

(n, k) -冒泡排序网络的子网络可靠性



冯凯 马鑫玉

山西大学计算机与信息技术学院 太原 030006

摘要 并行计算机系统互连网络的拓扑性质对系统功能的实现起着重要的作用。为了精确度量基于 (n, k) -冒泡排序网络构建的并行计算机系统的子网络容错能力,建立了 (n, k) -冒泡排序网络中 $(n-m, k-m)$ -冒泡排序子网络与特定字符串之间的一一对应关系,研究了点故障模型下 (n, k) -冒泡排序网络中 $(n-m, k-m)$ -冒泡排序子网络的可靠性。当 $2 \leq k \leq n-2, 1 \leq m \leq k-1$ 时,首先在概率故障条件下给出了 (n, k) -冒泡排序网络中存在无故障的 $(n-m, k-m)$ -冒泡排序子网络的概率估计,并通过仿真实验验证了所得结果的精确性;其次,得出了不同数目的 $(n-m, k-m)$ -冒泡排序子网络保持无故障状态的平均失效时间的计算公式,仿真实验表明理论结果与仿真结果趋于一致。

关键词: 并行计算机系统;互连网络; (n, k) -冒泡排序网络;子网络可靠性;概率故障;平均失效时间

中图分类号 TP393.02

Subnetwork Reliability of (n, k) -bubble-sort Networks

FENG Kai and MA Xin-yu

School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

Abstract Topological properties of the interconnection network of a parallel computer system play an important role in realizing functions of the system. In order to measure the fault tolerance abilities of subnetworks in the parallel computer system which is built based on the (n, k) -bubble-sort network, the one-to-one relation between $(n-m, k-m)$ -bubble-sort subnetworks of the (n, k) -bubble-sort network and specific strings is constructed, and the reliability of $(n-m, k-m)$ -bubble-sort subnetworks in the (n, k) -bubble-sort network is studied under the node fault model. Assuming that $2 \leq k \leq n-2$ and $1 \leq m \leq k-1$, the probability that at least one $(n-m, k-m)$ -bubble-sort subnetwork is fault-free in an (n, k) -bubble-sort network under the probabilistic fault condition is firstly given, and the simulation experiments demonstrate the accuracy of the given results. Then the calculation formula of the mean time to failure to maintain the fault-free status of different number of $(n-m, k-m)$ -bubble-sort subnetworks is obtained, and the theoretical results are shown to be in accordance with the simulation results.

Keywords Parallel computer system, Interconnection network, (n, k) -bubble-sort network, Subnetwork reliability, Probabilistic failure, Mean time to failure

1 引言

并行计算机系统将大量的处理器按照某种模式连接起来,使得这些处理器可以通过信息交互进行协同工作,从而提高系统运算能力。并行计算机系统功能的实现很大程度上依赖于系统处理器之间的连接模式(即系统的互连网络)。因此,并行计算机系统互连网络的设计和优化成为高性能计算领域的一个研究热点。

以具有可划分性的互连网络(即网络可以被划分为一些独立的子网络,并且每个子网络具有同原网络几乎一致的拓扑性质,仅在规模上有所不同)构建的并行计算机系统支持单指令流多数数据流机制,可以更有效地利用系统资源执行用户任务。可划分性已经成为系统互连网络设计需要遵循的基本

原则之一。当系统互连网络中有故障发生时,网络关于其子网络的保持能力对系统实际应用至关重要。在此背景下,互连网络的子网络可靠性研究得到了广泛的关注。Chang等^[1]提出了概率故障条件下无故障子网络存在性的概率评估方法,并对 n 维超立方体网络中无故障的 $(n-1)$ 维超立方体子网络的存在概率进行了估计。受此启发,概率故障条件下 (n, k) -排列图网络^[2]、 (n, k) -星图网络^[3]、split-star网络^[4]和 k 元 n 方体网络^[5]的无故障子网络存在性的概率估计问题在近几年分别得到了研究。另一类子网络可靠性研究工作重点关注互连网络中不同数目的某一规模子网络保持无故障状态的平均失效时间。Abraham等^[6]分别在不同故障模型下得出了 n 维超立方体网络中不同规模子网络保持无故障状态的平均失效时间。最近,文献^[7]、文献^[8]和文献^[9]分别对 $(n,$

收稿日期:2020-11-20 返修日期:2021-01-10 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家自然科学基金(61502286)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61502286).

通信作者:冯凯(fengkai@sxu.edu.cn)

k)-星图网络、DCell 数据中心网络和 k 元 n 方体网络中不同数目的某一规模子网络保持无故障状态的平均失效时间进行了分析。

(n, k) -冒泡排序网络^[10]是传统的 n 维冒泡排序网络的一种扩展,它在保持规则性、可划分性、可扩展性等优良特性的同时,在网络规模的选取上更具有灵活性。近年来, (n, k) -冒泡排序网络的拓扑结构性质得到了广泛研究。Cheng 等^[11]对 (n, k) -冒泡排序网络的匹配排除性质进行了刻画。文献^[12]研究了 (n, k) -冒泡排序网络的子网络排除问题。文献^[13]和文献^[14]分别对 (n, k) -冒泡排序网络的广义 3-连通性和 h -好邻连通性进行了分析。

在实际应用中,许多并行计算机系统为保证各处理器之间通信的稳定,对处理器之间的通信线路都采用了冗余设计的策略(在这种情况下,系统处理器之间通信线路的故障相比处理器故障可以忽略不计)。基于这一考虑,本文将点故障模型下(假定互连网络中边故障可以忽略不计,各个顶点发生故障是相互独立的)深入研究 (n, k) -冒泡排序网络中 $(n-m, k-m)$ -冒泡排序子网络的可靠性,一方面在概率故障条件下对无故障的 $(n-m, k-m)$ -冒泡排序子网络的存在概率进行估计,另一方面对不同数目的 $(n-m, k-m)$ -冒泡排序子网络保持无故障状态的平均失效时间进行分析。对于文中其他未加以定义而被使用的图论术语和记号请参见文献^[15]。

