

三种近似算子之间的关系

鲁 巡 李妍妍 秦克云

西南交通大学数学学院 成都 611756

(2900501866@qq.com)



摘要 在广义近似空间中,可以从对象、知识粒以及子系统的角度构造3种不同类型的广义粗糙近似算子。文中研究了这些近似算子的基本性质与相互关系,给出了3类近似算子相同的充要条件。另外,不同的近似空间可能生成相同的基于知识粒及基于子系统的近似算子,文中给出了不同二元关系生成相同近似算子的一些充要条件。

关键词: 广义近似空间;近似算子;左、右邻域

中图法分类号 TP182

Relationship Among Three Types of Rough Approximation Pairs

LU Xun, LI Yan-yan and QIN Ke-yun

College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

Abstract In generalized approximation spaces, approximation operators can be constructed based on elements, knowledge granules and subsystems. This paper is devoted to discussion of basic properties and relationships among these three types of approximation operators. Some necessary and sufficient conditions for approximation operators coincide with each other are provided. In addition, different approximation spaces may generate same granule based or subsystem based rough approximation operators. Some necessary and sufficient conditions for different approximation spaces generating same approximate operators are surveyed.

Keywords Generalized approximation space, Approximation operator, Left and right relative sets

1 引言

1982年波兰学者 Pawlak^[1]创立了粗糙集理论。作为一种处理不确定性问题的数学工具,粗糙集理论将知识理解为对对象的分类能力,通过对对象集合上的等价关系进行描述,借助相应的等价类构造近似算子,来刻画不确定性概念。目前,粗糙集理论已经在知识与数据发现、模式识别与分类、知识推理、不确定性决策等领域获得了成功的应用^[2-5]。

Pawlak粗糙集模型是基于对象集合上的等价关系建立的。为了推广粗糙集理论的应用范围,人们从实际应用背景出发,提出了多种形式的粗糙集推广模型,如基于一般二元关系的广义粗糙集模型^[6-8]、基于对象之间模糊相似关系的模糊粗糙集模型^[9-11]、基于论域覆盖的覆盖粗糙集模型^[12-13]等。在广义近似空间中,可以分别从对象、知识粒以及子系统的角度构造3种不同的广义粗糙近似算子,它们具有不同的语义解释。基于子系统的广义近似算子与近似集构成的拓扑结构有直接联系,从相应近似集构成的拓扑空间的角度刻画近似空间的特性受到了广泛关注^[14-20]。在基于等价关系的 Pawlak近似空间中,知识粒形成论域的划分,基于对象、知识粒以及子系统的3种粗糙近似算子相互等价,但在一般广义近似空间中它们是不同的近似算子。基于对象以及基于知识粒的

两种近似算子之间的关系已有很多研究。Yao^[6]讨论了基于对象的广义粗糙近似算子的基本性质。Zhang等^[21]系统讨论了基于对象以及基于知识粒的两种近似算子之间的关系。Liu^[20,22-23]进一步研究了特定论域上的二元关系、逆关系、复合关系诱导的近似算子之间的关系,并进一步讨论了基于知识粒以及基于子系统的广义粗糙近似算子的拓扑性质。Zhang等^[24]讨论了基于知识粒的上近似算子及其对偶算子的拓扑结构。本文进一步讨论了一般广义近似空间中基于对象、知识粒以及子系统的广义粗糙近似算子之间的关系,主要研究基于对象与基于子系统的广义粗糙近似算子以及基于知识粒与基于子系统的广义粗糙近似算子之间的关系,给出了上、下近似算子对偶的条件以及不同二元关系生成相同近似算子的条件,为进一步讨论粗糙近似算子的拓扑结构及其应用创造了条件。

2 预备知识

本节给出了广义粗糙集模型中近似算子的相关概念及其基本性质。

设 U 是集合, R 是 U 上的一个二元关系,即 $R \subseteq U \times U$ 。对于任意 $x \in U$, x 关于 R 的左、右邻域分别定义为 $l_R(x) = \{y | y \in U, (y, x) \in R\}$, $r_R(x) = \{y | y \in U, (x, y) \in R\}$ 。若对于任

收稿日期:2020-09-10 返修日期:2020-11-09 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家自然科学基金项目(61976130,61473239)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61976130,61473239).

