in two-dimensional plane LF (Starting from the origin)

5.2 混合其他策略

根据第 4 节可以看出,LF 经常与其他策略结合(如混沌理论、正弦余弦方法、精英策略、对立学习理论等),以共同提升智能优化算法的性能。目前,结合最多的是混沌理论和精英策略,并且取得了较好的效果。

混沌映射是一个传递函数,在初始条件下产生一个不可预测的有界随机数序列,具有随机性、遍历性和规律性特征。混沌理论对解空间进行搜索,以提高算法的优化性能。混沌理论经常被用于算法的初始化阶段,以提高种群个体的多样性。文献[82]将带有混沌映射的 LF 策略用于雇佣蜂阶段,避免搜索过程陷入局部最优,同时最大限度地提高了解空间内的搜索效率。文献[13,97]进行混沌初始化操作,以保证种群的多样性和种群搜索过程的遍历性,而将 LF 策略用于增强算法的全局搜索能力。文献[108]同步结合 LF 策略和混沌局部搜索,以提升鲸鱼优化算法的搜索能力和收敛速度。文献[87]使用了基于 LF 的混沌序列 $c_i \oplus Levy(\lambda)$ 的邻域搜索方法,有助于算法在区域内找到最优解。文献[110]也是用带有 LF 的混沌序列生成新的解,以避免局部最优。文献[152]用混沌映射代替高斯分布产生候选解,以提高算法的收敛速度和开发能力,然后用 LF 策略求圆心,以进一步增强算法的探索能力。

精英策略是在搜索更新的中间过程中保留出现的较优解,以提高解的质量,防止更新时破坏优良个体的特性。因为在智能优化算法中引入 LF 策略通常会产生新的解,因此保留较好的解是必要的。大部分智能优化算法都会用到该策略,有些隐藏在如布谷鸟算法、人类心理搜索算法等算法的流程中。简单的精英策略可以用式(94)表示:

$$X(t+1) = \begin{cases} X_p(t+1), & F(X_p(t+1)) > F(X(t+1)) \\ X(t), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (94)$$

其中, $X(t+1)$ 表示下一代过程的个体参数, $X_p(t+1)$ 表示中间过程产生的解。若中间过程产生的解优于原来的解,则替换解,否则保留原来的解到下一代,即保留较优解。

5.3 应用方法研究

LF 引入智能优化算法的形式有很多种,并且其有规律可循。本文以流程图的形式将其分成两类,即串联和并联,如图 6 所示。应用方法如图 7 所示。串联形式的应用方法又可以分为:更改原本公式、增加流程步骤。串联形式的思想是对算法原本的某一机制进行更改或者剔除,亦或对所有解都应用 LF 机制进行更新,以提升算法性能。根据前文的内容,更改原本算法公式又可分为替换、相加、更改。替换就是用 LF 策略替换算法中的某种策略或某个系数,这是 LF 策略应用到算法中最显著的方法。由上文的分析可知,LF 搜索策略优于随机分布、高斯分布,因此很多文献用 LF 策略替换其他随机搜索策略。例如:文献[124]用 LF 替换随机游走;文献[79]用 LF 替换惯性系数;文献[111]用 Lévy 分布替换随机分布。相加就是直接在原算法的某个公式中加上 $\alpha \cdot Levy(\lambda)$,在原算法的机制上直接增加步长,以提升算法的全局搜索能力。这种方法需要添加合适的步长控制参数,相关的文献不多,具体更新方式如文献[71]中的粒子速度更新公式、文献[149]中的杂草个体位置更新方式、文献[150]中的象群位置更新过程。更改表示引入 LF 策略时,混合其他思想或方法修改原算法中的策略,多种策略同时结合到某个机制来提升算法的性能,有很大的发展空间。例如:文献[110]将 LF 策略和混沌理论相结合来产生新解;文献[81]用 LF 策略对算法进行初始化;文献[14]基于斑块概念和 LF 策略初始化蜜蜂种群,模拟自然界的真实情况。

并联形式的应用方法可以分成直接分类、条件选择、概率选择。并联形式的改进思想是一部分个体使用原算法的机制,另一部分个体使用 LF 策略进行改进。直接分类是直接将个体随机分为几类,某一类应用 LF 策略进行改进,以随机的形式选择部分个体利用 LF 策略跳出局部最优。例如:文献[78]对一部分粒子采用 LF 机制来更新位置;文献[113]在初始化阶段就将个体分成两个子种群,其中一个子种群用 LF 模型;文献[13]将蜜蜂分成两部分,一部分围绕当前解进行 LF。条件选择就是根据条件的结果来判断个体是否应用 LF 策略来进行改进。根据个体的具体情况选择具体的策略,更有利于提升算法的收敛速度和搜索能力。例如:文献[72]通过判断粒子多次迭代改善的次数来决定更新的策略;文献[127]对适应度值较差的个体采用 LF 方法;文献[102]通过判断 $\|A\|_2$ 的值来选择位置更新方式,若 $\|A\|_2 > 1$,则使用 LF 位置更新,否则使用正余弦算子位置更新。概率选择就是根据随机概率来判断个体是否应用 LF 策略来进行改进,也是以随机的形式判断个体,但是每个个体都有可能进行 LF 策略。例如:文献[75]通过判断随机数是否大于 0.8 来决定是否更新 LF 策略;文献[121]通过判断随机数小于 α 决定用 LF 策略更新位置。