2 基本概念和性质

(n, k) -冒泡排序网络($n > k$),记为 $B_{n,k}$,是一个具有 $n!/ (n-k)!$ 个顶点的连通图,它的任意一个顶点可表示为 $x = x_1 x_2 \cdots x_k$,其中对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ 均有 $x_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且满足 x_1, x_2, \dots, x_k 互不相同。两个顶点 $x = x_1 x_2 \cdots x_k$ 和 $y = y_1 y_2 \cdots y_k$ 相邻当且仅当下列两个条件之一成立:

(1)存在 $r \in \{2, 3, \dots, k\}$ 使得 $x_r = y_{r-1}, x_{r-1} = y_r$,并且对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus \{r-1, r\}$, 均有 $x_i = y_i$ (这样的一条边 (x, y) 称为 $B_{n,k}$ 中的一条 r -边)。

(2) $x_1 \neq y_1$ 且对于任意的 $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ 均有 $x_i = y_i$ (这样的一条边 (x, y) 称为 $B_{n,k}$ 中的一条 1-边)。

由 $B_{n,k}$ 的定义可知, $B_{n,k}$ 中每个顶点的度为 $n-1$ 。具体地,对于任意的 $x = x_1 x_2 \cdots x_k \in V(B_{n,k})$, 与 x 关联的 1-边有且仅有 $n-k$ 条,与 x 关联的 r -边有且仅有 1 条(这里 $r \in \{2, 3, \dots, k\}$)。当 $k=1$ 时, $B_{n,k}$ 同构于 n 个顶点的完全图;当 $k=n-1$ 时, $B_{n,k}$ 同构于 n 维冒泡排序网络。 $B_{4,2}$ 如图 1 所示。称 $B_{n,k}$ 中一个同构于 $B_{n-m, k-m}$ 的子图为一个 $B_{n-m, k-m}$ 子网络,其中 $1 \leq m \leq k-1$ 。当 $k \geq 2$ 时, $B_{n,k}$ 具有以下性质。

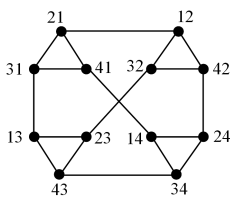


图 1 $(4, 2)$ -冒泡排序网络

Fig. 1 $(4, 2)$ -bubble-sort network

性质 1^[11] $B_{n,k}$ 是点传递的。

性质 2^[11] 通过删除 $B_{n,k}$ 中的所有 k -边, 可以将 $B_{n,k}$ 划分为 n 个不相交的 $B_{n-1, k-1}$ 子网络。

由性质 2, 有如下性质成立。

性质 3 可以将 $B_{n,k}$ 划分为 $n(n-1) \cdots (n-m+1)$ 个不相交的 $B_{n-m, k-m}$ 子网络 $H_1, H_2, \dots, H_{n(n-1) \cdots (n-m+1)}$, 且 $V(H_1) \cup V(H_2) \cup \dots \cup V(H_{n(n-1) \cdots (n-m+1)}) = V(B_{n,k})$ 。

给定正整数 n, k 和 m , 且满足 $2 \leq k \leq n-2, 1 \leq m \leq k-1$ 。设 a_1, a_2, \dots, a_m 为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中 m 个互不相同的整数。记 $M = \{x_1 x_2 \cdots x_{k-m} a_1 a_2 \cdots a_m : x_1, x_2, \dots, x_{k-m} \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \text{ 且互不相同}\}$ 。显然, $B_{n,k}$ 中由 M 导出的子图同构于 $B_{n-m, k-m}$ 。为了便于表述, 将 $B_{n,k}$ 中由 M 导出的子图记为一个 k 位的字符串 $X^{k-m} a_1 a_2 \cdots a_m$, 其中 $X^{k-m} = \underbrace{XX \cdots X}_{k-m}$ 。

进一步地, 有如下结论成立。

定理 1 $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-m, k-m}$ 子网络可用某个 $X^{k-m} a_1 a_2 \cdots a_m$ 唯一表示, 其中 $2 \leq k \leq n-2, 1 \leq m \leq k-1$ 。

证明: 首先证明以下 3 个断言成立。

断言 1 $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-k+1, 1}$ 子网络仅含 1-边且可用某个 $X a_2 a_3 \cdots a_k$ 唯一表示。

用反证法。假设 H 为 $B_{n,k}$ 中一个 $B_{n-k+1, 1}$ 子网络且 $E(H)$ 中包含 r -边, 其中 $r \in \{2, 3, \dots, k\}$ 。不妨设 r -边 $(x_1 \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_k, x_1 \cdots x_r x_{r-1} \cdots x_k) \in E(H)$ 。显然, 点 $x_1 \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_k$ 和 $x_1 \cdots x_r x_{r-1} \cdots x_k$ 在 H 中。由 $k \leq n-2$ 可知, $n-k+1 \geq 3$, 这意味着 H 中至少包含 3 个顶点。设 $a_1 a_2 \cdots a_k \in V(H) \setminus \{x_1 \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_k, x_1 \cdots x_r x_{r-1} \cdots x_k\}$ 。由 H 同构于 $B_{n-k+1, 1}$ 可知, 点 $a_1 a_2 \cdots a_k, x_1 \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_k$ 和 $x_1 \cdots x_r x_{r-1} \cdots x_k$ 两两相邻。由 $B_{n,k}$ 的定义可知, 边 $(a_1 a_2 \cdots a_k, x_1 \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_k)$ 或者是 1-边或者是 r' -边 ($r' \in \{2, 3, \dots, k\}$ 且 $r' \neq r$)。无论边 $(a_1 a_2 \cdots a_k, x_1 \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_k)$ 是 1-边还是 r' -边, 由 $B_{n,k}$ 的定义可知, $a_1 a_2 \cdots a_k$ 和 $x_1 \cdots x_r x_{r-1} \cdots x_k$ 均不相邻, 这与 H 同构于 $B_{n-k+1, 1}$ 矛盾。从而可知, $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-k+1, 1}$ 子网络仅含 1-边。

