计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.200700159

带权图的多重分形度量

刘胜久　李天瑞　谢　鹏　刘　佳
西南交通大学信息科学与技术学院　成都 611756
四川省云计算与智能技术高校重点实验室　成都 611756
(liushengjiu2008@163.com)

摘　要　分形维数及多重分形是分形理论的重要研究内容。复杂网络的多重分形已经得到了较为深入的研究,但对复杂网络多重分形的度量目前并没有可行的方法。带权图是复杂网络研究的重要对象,其中的节点权重及边权重可以为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同的类型。除节点权重及边权重均为正实数的情形外,其他类型的带权图都具有多重分形特性,且均具有无穷多个复数形式的网络维数。通过对带权图多重分形的研究,文中给出了15种具有多重分形特性的带权图多重分形维数的模所构成的集合,并采用集合的势对带权图的多重分形特性进行度量。研究表明,15种带权图多重分形维数的模所构成的集合均是可数集,其中有2种集合是2重集合,另外13种集合是通常意义上的集合,而且所有的集合均是等势的,其势均为$\aleph_0$。

关键词:带权图;复杂网络;分形理论;分形维数;多重分形;度量;基数
中图法分类号　TP393

Measure for Multi-fractals of Weighted Graphs

LIU Sheng-jiu,LI Tian-rui,XIE Peng and LIU Jia
School of Information Science and Technology,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China
Sichuan Key Lab of Cloud Computing and Intelligent Technique,Chengdu 611756,China

Abstract　Fractal dimension and multi-fractal are important research contents of fractal theory. The multi-fractal of complex networks has been studied in depth,while there is no feasible method to measure the multi-fractal of complex networks. Weighted graph is an important research object of complex network. Both node weight and edge weight in weighted graphs can be positive real number,negative real number,pure imaginary number and complex number,and so on. Among all types of weighted graphs, except the weighted graphs with both node weight and edge weight being positive real numbers,other types of weighted graphs share multi-fractals and append with infinity complex network dimensions. Through the study of multi-fractals of weighted graphs,this paper presents modulus of infinity complex network dimensions of all 15 weighted graphs that share multi-fractal, and measures multi-fractal of them by cardinality of sets obtained from modulus of infinity complex network dimensions of them. It shows that all sets obtained from modulus of infinity complex network dimensions of weighted graphs share multi-fractal are countable sets,while 2 are multisets,and the other 13 are ordinary sets. Moreover,all sets,regardless of multisets or ordinary sets,are equipotent with cardinality of $\aleph_0$.

Keywords　Weighted graph,Complex network,Fractal theory,Fractal dimension,Multi-fractals,Measure,Cardinality

1　引言

复杂网络是以图论作为研究基础的。图将复杂系统中的各个实体抽象为节点,并将各个实体之间的关联抽象为节点与节点之间的连接,即边,从而可以较为简洁地刻画复杂系统的各项特性。图论起源于18世纪欧拉对哥尼斯堡七桥问题的研究,现代意义上的复杂网络的研究则起源于Erdos及Renyi两位科学家对随机图模型的研究[1]。随后,一系列不同的复杂网络模型相继被提出[2-4]。

在对真实系统所抽象出的复杂网络的研究中,人们发现,小世界[2-3]、无标度[4]、自相似[5]是复杂网络的三大特性。复杂网络的小世界特性及无标度特性目前已有较多的研究成

到稿日期:2020-07-26　返修日期:2020-08-28　本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。
基金项目:国家自然科学基金(61573292)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61573292).
通信作者:李天瑞(trli@swjtu.edu.cn)

果,其理论及应用均较为成熟。但人们对复杂网络自相似特性的研究并不深入,而复杂网络的自相似特性是目前复杂网络研究的重点。从邻接矩阵及关联矩阵的视角出发对复杂网络的自相似特性进行研究是一种可行的方法[6]。

复杂网络自相似特性研究的重点是对其分形维数的研究。网络维数是度量复杂网络自相似特性的可行方法,可视为复杂网络的分形维数[7]。网络维数可以应用于节点权重及边权重为正实数、负实数、纯虚数及复数等多种不同类型的带权图中。除节点权重及边权重均为正实数的带权图外,其他类型的带权图均具有多重分形特性,且均具有无穷多个复数形式的网络维数[8]。复杂网络理论在社交网络及语义网络等领域有着广阔的应用前景。目前对复杂网络多重分形的度量并没有公认的可行方法,如何对带权图的多重分形特性进行度量成为复杂网络的新研究热点。