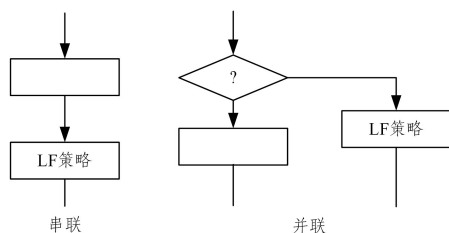


图6 分类方式

Fig. 6 Classification method

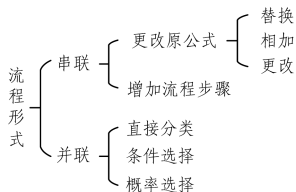


图7 应用方法

Fig. 7 Application method

结束语 本文首先介绍了 Lévy Flight 在各学科的发展情况,以及相关变体的理论和应用,然后总结分析了近十年将 LF 策略应用到智能优化算法的研究。本文仍有以下不足和局限性:

(1)LF 理论的根本性和实质性仍未完全得到解释,有很多相关理论只是假设,无法解释其现象。

(2)本文分析了 LF 应用到智能优化算法的方法,但是目前针对如何将某种策略应用到算法中的理论研究较少,本文提出的方法流程可能还不够准确。

(3)本文未对文献中提及的应用算法进行仿真实验,仅参考文献提及的部分。

(4)本文没有研究 LF 策略与其他策略混合的理论分析。

(5)目前几乎没有将 LF 变体应用到智能优化算法的研究,无法分析其更具体的性能。

(6)文中对 LF 应用的研究只涉及近十年的文献。

未来仍有很多方面待进一步研究,具体的工作包括:

(1)各学科深度合作,完善 LF 理论。未来仍需大量的研究来得出令人信服结论。

(2)维持多学科之间的合作,激发更多的灵感。数学、物理学、生物学的知识可以应用到计算机科学等学科领域,当然其他学科的发现研究也可以用来解释大自然的现象规律。

(3)加强对 LF 变体的研究和应用,将其合理应用在智能优化算法中。

(4)对 LF 进行改进。将 LF 应用到智能优化算法时,一方面可以对其本身进行改进,可以对 LF 的步态分布进行调整,也可以对其增加自适应调整步长参数;另一方面,可以增加其他策略结合 LF 的研究,充分发挥 LF 的优势。

(5)借助本文提出的 LF 策略应用方法,未来可系统研究探讨更为标准的应用方法。本文分析了 LF 策略以何种形式应用到算法中。未来可以通过其他改进策略应用的方式总结更加准确的应用方法。

(6)LF 可以有效探索搜索空间,未来可以用到更多的学科和领域中,本文的目的也在于激发学者将其用于其他领域的兴趣。

参考文献

- [1] BENOITB M. The Fractal Geometry of Nature[M]. New York: W. H. Freeman and Company,1982:131-132.
- [2] SHLESINGER M F, WEST B J, KLAFTER J. LévyDynamics of Enhanced Diffusion; Application to Turbulence[J]. Physical Review Letters,1987,58(11):1100-1103.
- [3] MICOLICH A P, TAYLOR R P, DAVIES A G, et al. Evolution of Fractal Patterns during a Classical-Quantum Transition[J]. Physical Review Letters,2001,87(3):036802.
- [4] VOLPERT V A, NEC Y, NEPOMNYASHCHY A A. Fronts in Anomalous Diffusion-Reaction Systems [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A; Mathematical Physical Engineering Sciences,2012,371(1982):1-18.
- [5] BAUDOIN Q, PIERRAT R, ELOY A, et al. Signatures of LévyFlights with Annealed Disorder[J]. Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics,2014,90(5):052114.
- [6] PAN M Y, ZHENG L C, LIU C Y, et al. A Stochastic Model for Thermal Transport of Nanofluid in Porous Media: Derivation and Applications[J]. Computers & Mathematics with Applications,2017,75(4):1226-1236.
- [7] REYNOLDS A M, SMITH A D, MENZEL R, et al. Displaced Honey Bees Perform Optimal Scale-Free Search Flights [J]. Ecology,2007,88(8):1955-1961.
- [8] PETROVSKII S, MASHANOVA A, JANSEN V A A. Variation in Individual Walking Behavior Creates the Impression of a Lévy Flight[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences,2011,108(21):8704-8707.
- [9] BAZAZI S, BARTUMEUS F, HALE J J, et al. Intermittent Motion in Desert Locusts; Behavioural Complexity in Simple Environments [J]. PLoS Computational Biology, 2012, 8 (5): e1002498.
- [10] HARRIS T H, BANIGAN E J, CHRISTIAN D A, et al. Generalized Lévy walks and the Role of Chemokines in Migration of Effector CD8+ T cells[J]. Nature,2012,486(7404):545-548.
- [11] HUMPHRIES N E, WEIMERSKIRCH H, QUEIROZ N, et al. Foraging Success of Biological LévyFlights Recorded in Situ[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences,2012,109(19):7169-7174.
- [12] RHEE I, SHIN M, HONG S, et al. On the Lévy-Walk Nature of Human Mobility[J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2011,19(3):630-643.
- [13] CHEN W, XIAO Y. An Improved ABC Algorithm and Its Application in Bearing Fault Diagnosis with EEMD [J]. Algorithms,2019,12(4):72.
- [14] HUSSEIN W A, SAHRAN S, SHEIKH A S N H. Patch-Lévy-based Initialization Algorithm for Bees Algorithm[J]. Applied Soft Computing,2014,23:104-121.
- [15] SHLESIGNE R, MICHAEL F, KLAFTER J. Lévy Walks Versus Lévy Flights[C] // On Growth & Form: Fractal & Non-fractal Patters in Physics. On Growth and Form: Fractal and Non-Fractal Patters in Physics,1986:279-283.
- [16] VISWANATHAN G M, AFANASYEV V, BULDYREV S,