设 T 为 $B_{n,k}$ 中任一 $B_{n-k+1, 1}$ 子网络, 且 $a_1 a_2 \cdots a_k \in V(T)$ 。由 T 中仅含 1-边可知, 对于任意的 $b_1 b_2 \cdots b_k \in V(T) \setminus \{a_1 a_2 \cdots a_k\}$, 有 $b_i \neq a_i$, 且对于任意的 $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ 均有 $b_i = a_i$ 成立。可知, $V(T) \subseteq V(X a_2 a_3 \cdots a_k)$ 。又因为 $|V(T)| = |V(X a_2 a_3 \cdots a_k)| = n-k+1$, 故 $V(T) = V(X a_2 a_3 \cdots a_k)$, 这意味着 T 可用 $X a_2 a_3 \cdots a_k$ 唯一表示。断言 1 证毕。

断言 2 $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-m, k-m}$ 子网络 Q 必然包含 1-边且 Q 中每个顶点恰好与 $n-k$ 条 1-边关联。

此时 Q 同构于 $B_{n-m, k-m}$ 。由性质 3 可知, Q 可以被划分为 $(n-m)(n-m-1) \cdots (n-k+2)$ 个不相交的 $B_{n-k+1, 1}$ 子网络 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{(n-m)(n-m-1) \cdots (n-k+2)}$, 且 $V(Q_1) \cup V(Q_2) \cup \dots \cup V(Q_{(n-m)(n-m-1) \cdots (n-k+2)}) = V(Q)$ 。对于任意的 $a_1 a_2 \cdots a_k \in V(Q)$, 必存在 $i \in \{1, 2, \dots, (n-m)(n-m-1) \cdots (n-k+2)\}$, 使得 $a_1 a_2 \cdots a_k \in V(Q_i)$ 。由断言 1 可知, Q_i 仅含 1-边且可用 $X a_2 a_3 \cdots a_k$ 唯一表示。可知, Q 必然包含 1-边, 并且 $a_1 a_2 \cdots a_k$ 在 Q 中至少与 $n-k$ 条 1-边关联。由 $B_{n,k}$ 的定义可知, 在 $B_{n,k}$ 中与 $a_1 a_2 \cdots a_k$ 关联的 1-边有且仅有 $n-k$ 条。故 $a_1 a_2 \cdots a_k$ 在 Q 中恰好与 $n-k$ 条 1-边关联。断言 2 证毕。

断言 3 $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-m, k-m}$ 子网络 Q 仅含 1-边, t_1 -边, t_2 -边, \dots, t_{k-m-1} -边, 其中 $t_1, t_2, \dots, t_{k-m-1} \in \{2, 3, \dots, k\}$ 且互不相同。

由 $B_{n,k}$ 的定义可知, Q 中每个顶点的度为 $n-m-1$ 。对于任意的 $x \in V(Q)$, 记 $I_Q(x)$ 为 Q 中与 x 关联的边的集合。由断言 2 可知, x 在 Q 中恰好与 $n-k$ 条 1-边关联。又因为在 $B_{n,k}$ 中与 x 关联的 1-边有且仅有 $n-k$ 条, 并且与 x 关联的 r -边有且仅有 1 条 (这里 $r \in \{2, 3, \dots, k\}$), 故存在互不相同的 $p_1^x, p_2^x, \dots, p_{n-k}^x \in \{2, 3, \dots, k\}$, 使得 $I_Q(x)$ 仅含 1-边, p_1^x -边, p_2^x -边, \dots , p_{n-k}^x -边。同理, 对于任意的 $y \in V(Q) \setminus \{x\}$, 存在互不相同的 $p_1^y, p_2^y, \dots, p_{n-k}^y \in \{2, 3, \dots, k\}$, 使得 $I_Q(y)$ 仅含 1-边, p_1^y -边, p_2^y -边, \dots , p_{n-k}^y -边。由性质 1 可知, Q 是点传递的, 即存在 Q 的一个自同构映射 φ 使得 $\varphi(x) = y$ 且在 $V(Q)$ 上保持相邻性, 这意味着 $\{p_1^x, p_2^x, \dots, p_{n-k}^x\} = \{p_1^y, p_2^y, \dots, p_{n-k}^y\}$ 。令 $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-k}\} = \{p_1^x, p_2^x, \dots, p_{n-k}^x\}$, 则 $t_1, t_2, \dots, t_{n-k} \in \{2, 3, \dots, k\}$ 且互不相同。由 x 的任意性可知, Q 仅含 1-边, t_1 -边, t_2 -边, \dots , t_{n-k} -边。断言 3 证毕。

当 $m=k-1$ 时, 由断言 1 可知, $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络 (即 $B_{n-k+1,1}$ 子网络) 可用某个 $Xa_2a_3 \dots a_k$ 唯一表示。

当 $m=k-2$ 时, 设 Q 为 $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络 (即 $B_{n-k+2,2}$ 子网络)。由断言 3 可知, Q 中仅含 1-边和 t_1 -边 ($t_1 \in \{2, 3, \dots, k\}$)。由性质 3 可知, 可以将 Q 划分为 $n-k+2$ 个不相交的 $B_{n-k+1,1}$ 子网络 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-k+2}$, 且 $V(Q_1) \cup V(Q_2) \cup \dots \cup V(Q_{n-k+2}) = V(Q)$ 。假设 $t_1 \neq 2$, 则 $3 \leq t_1 \leq k$ 。设 t_1 -边 $(a_1 \dots a_{t_1-1} a_{t_1} \dots a_k, a_1 \dots a_{t_1} a_{t_1-1} \dots a_k) \in E(Q)$ 。由断言 1 可知, 点 $a_1 \dots a_{t_1-1} a_{t_1} \dots a_k$ 和 $a_1 \dots a_{t_1} a_{t_1-1} \dots a_k$ 必然在 Q 的不同的 $B_{n-k+1,1}$ 子网络中, 不妨设 $a_1 \dots a_{t_1-1} a_{t_1} \dots a_k \in V(Q_1)$, $a_1 \dots a_{t_1} a_{t_1-1} \dots a_k \in V(Q_2)$ (此时 Q_1 和 Q_2 可分别用 $Xa_2 \dots a_{t_1-1} a_{t_1} \dots a_k$ 和 $Xa_2 \dots a_{t_1} a_{t_1-1} \dots a_k$ 唯一表示)。此时, $n-k+2 > 3$ 。设 Q_{n-k+2} 可唯一表示为 $Xb_2 \dots b_k$, 则 $b_2 \dots b_k$ 不同于 $a_2 \dots a_{t_1-1} a_{t_1} \dots a_k$, 也不同于 $a_2 \dots a_{t_1} a_{t_1-1} \dots a_k$ 。又因为 Q 中仅含 1-边和 t_1 -边, 故 Q_{n-k+2} 中的点与 Q_1 中的点在 Q 中是不连通的, 这与 Q 是连通图矛盾。从而可知, $t_1 = 2$, 即 Q 中仅含 1-边和 2-边。设 $x_1 x_2 \dots x_k$ 和 $y_1 y_2 \dots y_k$ 为 Q 中任意两个不同的点, 则对于任意的 $i \in \{3, 4, \dots, k\}$ 均有 $x_i = y_i$ 成立。可知, $V(Q) \subseteq V(X^2 x_3 \dots x_k)$ 。又因为 $|V(Q)| = |V(X^2 x_3 \dots x_k)| = (n-k+2)! / (n-k)!$, 故 $V(Q) = V(X^2 x_3 \dots x_k)$, 这意味着 Q 可用 $X^2 x_3 \dots x_k$ 唯一表示。