针对具有无穷多个复数形式的多重分形维数的带权图,本文提出采用多重分形维数的模所构成集合的势对带权图的多重分形特性进行度量。本文的研究表明,尽管带权图的多重分形维数各不相同,但所有带权图多重分形维数的模所构成的集合均是可数集,其中包括 2 种 2 重集合及 13 种通常意义上的集合,而且所有的集合均是等势的,其势均为$\aleph_0$。

2 预备知识

2.1 图与网络

一般情况下,图 G 可以表示为 $G=(V,E)$,其中,V 表示图 G 的节点集,E 表示图 G 的边集,且有 $E\subset V\times V$。$|V|$ 为图 G 的节点数目,称为图的阶数。$|E|$ 为图 G 的边数目,称为图的大小。在 $|V|$ 及 $|E|$ 均为有限的情况下,图 G 称为有限图;在 $|V|$ 无限的情况下,图 G 称为无限图。文中只对有限图进行研究。邻接矩阵及关联矩阵是描述图的两种较为便捷的方法,下文将分别论述图的邻接矩阵及关联矩阵。

定义 1[9] 对图 $G=(V,E)$ 来说,其邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 是一个 $|V|\times|V|$ 阶的方阵,其中,若节点 v_i 与节点 v_j 直接相连,则 $A_{ij}=1$,否则,$A_{ij}=0$。

定义 2[9] 对图 $G=(V,E)$ 来说,其关联矩阵 $\boldsymbol{C}(G)$ 是一个 $|V|\times|E|$ 阶的矩阵,其中,若节点 v_i 是边 e_j 的一个端点,$v_i\in e_j$,则 $C_{ij}=1$,否则,$C_{ij}=0$。

定义 3[9] 对图 $G=(V,E)$ 来说,其任一节点 v_i 的度是指与节点 v_i 直接相连的节点的数目,即以节点 v_i 为端点的边的数目,表述为 $d(v_i)$。

邻接矩阵及关联矩阵与图均是一一对应的,一般情况下,二者是等价的,可以进行相互转换。但通常邻接矩阵的规模较关联矩阵小,并且邻接矩阵使用得较多。除邻接矩阵及关联矩阵外,描述图的矩阵还包括度矩阵、Laplace 矩阵、无符号 Laplace 矩阵、标准化 Laplace 矩阵等。对于有向图及混合图等其他类型的图,还有 Skew 矩阵、Hermitian 矩阵等更为复杂的矩阵。但这些矩阵与图不一定一一对应或者过于复杂,通常情况下使用得不是很多。

对通常意义上的图而言,图中的节点及边均是不带有权重的,即权重非 0 即 1,称为无权图。节点或边带有权重的图称为带权图,且节点或边的权重可以为正实数、负实数、纯虚数及复数等。对图的研究均是从无权图开始的,无权图是图研究的基础。一些经典的图模型或网络模型均是无权图,如 ER 随机图模型[1]、WS/NW 网络模型[2-3]、BA 网络模型[4]等。

2.2 分形与多重分形

分形理论是描述分形现象的重要工具。现有的研究表明,分形现象在自然界中广泛存在,并且由分形理论衍生出了分形几何、分形图案、分形设计等[10]。描述分形现象的重要工具是分形维数,而分形维数有很多不同的计算方法。通用的分形维数计算方法是 Hausdorff 维数,其计算公式为[11]:

$$d=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log(\varepsilon^{-1})}\tag{1}$$

一般情况下,任一物体的 Hausdorff 维数 $dim_H X$ 与拓扑维数 $dim_t X$ 之间满足下式的大小关系[12]:

$$dim_t X\leqslant dim_H X\tag{2}$$

对一些特殊图的 Hausdorff 维数的研究是分形理论研究的重要内容[13]。

采用式(1)计算的分形维数往往是分数,这也是分形得名的一个重要原因,如 Koch 雪花的分形维数为:

$$d_{Koch}=\frac{\log 3}{\log 2}=\log_2 3\tag{3}$$

实际情况中也存在整数分形维数形式的分形现象。

对于高维物体而言,在难以用式(1)计算其分形维数时,可以先将其降到低维,计算低维物体的分形维数,再根据余维相加定律[14],还原得到原始物体的分形维数[15]。如计算三维空间中 Menger 海绵的分形维数 FD_3 时,可以先将其投射到一个二维的平面,计算所得到图像的分形维数 FD_2,再通过式(4)得到 Menger 海绵的分形维数:

$$FD_3=FD_2+1\tag{4}$$

对于该问题,也可将其投射到一个一维的直线,计算所得线的分形维数 FD_1,再通过式(5)得到 Menger 海绵的分形维数:

$$FD_3=FD_1+2\tag{5}$$

在对分形理论的深入研究中,研究人员发现采用一个点状的分形维数并不能全面刻画分形物体的各项特性,因此,其尝试采用多个不同的分形维数对分形现象进行描述,这就是多重分形[16]。双分形是最简单的多重分形[17]。双分形及多分形等其他多种形态的分形理论大大拓展了经典分形理论的研究应用领域[18]。在具体的研究应用中,也存在无穷多个分形维数的情形。多重分形理论是分形理论研究的前沿,目前尚没有严格的定义。对多重分形的研究是分形理论研究的重要内容。