通信作者:秦克云(keyunqin@263.net)

意 $x \in U$, 有 $x \in r_R(x)$, 则称 R 是 U 上的自反二元关系; 若对于任意 $x, y \in U$, 当 $x \in r_R(y)$ 时, 有 $y \in r_R(x)$, 则称 R 是 U 上的对称二元关系; 称 R 是 U 上的传递二元关系, 若对于任意 $x, y \in U$, 当 $y \in r_R(x)$ 时, 则有 $r_R(y) \subseteq r_R(x)$; 若 R 是 U 上的自反、对称、传递二元关系, 则称 R 是 U 上的等价关系; 称 R 是 U 上的欧几里德二元关系, 若对于任意 $x, y, z \in U$, 当 $y, z \in r_R(x)$ 时, 则有 $z \in r_R(y)$ 。记 $R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}$, 称 R^{-1} 为 R 的逆关系。假设 R, S 是 U 上的二元关系, R 与 S 的复合关系为 $R \circ S = \{(x, y) | \exists z \in U((x, z) \in S \wedge (z, y) \in R)\}$ 。

假设 U 是集合, R 是 U 上的二元关系。按照粗糙集与粒计算的观点, $r_R(x)$ 是 x 的相似类, 即与 x 相似的对象构成的集合 $\{r_R(x) | x \in U\}$ 是相应的知识粒结构。令 $\theta_R = \{X | \exists Y \subseteq U, X = \bigcup_{x \in Y} r_R(x) \cup \{\emptyset\}\}$ 。显然有 $\theta_R \subseteq P(U)$, 且 θ_R 保持并运算。因此, (θ_R, \cup) 为一个代数系统, 可以看成幂集布尔代数 $P(U)$ 的一个子系统。一般情况下, θ_R 关于集合交运算、补运算不封闭。

定义 1^[23] 设 (U, R) 是广义近似空间。对于任意 $X \subseteq U$, X 在 (U, R) 中基于对象的上、下近似为:

$$\overline{R}(X) = \{x | r_R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

$$\underline{R}(X) = \{x | r_R(x) \subseteq X\}$$

定义 2^[23] 设 (U, R) 是广义近似空间。对于任意 $X \subseteq U$, X 在 (U, R) 中基于粒的上、下近似为:

$$\overline{R}_*(X) = \bigcup \{r_R(x) | r_R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

$$\underline{R}_*(X) = \bigcup \{r_R(x) | r_R(x) \subseteq X\}$$

定义 3^[23] 设 (U, R) 是广义近似空间。对于任意 $X \subseteq U$, X 在 (U, R) 中基于子系统的上、下近似为:

$$\overline{R}_{**}(X) = \bigcap \{Y | Y \in \theta_R, X \subseteq Y\}$$

$$\underline{R}_{**}(X) = \bigcup \{Y | Y \in \theta_R, Y \subseteq X\}$$

注意: 若对于 $X \subseteq U$, 不存在 $Y \in \theta_R$ 使得 $X \subseteq Y$, 则 $\overline{R}_{**}(X) = U$ 。

若 R 是 U 上的等价关系, 则称 (U, R) 是 Pawlak 近似空间。此时, 基于对象、基于粒以及基于子系统的 3 种上、下近似算子相互等价。但在广义近似空间中, 上述 3 种近似算子一般不等价。

例 1 设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 为论域, $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2)\}$, 得 $r_R(1) = \{1\}$, $r_R(2) = \{2, 4\}$, $r_R(3) = \{1, 2\}$, $r_R(4) = \emptyset$, $r_R(5) = \emptyset$, 则 $\theta_R = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$ 。若取 $X = \{1, 2, 3\}$, 经计算可得 $\underline{R}(X) = \{1, 3, 4, 5\}$, $\underline{R}_*(X) = \{1, 2\}$, $\underline{R}_{**}(X) = \{1, 2\}$ 。另外, $\overline{R}(X) = \{1, 2, 3\}$, $\overline{R}_*(X) = \{1, 2, 4\}$, $\overline{R}_{**}(X) = U$ 。

近似算子具有如下基本性质。

命题 1^[7] 设 (U, R) 是广义近似空间。对于任意 $X, Y \subseteq U$, 有:

$$(1) \overline{R}(X) = \bigcup_{x \in X} \overline{R}(x).$$

$$(2) \overline{R}(\emptyset) = \emptyset, \underline{R}(U) = U.$$

(3) $\underline{R}(X^c) = (\overline{R}(X))^c$, $\overline{R}(X^c) = (\underline{R}(X))^c$, 其中 X^c 是 X 的补集。

$$(4) \text{若 } X \subseteq Y, \text{ 则 } \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y), \overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y).$$