当 $m=k-3$ 时, 设 Q 为 $B_{n,k}$ 中任一 $B_{n-m,k-m}$ 子网络 (即 $B_{n-k+3,3}$ 子网络)。由性质 3 可知, 可以将 Q 划分为 $n-k+3$ 个不相交的 $B_{n-k+2,2}$ 子网络 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-k+3}$, 且 $V(Q_1) \cup V(Q_2) \cup \dots \cup V(Q_{n-k+3}) = V(Q)$ 。又因为, $B_{n,k}$ 中任一 $B_{n-k+2,2}$ 子网络仅含 1-边和 2-边。可知 Q 中必然包含 1-边和 2-边。结合断言 3 可知, Q 中仅含 1-边、2-边和 t_2 -边 ($t_2 \in \{3, 4, \dots, k\}$)。假设 $t_2 \neq 3$, 则 $4 \leq t_2 \leq k$ 。设 t_2 -边 $(a_1 a_2 \dots a_{t_2-1} a_{t_2} \dots a_k, a_1 a_2 \dots a_{t_2} a_{t_2-1} \dots a_k) \in E(Q)$, 则点 $a_1 a_2 \dots a_{t_2-1} a_{t_2} \dots a_k$ 和 $a_1 a_2 \dots a_{t_2} a_{t_2-1} \dots a_k$ 必然在 Q 的不同的 $B_{n-k+2,2}$ 子网络中, 不妨设 $a_1 a_2 \dots a_{t_2-1} a_{t_2} \dots a_k \in V(Q_1)$, $a_1 a_2 \dots a_{t_2} a_{t_2-1} \dots a_k \in V(Q_2)$ (此时 Q_1 和 Q_2 可分别用 $X^2 a_3 \dots a_{t_2-1} a_{t_2} \dots a_k$ 和 $X^2 a_3 \dots a_{t_2} a_{t_2-1} \dots a_k$ 唯一表示)。此时, $n-k+3 > 3$ 。设 Q_{n-k+3} 可唯一表示为 $X^2 b_3 \dots b_k$, 则 $b_3 \dots b_k$ 不同于 $a_3 \dots a_{t_2-1} a_{t_2} \dots a_k$, 也不同于 $a_3 \dots a_{t_2} a_{t_2-1} \dots a_k$ 。又因为 Q 中仅含 1-边、2-边和 t_2 -边, 故 Q_{n-k+3} 中的点与 Q_1 中的点在 Q 中是不连通的, 这与 Q 是连通图矛盾。从而可知, $t_2 = 3$, 即 Q 中仅含 1-边、2-边和 3-边。设 $x_1 x_2 \dots x_k$ 和 $y_1 y_2 \dots y_k$ 为 Q 中任意两个不同的点, 则对于

任意的 $i \in \{4, 5, \dots, k\}$ 均有 $x_i = y_i$ 成立。可知, $V(Q) \subseteq V(X^3 x_4 \dots x_k)$ 。又因为 $|V(Q)| = |V(X^3 x_4 \dots x_k)| = (n-k+3)! / (n-k)!$, 故 $V(Q) = V(X^3 x_4 \dots x_k)$, 这意味着 Q 可用 $X^3 x_4 \dots x_k$ 唯一表示。

类似可证, 当 $1 \leq m \leq k-4$ 时, $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络可用某个 $X^{k-m} a_1 a_2 \dots a_m$ 唯一表示。定理 1 证毕。

定理 2 若 $2 \leq k \leq n-2$, $1 \leq m \leq k-1$, 则 $B_{n,k}$ 中恰好有 $n! / (n-m)!$ 个不同的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络且这些 $B_{n-m,k-m}$ 子网络互不相交。

证明: 由性质 3 可知, $B_{n,k}$ 可以被划分为 $n(n-1) \dots (n-m+1) = n! / (n-m)!$ 个不相交的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络, 即 $B_{n,k}$ 中至少有 $n! / (n-m)!$ 个不同的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络。由定理 1 可知, $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络可用某个 $X^{k-m} a_1 a_2 \dots a_m$ 唯一表示, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且互不相同, 这意味着 $B_{n,k}$ 中不同的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的个数最多不超过 $n! / (n-m)!$ 。从而可知, $B_{n,k}$ 中恰好有 $n! / (n-m)!$ 个不同的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络。设 T_1 和 T_2 为 $B_{n,k}$ 中任意两个不同的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络, 且可分别用 $X^{k-m} x_1 x_2 \dots x_m$ 和 $X^{k-m} y_1 y_2 \dots y_m$ 唯一表示。显然, $x_1 x_2 \dots x_m$ 不同于 $y_1 y_2 \dots y_m$, 这表明 $V(T_1) \cap V(T_2) = \emptyset$ 。故 $B_{n,k}$ 中不同的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络互不相交。定理 2 证毕。

3 无故障 $B_{n-m,k-m}$ 子网络存在概率的估计

3.1 理论计算

在概率故障条件下, 互连网络中边故障可以忽略不计, 各个顶点发生故障是相互独立的且各个顶点的可靠性概率是一致的。设 p 为 $B_{n,k}$ 中顶点的可靠性概率。记 $R_{n,k}^m(p)$ 为概率故障条件下 $B_{n,k}$ 中存在无故障的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的概率, 其中 $1 \leq m \leq k-1$ 。