2.3 带权图的多重分形

分形现象在复杂网络中是广泛存在的[19-20]。由于带权图不同于传统意义上的物体,对带权图的分形维数进行研究

不便于直接应用式(1)进行计算。网络维数是一种度量带权图分形维数的可行方法,表述为带权图中所有边权重和的对数值与所有节点权重和的对数值的比值[7],如式(6)所示:

$$ND(G)=\frac{1}{\log\sum\limits_{v\in V}f(v)}\log\sum_{e\in E}f(e) \tag{6}$$

其中,$f(e)$和$f(v)$分别表示图G中边e与节点v的权重。

对于节点权重及边权重均为正实数的带权图而言,可以直接使用式(6)计算带权图的分形维数,而对于节点权重及边权重为负实数、纯虚数及复数形式的带权图,则需要先采用欧拉公式进行变换,再计算带权图的分形维数。欧拉公式表示如下:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{7}$$

式(7)所示的欧拉公式实际上是一个多值周期函数,需要在多个周期内对其进行分析研究,这将导致得到的分形维数计算结果不唯一,这其实就是带权图的多重分形。本文的研究表明,在节点权重及边权重为正实数、负实数、纯虚数、复数等16种情形中,除节点权重及边权重均为正实数的情形之外,其他15种情形均具有多重分形特性,而且都有无穷多个分形维数[8]。

3 带权图的多重分形维数

对于16种不同权重形式的带权图而言,有15种带权图有无穷多个分形维数,即具有多重分形特性。在这些不同类型的带权图中,3种带权图的分形维数分布在一条直线上,3种带权图的分形维数分布在一个圆上,9种带权图的分形维数分布在整个复平面。

分布在直线或圆上的6种线状分布的带权图多重分形维数统计如表1所列。

表1 6种线状分布的带权图多重分形维数统计

Table 1 Statistics of multi-fractal dimensions by linear distribution of 6 weighted graphs

No.	Node Weight	Edge Weight	Multi-Fractal Dimension	
1	$f(v)$	$-f(e)$	$\frac{1}{\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)}[\ln\sum\limits_{e\in E}f(e)+i\pi(2m+1)],m\in Z$	(8)
2	$f(v)$	$if(e)$	$\frac{1}{\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)}[\ln\sum\limits_{e\in E}f(e)+i\pi(2m+\frac{1}{2})],m\in Z$	(9)
3	$f(v)$	$(a+bi)f(e)$	$\frac{1}{\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)}[\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum\limits_{e\in E}f(e)+i(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})],m\in Z$	(10)
4	$-f(v)$	$f(e)$	$\frac{\ln\sum\limits_{e\in E}f(e)}{(2m+1)^2\pi^2+\ln^2\sum\limits_{v\in V}f(v)}[\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)-i\pi(2m+1)],m\in Z$	(11)
5	$if(v)$	$f(e)$	$\frac{\ln\sum\limits_{e\in E}f(e)}{(2m+\frac{1}{2})^2\pi^2+\ln^2\sum\limits_{v\in V}f(v)}[\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)-i\pi(2m+\frac{1}{2})],m\in Z$	(12)
6	$(a+bi)f(v)$	$f(e)$	$\frac{\ln\sum\limits_{e\in E}f(e)}{(\tan^{-1}\frac{b}{a}+2m\pi)^2+\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum\limits_{v\in V}f(v)}[\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum\limits_{v\in V}f(v)-i(\tan^{-1}\frac{b}{a}+2m\pi)],m\in Z$	(13)

对于9种分形维数分布在整个复平面上的带权图而言,其分形维数可以视为圆系与直线系的交点,可以通过参数方程的形式对这些带权图的多重分形维数进行表述。我们分别对节点权重为负实数、纯虚数及复数形式的带权图的多重分形维数进行了分析。由于前文已经分析了边权重为正实数的带权图的分形维数,这里只对边权重为负实数、纯虚数及复数形式的带权图的分形维数进行分析。表2-表4分别是节点权重为负实数、纯虚数以及复数形式的带权图多重分形维数统计表。在表2-表4中,$n\in Z$,而且在表2中,$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{(2m+1)\pi}\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)(m\in Z)$,在表3中,$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{(2m+\frac{1}{2})\pi}\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)(m\in Z)$,在表4中,$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum\limits_{v\in V}f(v)(m\in Z)$。