- et al. Lévy Flight Search Patterns of Wandering Albatrosses[J]. *Nature*, 1996, 381(6581): 413-415.
- [17] EDWARDS A M, PHILIPS R A, WATKINS N W, et al. Revisiting Lévy Walk Search Patterns of Wandering Albatrosses, Bumblebees and Deer[J]. *Nature*, 2007, 449(7165): 1044-1048.
- [18] REYNOLDS A M, SMITH A D, MENZEL R, et al. Displaced Honey Bees Perform Optimal Scalefree Search Flights[J]. *Ecology*, 2007, 88(8): 1955-1961.
- [19] REYNOLDS A M, REYNOLDS D R, SMITH A D, et al. Appetitive Flight Patterns of Male *Agrotis Segetum* Moths over Landscape Scales [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2007, 245(1): 141-149.
- [20] REYNOLDS A M, PAIVA V H, CECERE J G, et al. Lévy Patterns in Seabirds are Multifaceted Describing both Spatial and Temporal Patterning[J]. *Frontiers in Zoology*, 2016, 13(1): 1-12.
- [21] SIMS D W, HUMPHRIES N E, BRADFORD R W, et al. Lévy Flight and Brownian Search Patterns of a Free-Ranging Predator Reflect Different Prey Field Characteristics[J]. *Journal of Animal Ecology*, 2012, 81(2): 432-442.
- [22] HUMPHRIES N E, SIMS D W. Optimal Foraging Strategies: Lévy Walks Balance Searching and Patch Exploitation under a very Broad Range of Conditions[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2014, 358: 179-193.
- [23] REYNOLDS A. Liberating Lévy Walk Research from the Shackles of Optimal Foraging[J]. *Physics of Life Reviews*, 2015, 14: 59-83.
- [24] PYKE G H. Understanding Movements of Organisms: It's Time to Abandon the Lévy Foraging Hypothesis[J]. *Methods in Ecology and Evolution*, 2015, 6(1): 1-16.
- [25] BROCKMANN D, HUFNAGEL L, GEISEL T. The Scaling Laws of Human Travel[J]. *Nature*, 2006, 439(7075): 462-465.
- [26] RHODES T, TURVEY M T. Human Memory Retrieval as Lévy Foraging[J]. *Physics A Statics Mechanical Application*, 2007, 385(1): 255-260.
- [27] MERCADIER N, GUERIN W, CHEVROLLIER M, et al. Lévy Flights of Photons in Hot Atomic Vapours[J]. *Nature Physics*, 2009, 5(8): 602-605.
- [28] PEREYRA M, BATATIA H. Modeling Ultrasound Echoes in Skin Tissues using Symmetric α -stable Processes [J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2012, 59(1): 60-72.
- [29] VOLPERT V A, NEC Y, NEPOMNYASHCHY A A. Fronts in Anomalous Diffusion-Reaction Systems [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical Engineering Sciences*, 2012, 371(1982): 20120179.
- [30] GRAFOV B M. Lévy Flights Constructed on Basis of Non-Gaussian Markovian Random Noise [C] // 22nd International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF). Montpellier: IEEE press, 2013.
- [31] BAUDOIN Q, PIERRAT R, ELOY A, et al. Signatures of Lévy Flights with Annealed Disorder[J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2014, 90(5): 052114.
- [32] KHAJEVA A A, DUBKOV A A. Time Characteristics of One-Dimensional and Two-Dimensional Stationary Lévy Flights in Different Potential Profiles [C] // International Conference on Noise & Fluctuations. Xian: IEEE press, 2015: 1-4.
- [33] MAGDZIARZ M, SZCZOTKA W. Quenched Trap Model for Lévy Flights[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2016, 30(1/2/3): 5-14.
- [34] PAN M Y, ZHENG L C, LIU C Y, et al. A Stochastic Model for Thermal Transport of Nanofluid in Porous Media: Derivation and Applications [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2018, 75(4): 1226-1236.
- [35] ALTEMEEMY A, SPENCER J W, RALPH J F. Lévy Flights for Improved Ladar Scanning [C] // IEEE International Conference on Imaging Systems & Techniques. Thessaloniki: IEEE press, 2010: 225-228.
- [36] SUTANTYO D K, KERNBACH S, LEVI P, et al. Multi-Robot Searching Algorithm Using Lévy Flight and Artificial Potential Field [C] // 2010 IEEE Safety Security and Rescue Robotics. Bremen: IEEE press, 2011: 3274-3247.
- [37] DENG K Y, DENG J W, LI Y X. The Random Search Strategies for Tibetan Tetraodon [C] // International Conference on Natural Computation. Shenyang: IEEE press, 2013: 1098-1102.
- [38] TOMASSINI M, ANTONIONI A. Lévy Flights and Cooperation among Mobile Individuals [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2015, 364: 154-161.
- [39] ZHANG Y H, LI Y M, ZHANG G C, et al. Design of X-rudder Autonomous Underwater Vehicle's Quadruple-Rudder Allocation with Lévy Flight Character [J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2017, 14(6): 1-15.
- [40] DEY S, DASH S, NANDI S, et al. Markov Chain Model Using Lévy Flight for VLSI Power Grid Analysis [C] // 2017 30th International Conference on VLSI Design and 2017 16th International Conference on Embedded Systems (VLSID). Hyderabad: IEEE press, 2017: 107-112.
- [41] VOSS A, LERCHE V, MERTENS U, et al. Sequential Sampling Models with Variable Boundaries and Non-Normal Noise: A Comparison of Six Models [J]. *Psychonomic Bulletin & Review*, 2019, 26(3): 813-832.
- [42] BECCAR-VARELA M P, GONZALEZ-HUIZAR H, MARIANI M C, et al. Lévy Flights and Wavelets Analysis of Volcano-Seismic Data [J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2020, 177(2): 723-736.
- [43] YANG X S, DEB S. Cuckoo Search via Lévy Flights [C] // 2009 World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing. Coimbatore: IEEE Press, 2009: 210-214.
- [44] MOUSAVIRAD S J, EBRAHIMPOUR H. Human Mental Search: A New Population-based Metaheuristic Optimization Algorithm [J]. *Applied Intelligence*, 2017, 47(3): 850-887.
- [45] WANG G G. Moth Search Algorithm: A Bio-Inspired Metaheuristic Algorithm for Global Optimization Problems [J]. *Memetic Computing*, 2016, 10(2): 1-14.
- [46] RHEE I, SHIN M, HONG S, et al. On the Lévy-Walk Nature of Human Mobility [J]. *Networking, IEEE-ACM Transactions on Networking*, 2011, 19(3): 630-643.
- [47] SCHELLING B, PLANT C. Clustering with the Lévy Walk:

- “Hunting” for Clusters[C]//2016 IEEE International Conference on Data Mining Workshops, Barcelona:IEEE Press,2016:1251-1260.
- [48] XU P B,DENG W H. Lévy Walk with Multiple Internal States [J]. Journal of Statistical Physics,2017,173(6):1598-1613.
- [49] MANTEGNA R,STANLEY H. Stochastic Process with Ultra-slow Convergence to a Gaussian; The Truncated Lévy Flight [J]. Physical Review Letters,1994,73(22):2946-2949.
- [50] KOPONEN I. Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights towards the Gaussian Stochastic Process[J]. Physical Review E,1995,52(1):1197-1199.
- [51] GUPTA H M,CAMPANHA J R. The Gradually Truncated LévyFlight for Systems with Power-Law Distributions [J]. Physica A,1999,268(1/2):231-239.
- [52] MATSUSHITA R,RATHIE P,DA S S. Exponentially Damped Lévy Flights[J]. Physica A-statistical Mechanics & Its Applications,2003,326(3/4):544-555.
- [53] KOPONEN I. Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights towards the Gaussian Stochastic Process[J]. Physical Review E,1995,52(1):1197-1199.
- [54] MARIANI M C,LIU Y. Normalized Truncated LévyWalks Applied to the Study of Financial Indices[J]. Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications,2007,377(2):590-598.
- [55] TERDIK G,GYIRES T. Does The Internet Still Demonstrate Fractal Nature[C]//8th International Conference on Networks. Gosier:IEEE press,2009:30-34.
- [56] ROMANOVSKY M Y,VIDOV P V. Analytical Representation of Stock and Stock-Indexes Returns; Non-Gaussian Random Walks with Various Jump Laws[J]. Physica A Statistical Mechanics & Its Applications,2011,390(21/22):3794-3805.
- [57] MARIANI M C,FLORESCU I,SENGUPTA I,et al. Lévy Models and Scale Invariance Properties Applied to Geophysics [J]. Physica A-Statistical Mechanics & its Applications,2013,392(4):824-839.
- [58] CONSTANTINIDES A,SAVELEV S E. Modelling Price Dynamics: A Hybrid Truncated Lévy Flight-GARCH Approach [J]. Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications,2013,392(9):2072-2078.
- [59] COELHO L D S,BORA T C,MARIANI V C. Differential Evolution based on Truncated Lévy-type Flights and Population Diversity Measure to Solve Economic Load Dispatch Problems[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems,2014,57:178-188.
- [60] CAO L J,GRABCHAK M. Smoothly Truncated Lévy Walks: Toward a Realistic Mobility Model[C]//2014 IEEE International Performance Computing and Communications Conference. Austin:IEEE press,2014.
- [61] PANDEY N,MALLIK R K,LALL B. Truncated Lévy Statistics for Diffusion Based Molecular Communication[C]//Globecom IEEE Global Communications Conference. Singapore: IEEE press,2017.
- [62] PAN C H,LI B,WANG C T,et al. Crime Modeling with Truncated Lévy flights for Residential Burglary Models[J]. Mathematical Models & Methods in Applied Sciences,2018,28(9):1-24.
- [63] MATTEO L. Comparison of Three Algorithms for Lévy Noise Generation [EB/OL]. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.130.5359>.
- [64] RADICCHI F,BARONCHELLI A. Evolution of Optimal Lévy-flight Strategies in Human Mental Searches[J]. Physical Review E,2012,85(6):061121.
- [65] MOUSAVIRAD S J,EBRAHIMPOUR-KOMLEH H,SCHARFER G. Effective Image Clustering based on Human Mental Search[J]. Applied Soft Computing,2019,78:209-220.
- [66] YANG X S. Flower Pollination Algorithm for Global Optimization[C]//11th International Conference Unconventional Computation and Natural Computation. Berlin:Springer,2012:240-249.
- [67] BALACHANDER T,JEYANTHY P A,DEVARAJ D. Application of Flower Pollination Algorithm for Solving Short Term Hydro Thermal Scheduling Problem with Prohibited Operating Zones[C]//2019 IEEE International Conference on Intelligent Techniques in Control, Optimization and Signal Processing. Tamilnadu:IEEE press,2019:1-5.
- [68] GAO Y J,ZHANG F M,GUO Q,et al. Research on the Searching Performance of Flower Pollination Algorithm with Three Random Walks [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems,2018,1:1-9.
- [69] WEI Z L, HUANG C Q, WANG X F, et al. Nuclear Reaction Optimization: A Novel and Powerful Physics-based Algorithm for Global Optimization[J]. IEEE Access,2019,7:1-9.
- [70] ARORA S,SINGH S. Butterfly Algorithm with Lévy Flights for Global Optimization[C]//2015 International Conference on Signal Processing. Wagnaghat:IEEE Press,2015:220-224.
- [71] KAPIL D B,VIVEKANANANDA M,VINOD K Y,et al. A Lévy Flight Based Voltage Particle Swarm Optimization for Multiple-Objective Mixed Cost-Effective Emission Dispatch [C]//2018 8th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering (Confluence). Noida:IEEE Press,2018:82-87.
- [72] GUAN T H,HAN F,HAN H. A Modified Multi-Objective Particle Swarm Optimization Based on Lévy Flight and Double-Archive Mechanism[J]. IEEE ACCESS,2019,7:183444-183467.
- [73] CHEGINI S N,BAGHERI A,NAJAFI F. PSOSCALF: A New hybrid PSO Based on Sine Cosine Algorithm and Lévy Flight for Solving Optimization problems [J]. Applied Soft Computing,2018,73:697-726.
- [74] HAKLI H,UGUZ H. A Novel Particle Swarm Optimization Algorithm with LévyFlight[J]. Applied Soft Computing,2014,23:333-345.
- [75] DU Z,LI S,SUN Y,et al. Adaptive Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Lévy Flights Mechanism[C]//2017 Chinese Automation Congress. Jinan:IEEE press,2017:479-484.
- [76] ASKARZADEH A. Solution for Sizing a PV/diesel HPGS for Isolated Sites [J]. IET Renewable Power Generation,2017,11(1):143-151.
- [77] LI H,ZHANG S,ZHANG C,et al. A Novel Unsupervised Lévy Flight Particle Swarm Optimization (ULPSO) Method for Multispectral Remote-Sensing Image Classification[J]. International