当 $2 \leq k \leq n-2$ 时, 由定理 2 可知, $B_{n,k}$ 中恰好有 $n! / (n-m)!$ 个不同的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络。记事件 A_i 表示在概率故障条件下 $B_{n,k}$ 中第 i 个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络是无故障的, 其中 $1 \leq i \leq n! / (n-m)!$ 。根据容斥原理^[16], 可以给出 $R_{n,k}^m(p)$ 的计算公式:

$$R_{n,k}^m(p) = \sum_{i=1}^{n! / (n-m)!} Pr(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n! / (n-m)!} Pr(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < l \leq n! / (n-m)!} Pr(A_i \cap A_j \cap A_l) - \sum_{1 \leq i < j < l < q \leq n! / (n-m)!} Pr(A_i \cap A_j \cap A_l \cap A_q) + \dots + (-1)^{n! / (n-m)! - 1} Pr(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n! / (n-m)!})$$

其中, $Pr(\cdot)$ 表示事件 \cdot 发生的概率。

定理 3 设 $2 \leq k \leq n-2$, $1 \leq m \leq k-1$ 为整数。令 p 为 $B_{n,k}$ 中顶点的可靠性概率, 则有:

$$R_{n,k}^m(p) = 1 - (1 - p^{(n-m)! / (n-k)!})^{n! / (n-m)!}$$

证明: 当 $2 \leq k \leq n-2$, $1 \leq m \leq k-1$ 时, 由定理 2 可知, $B_{n,k}$ 中恰好有 $n! / (n-m)!$ 个不同的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络且这些 $B_{n-m,k-m}$ 子网络互不相交。又因为, $B_{n,k}$ 中边故障可以忽略不计且各个顶点发生故障是相互独立的。故对于任意两个不同的 $i, j \in \{1, 2, \dots, n! / (n-m)!\}$, A_i 和 A_j 是相互独立的。由 $|V(B_{n-m,k-m})| = (n-m)! / (n-k)!$ 可知, 对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n! / (n-m)!\}$ 均有 $Pr(A_i) = p^{(n-m)! / (n-k)!}$ 成立。故:

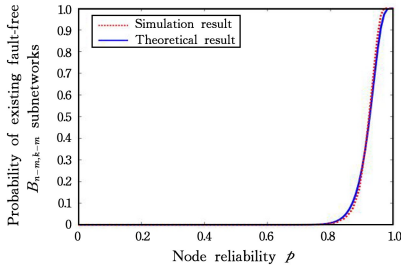
$$R_{n,k}^m(p) = \sum_{i=1}^{n! / (n-m)!} Pr(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n! / (n-m)!} Pr(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < l \leq n! / (n-m)!} Pr(A_i \cap A_j \cap A_l) - \dots + (-1)^{n! / (n-m)! - 1} Pr(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n! / (n-m)!})$$

$$\begin{aligned}
& (A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n!/(n-m)!} Pr(A_i \cap A_j \cap \\
& A_i \cap A_q) + \dots + (-1)^{(n!/(n-m)!-1)} Pr(A_1 \cap A_2 \\
& \cap \dots \cap A_{n!/(n-m)!}) \\
= & \binom{n!/(n-m)!}{1} p^{(n-m)!/(n-k)!} - \\
& \binom{n!/(n-m)!}{2} p^{2(n-m)!/(n-k)!} + \\
& \binom{n!/(n-m)!}{3} p^{3(n-m)!/(n-k)!} - \\
& \binom{n!/(n-m)!}{4} p^{4(n-m)!/(n-k)!} + \dots + \\
& (-1)^{n!/(n-m)!-1} \binom{n!/(n-m)!}{n!/(n-m)!} p^{n!/(n-k)!}
\end{aligned}$$

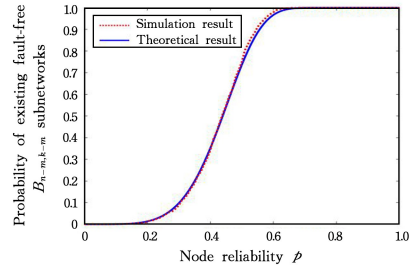
因为:

$$\begin{aligned}
(1 - p^{(n-m)!/(n-k)!})^{n!/(n-m)!} = \\
\sum_{i=0}^{n!/(n-m)!} (-1)^i \binom{n!/(n-m)!}{i} p^{i(n-m)!/(n-k)!}
\end{aligned}$$

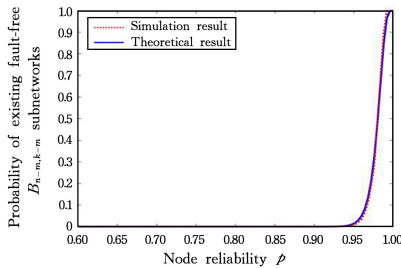
从而可知, $R_{n,k}^m(\rho) = 1 - (1 - \rho^{(n-m)!/(n-k)!})^{n!/(n-m)!}$ 。定理 3 证毕。



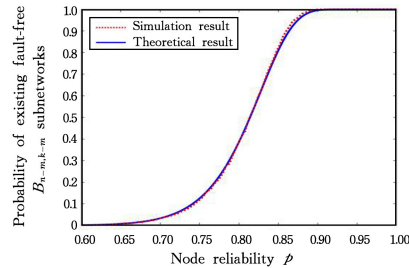
(a) $n=7, k=3, m=1$



(b) $n=7, k=3, m=2$



(c) $n=7, k=4, m=1$



(d) $n=7, k=4, m=2$

图 2 无故障 $B_{n-m,k-m}$ 子网络存在概率的分析结果

Fig. 2 Analysis results of probability of existing fault-free $B_{n-m,k-m}$ subnetworks

从图 2 可以看出,对于不同规模的 $B_{n,k}$ 及 $B_{n-m,k-m}$ 子网络,本文得出的理论结果与仿真结果均基本吻合。这表明,定理 3 给出的概率故障条件下 $B_{n,k}$ 中无故障 $B_{n-m,k-m}$ 子网络存在概率的计算公式具有较高的精确性。