表2 3种节点权重为负实数的带权图多重分形维数统计

Table 2 Statistics of multi-fractal dimensions of 3 weighted graphs with node weight being negative real number

No.	Edge Weight	Multi-Fractal Dimension	
1	$-f(e)$	$2z\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)=\ln\sum\limits_{e\in E}f(e)+i\pi(2n+1)+\sqrt{\ln^2\sum\limits_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$	(14)
2	$if(e)$	$2z\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)=\ln\sum\limits_{e\in E}f(e)+i\pi(2n+\frac{1}{2})+\sqrt{\ln^2\sum\limits_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$	(15)
3	$(a+bi)f(e)$	$2z\ln\sum\limits_{v\in V}f(v)=\ln\sum\limits_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}f(e)+i(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+\sqrt{\ln^2\sum\limits_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$	(16)

表 3　3 种节点权重为纯虚数的带权图多重分形维数统计

Table 3　Statistics of multi-fractal dimensions of 3 weighted graphs with node weight being pure imaginary number

No.	Edge Weight	Multi-Fractal Dimension	
1	$-f(e)$	$2z\ln\sum_{v\in V}f(v)=\ln\sum_{e\in E}f(e)+i\pi(2n+1)+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$	(17)
2	$if(e)$	$2z\ln\sum_{v\in V}f(v)=\ln\sum_{e\in E}f(e)+i\pi(2n+\frac{1}{2})+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$	(18)
3	$(a+bi)f(e)$	$2z\ln\sum_{v\in V}f(v)=\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}f(e)+i(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$	(19)

表 4　3 种节点权重为复数的带权图多重分形维数统计

Table 4　Statistics of multi-fractal dimensions of 3 weighted graphs with node weight being complex number

No.	Edge Weight	Multi-Fractal Dimension	
1	$-f(e)$	$2z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)=\ln\sum_{e\in E}f(e)+i\pi(2n+1)+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$	(20)
2	$if(e)$	$2z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)=\ln\sum_{e\in E}f(e)+i\pi(2n+\frac{1}{2})+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$	(21)
3	$(a+bi)f(e)$	$2z\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)=\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+i(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$	(22)

4　带权图的多重分形度量

4.1　线状分布的带权图多重分形度量

根据表 1 可以计算出节点权重为正实数、边权重为负实数的带权图分形维数的模为：

$$M_{PN}=f_{PN}(m)=\frac{1}{|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\pi^2(2m+1)^2}\tag{23}$$

其中，$m\in Z$。

我们发现，$f_{PN}(m)=f_{PN}(-m-1)$，即 $\bigcup_{\{M_{PN}\}}$ 为 2 重集合，则有 $\bigcup_{\{M_{PN}\}}\sim\frac{1}{2}Z\sim Z$，且有 $|\bigcup_{\{M_{PN}\}}|=\aleph_0$。

此外，

$$\min\{M_{PN}\}=f_{PN}(0)=f_{PN}(-1)=\frac{1}{|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\pi^2}$$

同理，节点权重为正实数、边权重为纯虚数的带权图分形维数的模为：

$$M_{PI}=f_{PI}(m)=\frac{1}{|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\pi^2(2m+\frac{1}{2})^2}\tag{24}$$

其中，$m\in Z$。

则有 $\bigcup_{\{M_{PI}\}}\sim Z$，且有 $|\bigcup_{\{M_{PI}\}}|=\aleph_0$。

此外，

$$\min\{M_{PI}\}=f_{PI}(0)=\frac{1}{|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\frac{1}{4}\pi^2}$$

同理，节点权重为正实数、边权重为复数的带权图分形维数的模为：

$$M_{PC}=f_{PC}(m)=\frac{1}{|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}\tag{25}$$

其中，$m\in Z$。

则有 $\bigcup_{\{M_{NP}\}}\sim Z$，且有：$|\bigcup_{\{M_{NP}\}}|=\aleph_0$。

根据表 1，可以计算出节点权重为负实数、边权重为正实数的带权图分形维数的模为：

$$M_{NP}=f_{NP}(m)=\frac{1}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+\pi^2(2m+1)^2}}|\ln\sum_{e\in E}f(e)|\tag{26}$$

其中，$m\in Z$。

可以发现，$f_{NP}(m)=f_{NP}(-m-1)$，即 $\bigcup_{\{M_{NP}\}}$ 为 2 重集合，则有 $\bigcup_{\{M_{NP}\}}\sim\frac{1}{2}Z\sim Z$，且有 $|\bigcup_{\{M_{NP}\}}|=\aleph_0$。