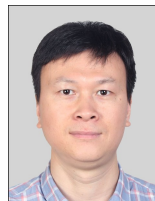
- Journal of Remote Sensing, 2017, 38(23):6970-6992.
- [78] MELLAL M A, ZIO E. An Adaptive Particle Swarm Optimization Method for Multi-objective System Reliability Optimization [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part O-Journal of Risk and Reliability, 2019, 233(6):990-1001.
- [79] HARIYA Y, KURIHARA T, SHINDO T, et al. Lévy flight PSO[C]// 2015 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Sendai; IEEE press, 2015:2678-2684.
- [80] TCHAPDA G Y G, WANG Z H. Improved Particle Swarm Optimization Based on Cuckoo Search Operations and Its Application[C]// 2017 2nd International Conference on Robotics and Automation Engineering. Shanghai; IEEE Press, 2017:290-294.
- [81] SHAN H, YASUDA T, OHKURA K. A LévyFlight-Based Hybrid Artificial Bee Colony Algorithm for Solving Numerical Optimization Problems[C]// IEEE Congress on Evolutionary Computation. Beijing; IEEE Press, 2014:2656-2663.
- [82] LIU F X, SUN Y H, WANG G G, et al. An Artificial Bee Colony Algorithm Based on Dynamic Penalty and Lévy Flight for Constrained Optimization Problems[J]. Arabian Journal for Science & Engineering, 2018, 43(12):7189-7208.
- [83] SHARMA H, BANSAL J C, ARYA K V. Opposition Based Lévy Flight Artificial Bee Colony [J]. Memetic Computing, 2013, 5(3):213-227.
- [84] TIAN Y, FANG X M, ZHANG F R. Artificial Bee Colony Algorithm Based on Lévy Flights for Global Optimization[C]// 2017 10th International Congress on Image and Signal Processing, BioMedical Engineering and Informatics. Shanghai; IEEE Press, 2017.
- [85] HAJIZADEH N, JAVIDAN R, SHAMSINEJAD P, et al. Node Deployment in Wireless Sensor Networks Using the New Multi Objective Lévy Flight Bee Algorithm (MOLFB)[J]. IET Wireless Sensor Systems, 2019, 10(2):78-87.
- [86] ZHOU J J, YAO X F. Multi-objective Hybrid Artificial Bee Colony Algorithm Enhanced with Lévy Flight and Self-adaption for Cloud Manufacturing Service Composition[J]. Applied Intelligence, 2017, 47(3):721-742.
- [87] LIN J H, LI Y L. A Metaheuristic Optimization Algorithm for Unsupervised Robotic Learning[C]// 2012 IEEE International Conference on Computational Intelligence and Cybernetics. Bali; IEEE Press, 2012:113-117.
- [88] MUSAU M P, ODERO N A, WEKESA C W. Multi Objective Dynamic Economic Emission Dispatch with Renewable Energy and Emissions[C]// IEEE PES PowerAfrica Conference. Livingstone; IEEE Press, 2016:274-279.
- [89] LUO X, YANG Y J, ZHOU Q Y. A Firefly-Cuckoo Search Algorithm for Optimizing the Beam Patterns of the Random Antenna Arrays[C]// 2018 4th Annual International Conference on Network and Information Systems for Computers. Wuhan; IEEE Press, 2018:84-88.
- [90] ASWANI R, KAR A K, ILAVARASAN P V. Detection of Spammers in Twitter Marketing: A Hybrid Approach Using Social Media Analytics and Bio Inspired Computing[J]. Information Systems Frontiers, 2018, 20(3):515-530.