4 基于平均失效时间的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络可靠性分析

4.1 理论计算

假设互连网络中边故障可以忽略不计,各个顶点发生故障是相互独立的且顶点的故障率不变。基于这一假设前提,本节将对 $B_{n,k}$ 中不同数目的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络保持无故障状态的平均失效时间进行分析。当 $2 \leq k \leq n-2, 1 \leq m \leq k-1$ 时,由定理 2 可知, $B_{n,k}$ 中恰好有 $n!/(n-m)!$ 个不同的 $B_{n-m,k-m}$

3.2 仿真分析

为了验证概率故障条件下 $B_{n,k}$ 中无故障的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的存在概率计算结果的精确性,本节采用蒙特卡洛法对 $B_{n,k}$ 中无故障 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的存在概率进行仿真实验。选取不同规模的 $B_{n,k}$ ($n=7, k \in \{3, 4\}$) 为实验对象。假定 $B_{n,k}$ 中边故障可以忽略不计,顶点的可靠性是独立同分布的。当 $B_{n,k}$ 中顶点的可靠性概率为 p 时,记 $f(p)$ 为 $B_{n,k}$ 中故障点的个数。因为 $1 - \frac{f(p)}{n!/(n-k)!}$ 可以看作 p 的估计值,所以 $f(p)$ 可取为 $\lfloor (1-p)n!/(n-k)! \rfloor$ 。

由定理 1 可知,当 $2 \leq k \leq n-2, 1 \leq m \leq k-1$ 时, $B_{n,k}$ 中任意一个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络可用某个 $X^{k-m} a_1 a_2 \dots a_m$ 唯一表示。可知,若 $b_1 b_2 \dots b_k$ 为 $B_{n,k}$ 中的故障点,则 $b_1 b_2 \dots b_k$ 可以破坏 $B_{n-m,k-m}$ 子网络 $X^{k-m} b_{k-m+1} b_{k-m+2} \dots b_k$ 。当 $B_{n,k}$ 中顶点的可靠性概率为 p 时,计算随机生成的 $f(p)$ 个 $B_{n,k}$ 中的故障点破坏的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的个数 ω ;重复这一模拟过程共 10000 次,记满足 $\omega < n!/(n-m)!$ (即 $B_{n,k}$ 中仍存在无故障的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络)的累计模拟次数为 W ,则 $W/10000$ 即为 $B_{n,k}$ 中无故障的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的存在概率的估计值。将仿真结果与定理 3 给出的理论结果进行对比,具体结果如图 2 所示。

子网络且这些 $B_{n-m,k-m}$ 子网络互不相交。

设 λ 为 $B_{n,k}$ 中顶点的故障率。记 T_i^m ($0 \leq i \leq n!/(n-m)! - 1$) 表示 $B_{n,k}$ 中有 $n!/(n-m)! - i$ 个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络保持无故障状态的平均失效时间的估计值, S_0 表示 $B_{n,k}$ 无故障的状态, S_i ($1 \leq i \leq n!/(n-m)!$) 表示 $B_{n,k}$ 中有 i 个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络发生故障的状态。在初始时刻,假定 $B_{n,k}$ 处于状态 S_0 ;当 $B_{n,k}$ 中不存在无故障的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络时,认定 $B_{n,k}$ 失效。当 $B_{n,k}$ 中所有故障点均位于 i 个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络中时, $B_{n,k}$ 中显然有 $n!/(n-m)! - i$ 个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络保持无故障状态。设 $R_i^m(t)$ 表示在 t 时刻 $B_{n,k}$ 中所有故障点均位于 i 个 $B_{n-m,k-m}$ 子网络中的概率,则对于任意的 $0 \leq i \leq n!/(n-m)! - 1$ 有 $T_i^m = \int_0^{+\infty} R_i^m(t) dt$ 。

令 $P_i(t)$ 表示在 t 时刻 $B_{n,k}$ 处于状态 S_i 的概率, 则 $R_0^m(t) = P_0(t)$, $R_i^m(t) = R_{i-1}^m(t) + P_i(t)$ ($1 \leq i \leq n!/(n-m)! - 1$)。可知, 为了计算 T_i^m 的值, 首先需要厘清 $S_0, S_1, \dots, S_{n!/(n-m)!}$ 之间的状态转换关系。

当 $t=0$ 时, $P_0(0) = 1$ 且对于任意的 $1 \leq i \leq n!/(n-m)!$ 有 $P_i(0) = 0$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $P_{n!/(n-m)!}(\infty) = 1$ 且对于任意的 $0 \leq i \leq n!/(n-m)! - 1$ 有 $P_i(\infty) = 0$ 。当 $B_{n,k}$ 处于状态 S_i ($1 \leq i \leq n!/(n-m)! - 1$) 时, $B_{n,k}$ 中任意一个故障的 $B_{n-m, k-m}$ 子网络仍可能包含健康的顶点, 但这些健康的顶点发生故障不会导致故障的 $B_{n-m, k-m}$ 子网络的个数增多。为了便于分析, 假设某个 $B_{n-m, k-m}$ 子网络中只要有一个点发生故障, 则将该 $B_{n-m, k-m}$ 子网络的所有顶点从 $B_{n,k}$ 中全部移除。令 $r_i = \lambda(n!/(n-m)! - i)(n-m)!/(n-k)!$, 其中 $0 \leq i \leq n!/(n-m)!$, 则 $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{n!/(n-m)!}$ 的状态转换图如图 3 所示。 $P_0(t), P_1(t), \dots, P_{n!/(n-m)!}(t)$ 之间的相互关系可表示为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial t} &= -r_0 P_0 \\ \frac{\partial P_i}{\partial t} &= -r_i P_i + r_{i-1} P_{i-1} \end{aligned}$$

其中, $1 \leq i \leq n!/(n-m)!$ 。

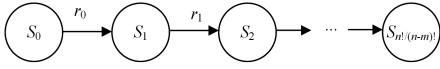


图 3 $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{n!/(n-m)!}$ 的状态转换图

Fig. 3 State transition diagram of $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{n!/(n-m)!}$