此外，

$$\max\{M_{NP}\}=f_{NP}(0)=f_{NP}(-1)=\frac{1}{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\pi^2}}|\ln\sum_{v\in V}f(v)|$$

对比式(23)与式(26)可以发现，$M_{PN}M_{NP}=1$，且 $\min\{M_{PN}\}\max\{M_{NP}\}=1$，即二者互为倒数。这隐含着二者之间存在内在的关联，即对于 $\bigcup_{\{M_{NP}\}}$ 中的任一元素，在 $\bigcup_{\{M_{NP}\}}$ 中均存在其倒数，反之亦然。可以认为二者之间存在一一对应的双射映射关系。

同理，节点权重为纯虚数、边权重为正实数的带权图分形维数的模为：

$$M_{IP}=f_{IP}(m)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+\pi^2(2m+\frac{1}{2})^2}}\left|\ln\sum_{e\in E}f(e)\right| \tag{27}$$

其中，$m\in Z$。

则有$\bigcup_{\{M_{IP}\}}\sim Z$，且有$|\bigcup_{\{M_{IP}\}}|=\aleph_0$。

此外，

$$\max\{M_{IP}\}=f_{IP}(0)=\frac{1}{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\frac{1}{4}\pi^2}}\left|\ln\sum_{v\in V}f(v)\right|$$

对比式(24)与式(27)可以发现，$M_{PI}M_{IP}=1$，且 $\min\{M_{PI}\}\max\{M_{IP}\}=1$，即二者互为倒数。这隐含着二者之间存在内在的关联，即对于$\bigcup_{\{M_{PI}\}}$中的任一元素，在$\bigcup_{\{M_{IP}\}}$中均存在其倒数，反之亦然。可以认为二者之间存在一一对应的双射映射关系。

同理，节点权重为复数、边权重为正实数的带权图分形维数的模为：

$$M_{CP}=f_{CP}(m)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)+(\tan^{-1}\frac{b}{a}+2m\pi)^2}}\left|\ln\sum_{e\in E}f(e)\right|,m\in Z \tag{28}$$

则有$\bigcup_{\{M_{CP}\}}\sim Z$，且有$|\bigcup_{\{M_{CP}\}}|=\aleph_0$。

对比式(25)与式(28)可以发现，$M_{PC}M_{CP}=1$，即二者互为倒数。这隐含着二者之间存在内在的关联，即对于$\bigcup_{\{M_{PC}\}}$中的任一元素，在$\bigcup_{\{M_{CP}\}}$中均存在其倒数，反之亦然。可以认为二者之间存在一一对应的双射映射关系。

至此，我们分析了多重分形维数呈线状分布的 6 种带权图。可以看出，在这 6 种呈线状分布的带权图多重分形维数中，3 种分布在直线上的带权图多重分形维数分别与 3 种分布在圆上的带权图多重分形维数之间存在一一对应的双射映射关系。而且，这些带权图多重分形维数的模所构成的集合均是可数集，其中，2 种集合为 2 重集合，4 种集合为通常意义上的集合，这些集合均与整数集 Z 等势，其势均为$\aleph_0$。

4.2 面状分布的带权图多重分形度量

对 9 种多重分形维数呈面状分布的带权图而言，它们的分形维数可以视为直线系与圆系的交点，下面分别进行分析。先对表 2 所列的节点权重为负实数的 3 种带权图的分形维数进行分析。

表 2 中，节点权重为负实数、边权重为负实数的带权图的分形维数的模为：

$$M_{NN}=f_{NN}(m,n)$$

$$=\frac{1}{2\left|\ln\sum_{v\in V}f(v)\right|}\left\{\left[\ln\sum_{e\in E}f(e)+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}\cos\theta\right]^2+\left[\pi(2n+1)+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}\sin\theta\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

其中，$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{(2m+1)\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v)$，$m,n\in Z$。

由于 $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{(2m+1)\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v)$，$m\in Z$，则有：

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+1)^2\pi^2}}\ln\sum_{v\in V}f(v)\\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+1)^2\pi^2}}(2m+1)\pi\end{cases},m\in Z \tag{30}$$

将式(30)代入式(29)，即得：

$$M_{NN}=f_{NN}(m,n)$$

$$=\frac{1}{\left|\ln\sum_{v\in V}f(v)\right|}\left\{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\pi^2(2n+1)^2+\pi\frac{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+1)^2\pi^2}}\left[(2m+1)\ln\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)\ln\sum_{v\in V}f(v)\right]\right\}^{\frac{1}{2}},m,n\in Z \tag{31}$$