- [91] MOSES P M, NICODEMUS A O, CYRUS W W. Multi Area Multi Objective Dynamic Economic Dispatch with Renewable Energy and Multi Terminal DC Tie Lines[C]// 2016 6th IEEE International Conference on Power Systems. New Delhi; IEEE Press, 2016:6.
- [92] TAHEREH H, HAKIMEH V, AMIR M E M. A Multilevel Thresholding Approach Based on Lévy-Flight Firefly Algorithm [C]// 2011 7th Iranian Conference on Machine Vision and Image Processing. Tehran; IEEE Press, 2011:16-17.
- [93] MAHMOUD R S, IRAJ F, IRAJ A, et al. Optimal PID Tuning for Load Frequency Control Using Lévy-Flight Firefly Algorithm[C]// 2013 3rd International Conference on Electric Power and Energy Conversion Systems. Istanbul; IEEE Press, 2013:2-4.
- [94] HIMANSHU S, ANIL K, BALYAN L K, et al. Piecewise Gamma Corrected Optimally Framed Grumwald-Letnikov Fractional Differential Masking for Satellite Image Enhancement [C] // 2018 International Conference on Communication & Signal Processing. Chennai; IEEE Press, 2018:129-133.
- [95] TIGHZERT LYES, FONLUPT C, MENDIL B. A Set of New Compact Firefly Algorithms[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2018, 40:92-115.
- [96] DONNY S, PAUL L, CHRISTOPH M, et al. Collective-adaptive Lévy-flight for Underwater Multi-robot Exploration[C]// 2013 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Takamatsu; IEEE Press, 2013:456-462.
- [97] ZENG X, WEI Z H. Improved Wolf Pack Algorithm based on Tent Chaotic Mapping and Lévy Flight[C]// 2017 International Conference on Robots & Intelligent System. Huain; IEEE Press, 2017:165-169.
- [98] AMIRSADRI S, MOUSAVIRAD S J, EBRAHIMPOUR-KOMLEH H. A LévyFlight-based Grey Wolf Optimizer Combined with Back-Propagation Algorithm for Neural Network Training [J]. Neural Computing and Applications, 2018, 30(12):3707-3720.
- [99] PATHAK Y, ARYA K V, TIWARI S. Feature Selection for Image Steganalysis Using LévyFlight-based Grey Wolf Optimization[J]. Multimedia Tools & Applications, 2018, 78(2):1473-1494.
- [100] KOHLI S, KAUSHI M, CHUGH K, et al. Lévy Inspired Enhanced Grey Wolf Optimizer[C]// 2019 Fifth International Conference on Image Information Processing. Shimla; IEEE Press, 2019:338-342.
- [101] TRIPATHI A K, SHARMA K, BALA M. A Novel Clustering Method Using Enhanced Grey Wolf Optimizer and MapReduce [J]. Big Data Research, 2018, 14:93-100.
- [102] ZHANG T, WANG X, WANG Z L. A Novel Improved Grey Wolf Optimization Algorithm for Numerical Optimization and PID Controller Design[C]// 2018 IEEE 7th Data Driven Control and Learning Systems Conference. Enshi; IEEE Press, 2018:879-886.
- [103] LI Y, LI W G, ZHAO Y T, et al. Grey Wolf Algorithm Based on Levy Flight and Random Walk Strategy[J]. Computer Science, 2020, 47(8):291-296.
- [104] LIU M, YAO X F, LI Y X. Hybrid Whale Optimization Algorithm Enhanced with Lévy Flight and Differential Evolution for