进一步地, 有如下结论成立。

定理 4 设 $2 \leq k \leq n-2, 1 \leq m \leq k-1$ 为整数。令 λ 为 $B_{n,k}$ 中顶点的故障率, 则有:

$$\begin{aligned} T_0^m &= \frac{(n-k)!}{\lambda n!} \\ T_i^m &= T_{i-1}^m + \frac{(n-k)!}{\lambda(n!/(n-m)! - i)(n-m)!} \end{aligned}$$

其中, $1 \leq i \leq n!/(n-m)! - 1$ 。

证明: 由 $\frac{\partial P_0}{\partial t} = -r_0 P_0$ 和 $P_0(0) = 1$ 可知, $P_0(t) = e^{-r_0 t}$ 。

故, $T_0^m = \int_0^{+\infty} R_0^m(t) dt = \int_0^{+\infty} P_0(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-r_0 t} dt = \frac{1}{r_0} = \frac{(n-k)!}{\lambda n!}$ 。记 $\mathcal{L}[f]$ 表示函数 f 的拉普拉斯变换。对 $P_0(t) = e^{-r_0 t}$ 作拉普拉斯变换可得:

$$\mathcal{L}[P_0] = \int_0^{+\infty} e^{-r_0 t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(r_0+s)t} dt = \frac{1}{r_0+s}$$

断言 对于任意的 $1 \leq i \leq n!/(n-m)!$, 有 $\mathcal{L}[P_i] = \frac{r_{i-1}}{r_i+s}$

$\mathcal{L}[P_{i-1}]$ 。

对 $\frac{\partial P_i}{\partial t} = -r_i P_i + r_{i-1} P_{i-1}$ 作拉普拉斯变换可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\partial P_i}{\partial t}\right] &= \int_0^{+\infty} (-r_i P_i + r_{i-1} P_{i-1}) e^{-st} dt \\ &= -r_i \int_0^{+\infty} P_i e^{-st} dt + r_{i-1} \int_0^{+\infty} P_{i-1} e^{-st} dt \\ &= -r_i \mathcal{L}[P_i] + r_{i-1} \mathcal{L}[P_{i-1}] \end{aligned}$$

又因为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\partial P_i}{\partial t}\right] &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial P_i}{\partial t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dP_i \\ &= P_i e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} P_i d e^{-st} \\ &= -P_i(0) + s \int_0^{+\infty} P_i e^{-st} dt \\ &= s \mathcal{L}[P_i] \end{aligned}$$

故 $s \mathcal{L}[P_i] = -r_i \mathcal{L}[P_i] + r_{i-1} \mathcal{L}[P_{i-1}]$, 即 $\mathcal{L}[P_i] = \frac{r_{i-1}}{r_i+s}$

$\mathcal{L}[P_{i-1}]$ 。断言证毕。

由断言可知, 对于任意的 $1 \leq i \leq n!/(n-m)! - 1$, 有:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[P_i] &= \frac{r_{i-1}}{r_i+s} \mathcal{L}[P_{i-1}] \\ &= \frac{r_{i-1}}{r_i+s} \frac{r_{i-2}}{r_{i-1}+s} \dots \frac{r_0}{r_1+s} \mathcal{L}[P_0] \\ &= \frac{r_{i-1}}{r_i+s} \frac{r_{i-2}}{r_{i-1}+s} \dots \frac{r_0}{r_1+s} \frac{1}{r_0+s} \end{aligned}$$

即 $\mathcal{L}[P_i] = \int_0^{+\infty} P_i e^{-st} dt = \frac{r_{i-1}}{r_i+s} \frac{r_{i-2}}{r_{i-1}+s} \dots \frac{r_0}{r_1+s} \frac{1}{r_0+s}$ 。令 $s=0$, 则 $\int_0^{+\infty} P_i dt = \frac{1}{r_i}$ 。因此, 对于任意的 $1 \leq i \leq n!/(n-m)! - 1$, 有:

$$\begin{aligned} T_i^m &= \int_0^{+\infty} R_i^m(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (R_{i-1}^m(t) + P_i(t)) dt \\ &= T_{i-1}^m + \int_0^{+\infty} P_i(t) dt \\ &= T_{i-1}^m + \frac{1}{r_i} \\ &= T_{i-1}^m + \frac{(n-k)!}{\lambda(n!/(n-m)! - i)(n-m)!} \end{aligned}$$

定理 4 证毕。

4.2 仿真分析

为了评估 $B_{n,k}$ 中不同数目的 $B_{n-m, k-m}$ 子网络保持无故障状态的平均失效时间的计算公式的精确性, 本节使用 MATLAB 对基于平均失效时间的 $B_{n-m, k-m}$ 子网络可靠性进行仿真实验。选取不同规模的 $B_{n,k}$ ($n=7, k \in \{3, 4\}$) 为实验对象。假定 $B_{n,k}$ 中边故障可以忽略不计, 各个顶点发生故障是相互独立的且顶点的故障率不变。设 $B_{n,k}$ 中顶点的故障率为 λ ($\lambda = 10^{-5}/h$), 则在任意时刻 t , $B_{n,k}$ 中顶点的可靠性为 $p(t) = e^{-\int_0^t \lambda dt} = e^{-\lambda t}$ 。令 $f(t)$ 为 t 时刻 $B_{n,k}$ 中故障点的个数, 则 $f(t)$ 可取为 $\lfloor (1 - e^{-\lambda t}) n!/(n-k)! \rfloor$ 。事实上, $B_{n,k}$ 中的故障点 $b_1 b_2 \dots b_k$ 可以破坏 $B_{n-m, k-m}$ 子网络 $X^{k-m} b_{k-m+1} b_{k-m+2} \dots b_k$ 。通过随机生成 10000 次故障点集对 t 时刻发生故障的 $B_{n-m, k-m}$ 子网络的平均个数进行仿真计算, 并与定理 4 给出的理论结果 (对于 $0 \leq i \leq n!/(n-m)! - 1$, T_i^m 表示 $B_{n,k}$ 中有 $n!/(n-m)! - i$ 个 $B_{n-m, k-m}$ 子网络保持无故障状态的平均失效时间, 即 T_i^m 时刻 $B_{n,k}$ 中会出现 $i+1$ 个故障的 $B_{n-m, k-m}$ 子网络) 进行对比, 具体结果如图 4 所示。从图 4 可以看出, 对于不同规模的 $B_{n,k}$ 及 $B_{n-m, k-m}$ 子网络, 本文得出的理论结果与仿真结果均趋于一致。这表明定理 4 给出的 $B_{n,k}$ 中不同数目的 $B_{n-m, k-m}$ 子网络保持无故障状态的平均失效时间的估算公式是较为精确的。