(5) $\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$, $\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y)$ 。

(6) 对于任意 $X_i \subseteq U, i \in I$, 有 $\overline{R}(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} \overline{R}(X_i)$, $\underline{R}(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} \underline{R}(X_i)$, 其中 I 是任意给定的指标集。

命题 2^[13, 25] 设 (U, R) 是广义近似空间。对于任意 $X, Y \subseteq U$, 有:

$$(1) \underline{R}_*(X) \subseteq X, \underline{R}_*(\underline{R}_*(X)) = \underline{R}_*(X).$$

$$(2) \text{若 } X \subseteq Y, \text{ 则 } \underline{R}_*(X) \subseteq \underline{R}_*(Y), \overline{R}_*(X) \subseteq \overline{R}_*(Y).$$

$$(3) \text{对于任意 } x \in U, \text{ 有 } \underline{R}_*(r_R(x)) = r_R(x).$$

$$(4) \overline{R}_*(\emptyset) = \emptyset.$$

(5) 对于任意 $X_i \subseteq U, i \in I$, 有 $\overline{R}_*(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} \overline{R}_*(X_i)$, 其中 I 是任意给定的指标集。

命题 3^[13, 26] 设 (U, R) 是广义近似空间。对于任意 $X, Y \subseteq U$, 有:

$$(1) \underline{R}_{**}(X) = \underline{R}_*(X), X \subseteq \overline{R}_{**}(X).$$

$$(2) \text{对于任意 } x \in U, \text{ 有 } \overline{R}_{**}(r_R(x)) = r_R(x).$$

$$(3) \text{若 } X \subseteq Y, \text{ 则 } \overline{R}_{**}(X) \subseteq \overline{R}_{**}(Y).$$

$$(4) X \subseteq \overline{R}_*(X) \text{ 当且仅当 } \overline{R}_{**}(X) \subseteq \overline{R}_*(X).$$

3 3 种近似算子之间的关系

已有很多文献^[13, 26-27]对近似算子近似对 $(\underline{R}, \overline{R})$ 与 $(\underline{R}_*, \overline{R}_*)$ 之间的关系进行了讨论。本节主要研究 $(\underline{R}, \overline{R})$ 与 $(\underline{R}_{**}, \overline{R}_{**})$ 以及 $(\underline{R}_*, \overline{R}_*)$ 与 $(\underline{R}_{**}, \overline{R}_{**})$ 之间的关系。

定理 1 设 (U, R) 是广义近似空间。 $\forall X \subseteq U, \overline{R}_{**}(X) \subseteq \overline{R}_*(X)$ 当且仅当 $C = \{r_R(x) | x \in U\} - \{\emptyset\}$ 是 U 的一个覆盖。

证明: (必要性) 假设对于任意 $X \subseteq U$, 有 $\overline{R}_{**}(X) \subseteq \overline{R}_*(X)$ 。于是有 $U \subseteq \overline{R}_{**}(U) \subseteq \overline{R}_*(U)$, 即 $U \subseteq \overline{R}_*(U) = \bigcup \{r_R(x) | r_R(x) \cap U \neq \emptyset\} = \bigcup \{r_R(x) | r_R(x) \neq \emptyset\} = \bigcup C$ 。因此, C 是 U 的一个覆盖。

(充分性) 假设 C 是 U 的一个覆盖, 则 $U = \bigcup C$ 。对于任意 $X \subseteq U$ 及 $x \in X$, 存在 $y \in U$ 使得 $x \in r_R(y)$ 。于是有 $r_R(y) \cap X \neq \emptyset$, 从而有 $x \in r_R(y) \subseteq \overline{R}_*(X)$ 。因此, 有 $X \subseteq \overline{R}_*(X)$ 。再由命题 3 中的 (4) 可得 $\overline{R}_{**}(X) \subseteq \overline{R}_*(X)$ 。

定理 2 设 (U, R) 是广义近似空间。 $\forall X \subseteq U, \overline{R}_*(X) \subseteq \overline{R}_{**}(X)$ 当且仅当 $\forall x \in U, \overline{R}_*(\{x\}) \subseteq \overline{R}_{**}(\{x\})$ 。