- Job Shop Scheduling Problems[J]. *Applied Soft Computing*, 2020, 87:105954.
- [105] ZHOU Y Q, LING Y, LUO Q F. Lévy Flight Trajectory-Based Whale Optimization Algorithm for Global Optimization[J]. *IEEE Access*, 2017, 5:6168-6186.
- [106] EMARY E, ZAWBAA H M, SHARAWI M. Impact of Lévy Flight on Modern Meta-Heuristic Optimizers[J]. *Applied Soft Computing*, 2018, 75:775-789.
- [107] YU Y, WANG H L, LI N, et al. Automatic Carrier Landing System Based on Active Disturbance Rejection Control with a Novel Parameters Optimizer[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 69:149-160.
- [108] CHEN H L, XU Y T, WANG M J. A Balanced Whale Optimization Algorithm for Constrained Engineering Design Problems[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 71:45-59.
- [109] ABDEL-BASSET M, ABDLE-FATAH L, SANGAIAH A K. An Improved Lévy Based Whale Optimization Algorithm for Bandwidth-Efficient Virtual Machine Placement in Cloud Computing Environment[J]. *Cluster Computing*, 2018, 22(4):8319-8334.
- [110] LIN J H, CHOU C W, YANG C H, et al. A BioInspired Optimization Algorithm for Modeling the Dynamics of Biological Systems[C]//2012 Third International Conference on Innovations in Bioinspired Computing & Applications. Kaohsiung: IEEE Press, 2012:206-211.
- [111] ADRIANA-CRISTINA E, VALENTIN S. Enhanced Intrusion Detection System Based on Bat Algorithm-Support Vector Machine[C]//International Conference on Security & Cryptography. Vienna:IEEE Press, 2014:184-189.
- [112] LI Y, LI X T, LIU J S. An Improved Bat Algorithm Based on Lévy Flights and Adjustment Factors[J]. *Symmetry-Basel*, 2019, 11(7):925.
- [113] LUO J, LIU L H, WU X Y. A Double-subpopulation Variant of the Bat Algorithm[M]. Amsterdam:Elsevier Science Inc, 2015.
- [114] DENG C H, ZHAO B Y, LIANG C Y. Improved Differential Evolution Algorithm[J]. *Computer Engineering*, 2009, 35(24):194-195.
- [115] VISHNU P S, HARJI R C, SANDEEP K, et al. A Modified DE: Population or Generation based Lévy Flight Differential Evolution (PGLFDE)[C]//2015 International Conference on Futuristic Trends in Computational Analysis & Knowledge Management. Noida:IEEE Press, 2015:704-710.
- [116] SANDEEP K, VIVEK K S, RAJANI K, et al. Opposition Based Lévy Flight Search in Differential Evolution Algorithm[C]//2014 International Conference on Signal Propagation & Computer Technology. Ajmer:IEEE Press, 2014:361-367.
- [117] LUO J, CHEN H L, ZHANG Q, et al. An Improved Grasshopper Optimization Algorithm with Application to Financial Stress Prediction[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 64:654-668.
- [118] GUO L H, WANG G G, GANDMODI A H, et al. A New Improved Krill Herd Algorithm for Global Numerical Optimization[J]. *Neurocomputing*, 2014, 138:392-402.
- [119] LI P, LI R X, CAO Y, et al. Multiobjective Sizing Optimization for Island Microgrids Using a Triangular Aggregation Model and the Lévy-Harmony Algorithm[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2017, 14(8):3495-3505.
- [120] LIU X J, HE Y C. Estimation of Distribution Algorithm Based on Lévy Flight for Solving the Set-Union Knapsack Problem[J]. *IEEE Access*, 2019, 7:132217-132227.
- [121] HUANG H, FENG X A, ZHOU S Y, et al. A New Fruit Fly Optimization Algorithm Enhanced Support Vector Machine for Diagnosis of Breast Cancer Based on High-level Features[J]. *BMC Bioinformatics*, 2019, 20(8):290.
- [122] ROHAN G, RAJU P. Biogeography-Based Optimization with Lévy-Flight Exploration for Combinatorial Optimization[C]//2018 8th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering. Noida:IEEE Press, 2018:664-669.
- [123] ABDULWAHAB H A, NORAZIAH A, ALSEWARI A R A, et al. An Enhanced Version of Black Hole Algorithm Via Lévy Flight for Optimization and Data Clustering Problems[J]. *IEEE Access*, 2019, 7:142085-142096.
- [124] XIE W, WANG J S, TAO Y. Improved Black Hole Algorithm Based on Golden Sine Operator and Lévy Flight Operator[J]. *IEEE Access*, 2019, 7:161459-161486.
- [125] TANG D Y, YANG J, DONG S B, et al. A Lévy Flight-based Shuffled Frog-leaping Algorithm and Its Applications for Continuous Optimization Problems[J]. *Applied Soft Computing*, 2016, 49:641-662.
- [126] ZHANG X M, FU A H, CHEN H Y, et al. Lévy Flight Shuffle Frog Leaping Algorithm Based on Differential Perturbation and Quasi-Newton Search[J]. *IEEE Access*, 2019, 7:116078-116093.
- [127] SAID A F, MOHAMED E, SALAH K. Optimal Reactive Power Dispatch Using Modified Sine Cosine Algorithm[C]//2019 IEEE International Conference on Innovative Trends in Computer Engineering. Aswan:IEEE Press, 2019:510-514.
- [128] ATTIA A F, EI S R A, HASANIEN H M. Optimal Power Flow Solution in Power Systems Using a Novel Sine-Cosine Algorithm[J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2018, 99:331-343.
- [129] EMARY E, ZAWBAA H M, SHARAWI M. Impact of Lévy Flight on Modern Meta-heuristic Optimizers[J]. *Applied Soft Computing*, 2018, 75:775-789.
- [130] XIAO F, HISAYOSHI M, SEIICHIRO K. Parameter Adjustment Based on Genetic Algorithm for Adaptive Periodic-Disturbance Observer[C]//CIEC-ON 2019-45th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. Lisbon:IEEE Press, 2019:687-692.
- [131] ZHAO D Q, ARANHA C, KANO H. Solving Real-world Facility Layout Problems Using GA with Lévy Flights and Multidecoding[C]//2017 18th IEEE/ACIS International Conference on Software Engineering. Kanazawa: IEEE Press, 2017:333-338.
- [132] ZHANG M H, WANG H L, WU J F. Multi-UAVs Target Tracking in Urban Environment Based on Distributed Model Predictive Control and Lévy Flight-Salp Swarm Algorithm[C]//2018 IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Con-