则有$\bigcup_{\{M_{NN}\}}\sim Z\times Z\sim Z$，且有$|\bigcup_{\{M_{NN}\}}|=\aleph_0$。

同理，节点权重为负实数、边权重为纯虚数的带权图的分形维数的模为：

$$M_{NI}=f_{NI}(m,n)$$

$$=\frac{1}{2\left|\ln\sum_{v\in V}f(v)\right|}\left\{\left[\ln\sum_{e\in E}f(e)+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\cos\theta\right]^2+\left[\pi(2n+\frac{1}{2})+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\sin\theta\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

其中，$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{(2m+1)\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v)$，$m,n\in Z$。

将式(30)代入式(32)，即得：

$$M_{NI}=f_{NI}(m,n)$$

$$=\frac{1}{\left|\ln\sum_{v\in V}f(v)\right|}\left\{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\pi^2(2n+\frac{1}{2})^2+\pi\frac{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+1)^2\pi^2}}\left[(2m+1)\ln\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})\ln\sum_{v\in V}f(v)\right]\right\}^{\frac{1}{2}},m,n\in Z \tag{33}$$

则有$\bigcup_{\{M_{NI}\}}\sim Z\times Z\sim Z$，且有 $|\bigcup_{\{M_{NI}\}}|=\aleph_0$。

同理，节点权重为负实数、边权重为复数的带权图的分形维数的模为：

$$M_{NC}=f_{NC}(m,n)$$

$$=\frac{1}{2\left|\ln\sum_{v\in V}f(v)\right|}\left\{\left[\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}f(e)+\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}\cos\theta\right]^2+\left[(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}\sin\theta\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

其中,$\theta=\tan^{-1}\dfrac{1}{(2m+1)\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v)$,$m,n\in Z$。

则有 $\bigcup_{\{M_{NC}\}}\sim Z\times Z\sim Z$,且有 $|\bigcup_{\{M_{NC}\}}|=\aleph_0$。

将式(30)代入式(34),即得:

$$\begin{aligned}M_{NC}&=f_{NC}(m,n)\\&=\frac{1}{|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2+\frac{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+1)^2\pi^2}}\\&[(2m+1)\pi\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})\ln\sum_{v\in V}f(v)]\}^{\frac{1}{2}},m,n\in Z\end{aligned}\tag{35}$$

表 3 中,节点权重为纯虚数、边权重为负实数的带权图的分形维数的模为:

$$\begin{aligned}M_{IN}&=f_{IN}(m,n)\\&=\frac{1}{2|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\{[\ln\sum_{e\in E}f(e)+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}\cos\theta]^2+[\pi(2n+1)+\\&\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}\sin\theta]^2\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{36}$$

其中,$\theta=\tan^{-1}\dfrac{1}{(2m+\frac{1}{2})\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v)$,$m,n\in Z$。

由于 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{1}{(2m+\frac{1}{2})\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v)$,$m\in Z$,则有:

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+\frac{1}{2})^2\pi^2}}\ln\sum_{v\in V}f(v)\\\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+\frac{1}{2})^2\pi^2}}(2m+\frac{1}{2})\pi\end{cases}\tag{37}$$

其中,$m\in Z$。

将式(37)代入式(36),即得:

$$\begin{aligned}M_{IN}&=f_{IN}(m,n)\\&=\frac{1}{|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\pi^2(2n+1)^2+\\&\pi\frac{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+\frac{1}{2})^2\pi^2}}[(2m+\frac{1}{2})\\&\ln\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)\ln\sum_{v\in V}f(v)]\}^{\frac{1}{2}},m,n\in Z\end{aligned}\tag{38}$$

则有 $\bigcup_{\{M_{IN}\}}\sim Z\times Z\sim Z$,且有 $|\bigcup_{\{M_{IN}\}}|=\aleph_0$。

同理,节点权重为纯虚数、边权重为纯虚数的带权图的分形维数的模为:

$$\begin{aligned}M_{II}&=f_{II}(m,n)\\&=\frac{1}{2|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\{[\ln\sum_{e\in E}f(e)+\\&\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\cos\theta]^2+[\pi(2n+\frac{1}{2})+\\&\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\sin\theta]^2\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{39}$$

其中,$\theta=\tan^{-1}\dfrac{1}{(2m+\frac{1}{2})\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v)$,$m,n\in Z$。

将式(37)代入式(39),即得:

$$\begin{aligned}M_{II}&=f_{II}(m,n)\\&=\frac{1}{|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+\pi^2(2n+\frac{1}{2})^2+\\&\pi\frac{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+\frac{1}{2})^2\pi^2}}[(2m+\frac{1}{2})\\&\ln\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})\ln\sum_{v\in V}f(v)]\}^{\frac{1}{2}},m,n\in Z\end{aligned}\tag{40}$$