证明: 必要性显然成立。

充分性: 假设对于任意 $x \in U$, 有 $\overline{R}_*(\{x\}) \subseteq \overline{R}_{**}(\{x\})$ 。于是, 对于任意 $X \subseteq U$, 有:

$$\overline{R}_*(X) = \overline{R}_*(\bigcup_{x \in X} \{x\}) = \bigcup_{x \in X} \overline{R}_*(\{x\}) \subseteq \bigcup_{x \in X} \overline{R}_{**}(\{x\}) \subseteq \overline{R}_{**}(X)$$

引理 1 设 (U, R) 是广义近似空间。对于任意 $x \in U$, 有 $\overline{R}_{**}(\{x\}) = \bigcap \{r_R(y) | x \in r_R(y)\}$ 。

证明: 对于任意 $x \in U$, 由定义 3 可得 $\overline{R}_{**}(\{x\}) = \bigcap \{Y | Y \in \theta_R, x \in Y\}$ 。若 $y \in U$ 使得 $x \in r_R(y)$, 注意到 $r_R(y) \in \theta_R$, 于是 $\{r_R(y) | x \in r_R(y)\} \subseteq \{Y | Y \in \theta_R, x \in Y\}$, 从而有:

$$\overline{R}_{**}(\{x\}) = \bigcap \{Y | Y \in \theta_R, x \in Y\} \subseteq \bigcap \{r_R(y) | x \in r_R(y)\}$$

另一方面, 假设 $u \in \bigcap \{r_R(y) | x \in r_R(y)\}$ 。对于任意 $Y \in \theta_R$, 当 $x \in Y$ 时, 不妨设 $Y = \bigcup_{z \in Z} r_R(z)$, 于是存在 $z \in Z$ 使得

$x \in r_R(z)$ 。由 $u \in \bigcap \{r_R(y) \mid x \in r_R(y)\}$ 可得 $u \in r_R(z)$, 从而 $u \in Y$ 。由 Y 的任意性可得 $u \in \bigcap \{Y \mid Y \in \theta_R, x \in Y\} = \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。于是有 $\bigcap \{r_R(y) \mid x \in r_R(y)\} \subseteq \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。

定理 3 设 (U, R) 是广义近似空间。 $\forall x \in U, \overline{R_{**}}(\{x\}) \subseteq \overline{R}(\{x\})$ 当且仅当 C 是 $\bigcup_{x \in U} r_R(x)$ 的一个划分。

证明:(必要性)显然, C 是 $\bigcup_{x \in U} r_R(x)$ 的一个覆盖。对于任意 $x, y \in U$, 若 $r_R(x) \cap r_R(y) \neq \emptyset$, 则存在 $z \in U$ 使得 $z \in r_R(x) \cap r_R(y)$, 因此 $r_R(x) \cap \{z\} \neq \emptyset, r_R(x) \subseteq \overline{R_{**}}(\{z\})$ 。从而对于任意 $u \in r_R(x)$, 有 $u \in \overline{R_{**}}(\{z\}) \subseteq \overline{R_{**}}(\{z\}) \subseteq r_R(y)$ 。因此, $r_R(x) \subseteq r_R(y)$ 。同理, 可得 $r_R(y) \subseteq r_R(x)$ 。故 C 是 $\bigcup_{x \in U} r_R(x)$ 的一个划分。

(充分性)对于任意 $x \in U$, 若 $y \in \overline{R_{**}}(\{x\})$, 则存在 $z \in U$ 使得 $y \in r_R(z)$ 且 $r_R(z) \cap \{x\} \neq \emptyset$, 即 $x \in r_R(z)$ 。由于 C 是 $\bigcup_{x \in U} r_R(x)$ 的一个划分, 因此由引理 1 可得 $\overline{R_{**}}(\{x\}) = r_R(z)$, 从而 $y \in \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。由 y 的任意性可得 $\overline{R_{**}}(\{x\}) \subseteq \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。

推论 1 设 (U, R) 是广义近似空间。 $\forall X \subseteq U, \overline{R_{**}}(X) = \overline{R}(X)$ 当且仅当 C 是 U 的一个划分。

定理 4 设 (U, R) 是广义近似空间。 $\forall X \subseteq U, \overline{R}(X) \subseteq \overline{R_{**}}(X)$ 当且仅当 $\forall x \in U, \overline{R}(\{x\}) \subseteq \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。