- ference. Xiamen; IEEE Press, 2018; 6.
- [133] ZHANG Y, QIN L X. Improved Salp Algorithm Based on Levy Flight Strategy[J]. Computer Science, 2020, 47(7): 154-160.
- [134] ZHANG Y C, LEI X J, CHENG S. PDG-PIO: Predicting Disease-genes Based on Pigeon-inspired Optimization[C] // 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Wellington: IEEE Press, 2019; 3285-3291.
- [135] DOU R, DUAN H B. Lévy Flight Based Pigeon-Inspired Optimization for Control Parameters Optimization in Automatic Carrier Landing System[J]. Aerospace Science & Technology, 2016, 61: 11-20.
- [136] YU J T, KIM C H, WADOOD A, et al. Jaya Algorithm with Self-Adaptive Multi-Population and Lévy Flights for Solving Economic Load Dispatch Problems[J]. IEEE Access, 2019, 7: 21372-21384.
- [137] DINKAR S K, DEEP K. An Efficient Opposition Based Lévy Flight Antlion Optimizer for Optimization Problems[J]. Journal of Computational Science, 2018, 29: 119-141.
- [138] NAVNATHDATTATRAYA K, RAO K R. Maximising Network Lifetime and Energy Efficiency of Wireless Sensor Network Using Group Search Antlion with Lévy Flight[J]. IET Communications, 2020, 14(6): 914-922.
- [139] WANG Y D, SHI Q, SONG W X, et al. Improve Multi-objective Antlion Optimizer Based on Quasi-oppositional and Lévy Fly[C] // 2019 Chinese Control and Decision Conference. Nanchang: IEEE Press, 2019; 12-17.
- [140] ALI M Z, AWAD N H, REYNOLDS R G, et al. A balanced Fuzzy Cultural Algorithm with a Modified Lévy Flight Search for Real Parameter Optimization[J]. Information Sciences, 2018, 447: 12-35.
- [141] JIA H M, PENG X X, SONG W L, et al. Multiverse Optimization Algorithm Based on Lévy Flight Improvement for Multithreshold Color Image Segmentation[J]. IEEE Access, 2019, 7: 32805-32844.
- [142] KUMAR S, BHAMBU P. Lévy Flight based Animal Migration Optimization Algorithm[C] // 2016 International Conference on Recent Advances and Innovations in Engineering. Jaipur: IEEE Press, 2016; 1-5.
- [143] ZHANG Y Y, JIN Z G, ZHAO X F, et al. Backtracking Search Algorithm with Lévy Flight for Estimating Parameters of Photovoltaic Models[J]. Energy Conversion and Management, 2020, 208: 112615.
- [144] DIAZ P, PEREZ-CISNEROS M, CUEVAS E, et al. An Improved Crow Search Algorithm Applied to Energy Problems[J]. Energies, 2018, 11(3): 571.
- [145] QU C W, FU Y M. Crow Search Algorithm Based on Neighborhood Search of Non-Inferior Solution Set[J]. IEEE Access, 2019, 7: 52871-52895.
- [146] ZHANG Y, CAI L Z, JI W J. Combinatorial Testing Data Generation Based on Bird Swarm Algorithm[C] // 2017 2nd International Conference on System Reliability & Safety. Milan: IEEE press, 2017; 491-499.
- [147] WU D M, WU Z H. Reactive Power Optimization based on Improved Bird Swarm Algorithm[C] // 2018 37th Chinese Control Conference. Wuhan: IEEE press, 2018; 2054-2058.
- [148] ZHENG T T, LIU Y H, SUN G, et al. IWORMLF: Improved Invasive Weed Optimization with Random Mutation and Lévy Flight for Beam Pattern Optimizations of Linear and Circular Antenna Arrays[J]. IEEE Access, 2020, 8: 19460-19478.
- [149] XU H, CAO Q Q, FANG C, et al. Application of Elephant Herd Optimization Algorithm Based on Lévy Flight Strategy in Intrusion Detection[C] // 2018 IEEE 4th International Symposium on Wireless Systems within the International Conferences on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems. Lviv: IEEE Press, 2018; 16-20.
- [150] ZAKIAN P, KAVEH A. Economic Dispatch of Power Systems Using An Adaptive Charged System Search Algorithm[J]. Applied Soft Computing, 2018, 73: 607-622.
- [151] ZHAO R X, WANG Y L, LIU C, et al. Selfish Herd Optimizer with Lévy-flight Distribution Strategy for Global Optimization Problem[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2019, 538: 122687.
- [152] LI X, NIU P F, LIU J P. Combustion Optimization of a Boiler Based on the Chaos and Lévy Flight Vortex Search Algorithm[J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 58: 3-18.
- [153] PANG B, SONG Y, ZHANG C J, et al. An improved Bacterial Foraging Optimization Algorithm Using Novel Chemotaxis and Swarming Strategy[C] // 2018 IEEE International Conference on Information and Automation. Wuyishan: IEEE Press, 2018; 1107-1112.
- [154] SUN P, ZHANG Y, LIU J L. An Improved Atom Search Optimization with Cellular Automata, a Lévy Flight and an Adaptive Weight Strategy[J]. IEEE Access, 2020, 8: 49137-49159.
- [155] YANG X S, KARAMANOGLU M, TING T O. Applications and Analysis of Bioinspired Eagle Strategy for Engineering Optimization[J]. Neural Computing & Applications, 2014, 25(2): 411-420.
- [156] YANG X S. Nature-inspired Metaheuristic Algorithms [M]. United Kingdom: Luniver Press, 2011; 16.



ZHENG Jie-feng, born in 1996, post-graduate student, is a member of China Computer Federation. His main research interests include intelligent algorithm and mobile robot.



ZHAN Hong-wu, born in 1978, master, lecturer. His main research interests include target tracking, intelligent algorithm and robot control.