则有 $\bigcup_{\{M_{II}\}}\sim Z\times Z\sim Z$,且有 $|\bigcup_{\{M_{II}\}}|=\aleph_0$。

同理,节点权重为纯虚数、边权重为复数的带权图的分形维数的模为:

$$\begin{aligned}M_{IC}&=f_{IC}(m,n)\\&=\frac{1}{2|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\{[\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}f(e)+\\&\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}\\&\cos\theta]^2+[(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+\\&\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}\sin\theta]^2\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{41}$$

其中,$\theta=\tan^{-1}\dfrac{1}{(2m+\frac{1}{2})\pi}\ln\sum_{v\in V}f(v)$,$m,n\in Z$。

将式(37)代入式(41),即得:

$$\begin{aligned}M_{IC}&=f_{IC}(m,n)\\&=\frac{1}{|\ln\sum_{v\in V}f(v)|}\{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2+\frac{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}{\sqrt{\ln^2\sum_{v\in V}f(v)+(2m+\frac{1}{2})^2\pi^2}}\\&[(2m+\frac{1}{2})\pi\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})\ln\sum_{v\in V}f(v)]\}^{\frac{1}{2}},m,n\in Z\end{aligned}\tag{42}$$

则有 $\bigcup_{\{M_{IC}\}}\sim Z\times Z\sim Z$,且有 $|\bigcup_{\{M_{IC}\}}|=\aleph_0$。

表 4 中,节点权重为复数、边权重为负实数的带权图的分形维数的模为:

$$\begin{aligned}M_{CN}&=f_{CN}(m,n)\\&=\frac{1}{2|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)|}\{[\ln\sum_{e\in E}f(e)+\end{aligned}$$

$$\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}\cos\theta]^2+[\pi(2n+1)+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}\sin\theta]^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{43}$$

其中，$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v),m,n\in Z$。

由于 $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v),m\in Z$，则有：

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)+(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)\\ \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)+(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})\end{cases} \tag{44}$$

其中，$m\in Z$。

将式(44)代入式(43)，即得：

$$M_{CN}=f_{CN}(m,n)=\frac{1}{|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)|}\{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2+\frac{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+1)^2\pi^2}}{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)+(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}[\ln\sum_{e\in E}f(e)(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+(2n+1)\pi\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)]\}^{\frac{1}{2}},m,n\in Z \tag{45}$$

则有 $\bigcup_{\{M_{CN}\}}\sim Z\times Z\sim Z$，且有 $|\bigcup_{\{M_{CN}\}}|=\aleph_0$。

同理，节点权重为复数、边权重为纯虚数的带权图的分形维数的模为：

$$M_{CI}=f_{CI}(m,n)=\frac{1}{2|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)|}\{[\ln\sum_{e\in E}f(e)+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\cos\theta]^2+[\pi(2n+\frac{1}{2})+\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\sin\theta]^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{46}$$

其中，$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v),m,n\in Z$。

将式(44)代入式(46)，即得：

$$M_{CI}=f_{CI}(m,n)=\frac{1}{|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)|}\{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2+\frac{\sqrt{\ln^2\sum_{e\in E}f(e)+(2n+\frac{1}{2})^2\pi^2}}{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)+(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}[\ln\sum_{e\in E}f(e)(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+(2n+\frac{1}{2})\pi\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)]\}^{\frac{1}{2}},m,n\in Z \tag{47}$$

则有 $\bigcup_{\{M_{CI}\}}\sim Z\times Z\sim Z$，且有 $|\bigcup_{\{M_{CI}\}}|=\aleph_0$。

同理，节点权重为复数、边权重为复数的带权图的分形维数的模为：

$$M_{CC}=f_{CC}(m,n)=\frac{1}{2|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)|}\{[\ln\sum_{e\in E}\sqrt{a^2+b^2}f(e)+\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}\cos\theta]^2+[(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})+\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}\sin\theta]^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{48}$$

其中，$\theta=\tan^{-1}\frac{1}{2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}}\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v),m,n\in Z$。

将式(44)代入式(48)，即得：

$$M_{CC}=f_{CC}(m,n)=\frac{1}{|\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)|}\{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2+\frac{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}{\sqrt{\ln^2\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)+(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})^2}}[(2m\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{e\in E}f(e)+(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a})\ln\sqrt{a^2+b^2}\sum_{v\in V}f(v)]\}^{\frac{1}{2}},m,n\in Z \tag{49}$$