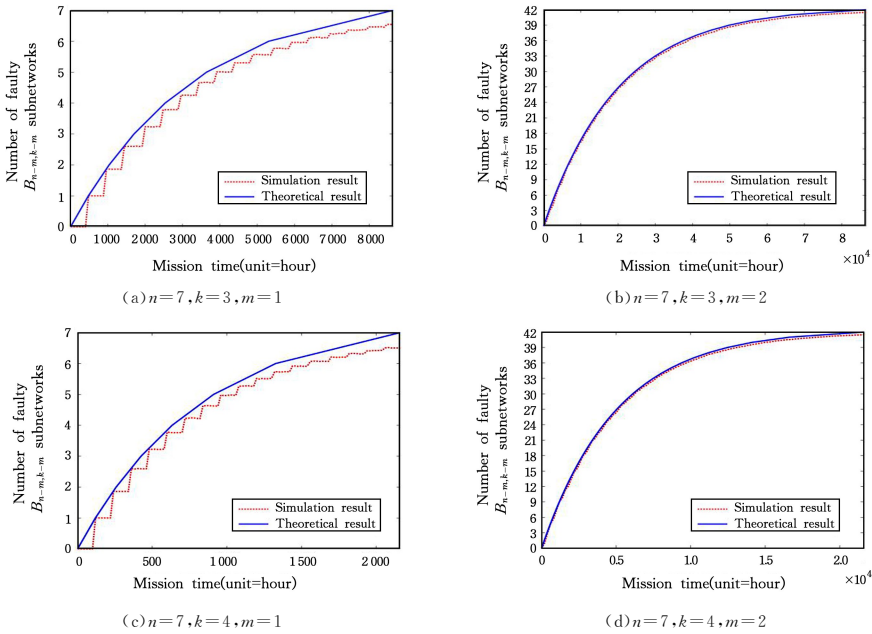


图 4 基于平均失效时间的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络可靠性分析结果

Fig. 4 Analysis results of $B_{n-m,k-m}$ subnetwork reliability with respect to mean time to failure

结束语 并行计算机系统互连网络的性能对系统功能的实现起着重要作用。互连网络的子网络可靠性是衡量网络性能的关键指标之一。本文在点故障模型下对 $B_{n,k}$ 中 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的可靠性进行了研究。对于 $2 \leq k \leq n-2$ 和 $1 \leq m \leq k-1$, 首先在概率故障条件下给出了 $B_{n,k}$ 中存在无故障的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的概率估计, 并通过仿真实验验证了所得结果的精确性; 其次得出了不同数目的 $B_{n-m,k-m}$ 子网络保持无故障状态的平均失效时间的计算公式, 仿真实验表明得出的计算公式具有较高的精确性。这些研究工作可以为基于 $B_{n,k}$ 构建的并行计算机系统的算法设计提供理论参考。边故障模型下 $B_{n,k}$ 中 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的可靠性以及点边混合故障模型下 $B_{n,k}$ 中 $B_{n-m,k-m}$ 子网络的可靠性值得进一步研究。

参考文献

- [1] CHANG Y, BHUYAN L N. A combinatorial analysis of subcube reliability in hypercube[J]. IEEE Transactions on Computers, 1995, 44(7): 952-956.
- [2] LIN L, XU L, ZHOU S, et al. The reliability of subgraphs in the arrangement graph[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2015, 64(2): 807-818.
- [3] LI X, ZHOU S, XU X, et al. The reliability analysis based on subsystems of (n, k) -star graph[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2016, 65(4): 1700-1709.
- [4] KUNG T L, TENG Y H, LIN C K, et al. Combinatorial analysis of the subsystem reliability of the split-star network[J]. Information Sciences, 2017, 415: 28-40.
- [5] FENG K, JI Z, WEI W. Subnetwork reliability analysis in k -ary n -cubes[J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 267: 85-92.
- [6] ABRAHAM S, PADMANABHAN K. Reliability of the hypercube[C]// Proceedings of the 1988 International Conference on Parallel Processing. Piscataway: IEEE, 1988: 90-94.
- [7] ZHOU S, LI X, LI J, et al. Reliability assessment of multiprocessor system based on (n, k) -star network[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2017, 66(4): 1025-1035.
- [8] LV M, ZHOU S, SUN X, et al. Reliability evaluation of data center network DCell[J]. Parallel Processing Letters, 2018, 28(4): 1850015.
- [9] FENG K, LI J. Reliability assessment of k -ary n -cube networks[J]. Journal of Computer Applications, 2019, 39(11): 3323-3327.
- [10] SHAWASH N. Relationships among popular interconnection networks and their common generalization[D]. Oakland: Oakland University, 2008.
- [11] CHENG E, LIPTÁK L, SHERMAN D. Matching preclusion for the (n, k) -bubble-sort graphs[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2010, 87(11): 2408-2418.
- [12] YANG Y X, QIU Y N. Sub-network preclusion in (n, k) -bubble-sort networks[J]. Computer Science, 2017, 44(11): 264-267.
- [13] ZHAO S, HAO R, WU L. The generalized connectivity of (n, k) -bubble-sort graphs[J]. The Computer Journal, 2019, 62(9): 1277-1283.
- [14] ZHAO S, HAO R. The fault tolerance of (n, k) -bubble-sort networks[J]. Discrete Applied Mathematics, 2020, 285: 204-211.
- [15] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory[M]. New York: Springer, 2008: 1-356.
- [16] SANE S. Combinatorial Techniques[M]. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2016: 57-79.



FENG Kai, born in 1987, Ph.D, associate professor, master supervisor, is a member of China Computer Federation. His main research interests include fault-tolerance of interconnection network, graph theory and its applications.