则有 $\bigcup_{\{M_{CC}\}}\sim Z\times Z\sim Z$，且有 $|\bigcup_{\{M_{CC}\}}|=\aleph_0$。

至此，我们分析了多重分形维数呈面状分布的节点权重分别为负实数、纯虚数及复数的 9 种带权图。可以看出，这些带权图多重分形维数的模所构成的集合中，所有的 9 种集合均为可数集，而且均与整数集 Z 等势，其势均为 $\aleph_0$。

可以发现，采用多重分形维数的模的集合对具有无穷多个复数形式的带权图的多重分形维数进行度量是可行的，而且所得到的集合均是可数集，其中，2 种集合为 2 重集合，13 种集合为通常意义上的集合，这些集合均与整数集 Z 等势，其势为 $\aleph_0$。

结束语 复杂网络的自相似特性是复杂网络的重要特性之一，对复杂网络自相似特性的研究是复杂网络研究的重要内容，网络维数是度量复杂网络自相似特性的可行方法。针

对带权图的多重分形特性，本文采用将带权图的无穷多个复数形式的分形维数的模所构成的集合的势对带权图的多重分形特性进行度量。我们发现，尽管带权图的分形维数各不相同，但 15 种具有多重分形特性的带权图的分形维数的模构成的集合均是可数集，其中 2 种集合为 2 重集合，13 种集合为通常意义上的集合，所有的集合均与整数集 Z 等势，其势均为 $\aleph_0$。后续研究的重点在于深入分析不同类型带权图的多重分形维数之间的内在关联，并探讨多重分形度量在相关领域的研究与应用。

参 考 文 献

[1] ERDO S, RENYI A. On random graphs I [J]. Publicationes Mathematicae, 1959, 6: 290-297.

[2] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393: 440-442.

[3] NEWMAN M E J, WATTS D J. Renormalization group analysis of the small-world network model[J]. Physics Letter A, 1999, 293: 341-346.

[4] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286: 509-512.

[5] SONG C, JALVIN S, MAKSE H A. Self-similarity of complex networks[J]. Nature, 2005, 433: 392-395.

[6] LIU S J, LI T R, HONG S J, et al. Complex network construction based on matrix operation[J]. Scientia Sinica Informationis, 2016, 46(5): 610-626.

[7] LIU S J, LI T R, LIU X W. Network network dimension: A new measure for complex networks[J]. Computer Science, 2019, 46(1): 51-56.

[8] LIU S J, LI T R, ZHU J, et al. Research on multi-fractals of weighted graph[J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2020, 56(1): 85-97.

[9] ZHANG X D, LI Z L. Graph Theory and Its Applications[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005.

[10] MANDELBROT B. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension[M]. Paris and Montreal: Flammarion, 1975.

[11] HUREWICZ W, WALLMAN H. Dimension Theory[M]. Princeton: Princeton University Press, 1948.

[12] BALKA R, BUCZOLICH Z, ELEKES M. A new fractal dimension: The topological Hausdorff dimension [J]. Advances in Mathematics, 2015, 274(1): 881-927.

[13] MAULDIN R D, WILLIAMS S C. On the Hausdorff dimension of some graphs[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1986, 298: 793-803.

[14] SREENIVASAN K R, MENEVEAU C. The fractal facets of turbulence[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1986, 173(173): 357-386.

[15] LIANG J J, LI G S, ZHANG Z H, et al. Calculation Method for Fractal Dimension of Spherical Flames[J]. Journal of Combustion Science and Technology, 2016, 22(1): 26-32.

[16] HARTE D. Multifractals: Theory and Applications [M]. Chapman & Hall/CRC, 2001.

[17] ZHAO J T, CHEN Y G, LI S C. Bi-fractal structure and evolution of the Beijing-Tianjin-Hebei region urban land-use patterns [J]. Progress in Geography, 2019, 38(1): 77-87.

[18] CHEN Y G. Monofractal, multifractals, and self-affine fractals in urban studies[J]. Progress in Geography, 2019, 38(1): 38-49.

[19] LIU J L, WANG J, YU Z G, et al. Fractal and multifractal analyses of bipartite networks[J]. Scientific Reports, 2017(7): 45588.

[20] SONG Y Q, LIU J L, YU Z G, et al. Multifractal analysis of weighted networks by a modified sandbox algorithm[J]. Scientific Reports, 2015(5): 17628.

LIU Sheng-jiu, born in 1988, Ph.D, post Ph.D. His main research interests include complex network, natural language processing, data mining, etc.

LI Tian-rui, born in 1969, Ph.D, professor, Ph.D supervisor, is a member of China Computer Federation. His main research interests include data mining and knowledge discovery, granular computing and rough sets, cloud computing and big data, etc.