证明:必要性显然成立。

(充分性)假设对于任意 $x \in U$, 有 $\overline{R}(\{x\}) \subseteq \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。

对于任意 $X \subseteq U$, 由命题 1 中的(6)及命题 3 中的(3)可知, $\overline{R}(X) = \bigcup_{x \in X} \overline{R}(\{x\})$ 。于是 $\overline{R}(X) = \overline{R}(\bigcup_{x \in X} \{x\}) = \bigcup_{x \in X} \overline{R}(\{x\}) \subseteq \bigcup_{x \in X} \overline{R_{**}}(\{x\}) \subseteq \overline{R_{**}}(X)$ 。

定理 5 设 (U, R) 是广义近似空间。 $\forall x \in U, \overline{R}(\{x\}) \subseteq \overline{R_{**}}(\{x\})$ 当且仅当 R^{-1} 是欧几里德二元关系。

证明:(必要性)设 $(x, y) \in R^{-1}, (x, z) \in R^{-1}$, 则有 $(y, x) \in R, (z, x) \in R$, 从而 $x \in r_R(z)$ 。因此 $z \in \overline{R}(\{x\}) \subseteq \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。由于 $x \in r_R(y)$, 因此 $\overline{R_{**}}(\{x\}) \subseteq r_R(y)$, 从而 $z \in r_R(y)$, $(y, z) \in R$, 即 $(z, y) \in R^{-1}$ 。故 R^{-1} 是欧几里德二元关系。

(充分性)对于 $x \in U$, 设 $y \in \overline{R}(\{x\})$, 下证 $y \in \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。对于任意 $u \in U$, 当 $x \in r_R(u)$ 时, 有 $(u, x) \in R, (x, u) \in R^{-1}$ 。再由 $y \in \overline{R}(\{x\})$ 可得 $x \in r_R(y)$, 即 $(x, y) \in R^{-1}$ 。因为 R^{-1} 是欧几里德二元关系, 所以有 $(y, u) \in R^{-1}$, 从而 $y \in r_R(u)$ 。于是 $y \in \bigcap \{r_R(u) \mid x \in r_R(u)\} = \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。由 y 的任意性可得 $\overline{R}(\{x\}) \subseteq \overline{R_{**}}(\{x\})$ 。

定理 6 设 (U, R) 是广义近似空间。若对于任意 $X \subseteq U$, 有 $\overline{R_{**}}(X) \subseteq \overline{R}(X)$, 则 R 自反。

证明:对于任意 $x \in U$, 有 $\overline{R_{**}}(\{x\}) \subseteq \overline{R}(\{x\})$, 即 $\overline{R_{**}}(\{x\}) \subseteq l_R(x)$ 。因此 $x \in \overline{R_{**}}(\{x\}) \subseteq l_R(x)$, 故 R 自反。

定理 7 设 (U, R) 是广义近似空间。若 R 自反、对称, 则对于任意 $X \subseteq U$, 有 $\overline{R_{**}}(X) \subseteq \overline{R}(X)$ 。

证明:对于任意 $x \in \overline{R_{**}}(X)$, 下证 $x \in \overline{R}(X)$ 即可。由于 R 自反, 故有 $X \subseteq \bigcup_{y \in X} r_R(y)$ 。再由 $\bigcup_{y \in X} r_R(y) \in \theta_R$ 及 $x \in \overline{R_{**}}(X) = \bigcap \{Y \mid Y \in \theta_R, X \subseteq Y\}$ 可得 $x \in \bigcup_{y \in X} r_R(y)$ 。故存在 $y \in X$

使得 $x \in r_R(y)$ 。由于 R 对称, 因此 $y \in r_R(x)$ 。于是 $r_R(x) \cap X \neq \emptyset$, 即 $x \in \overline{R}(X)$ 。

定理 8 设 (U, R) 是广义近似空间。对于任意 $X_i \subseteq U, i \in I$, 有 $\overline{R_{**}}(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} \overline{R_{**}}(X_i)$, 其中 I 是给定的指标集。

证明:由 $\overline{R_{**}}$ 的单调性可得 $\bigcup_{i \in I} \overline{R_{**}}(X_i) \subseteq \overline{R_{**}}(\bigcup_{i \in I} X_i)$ 。另一方面,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} \overline{R_{**}}(X_i) &= \bigcup_{i \in I} (\bigcap \{Z_i \mid Z_i \in \theta_R, X_i \subseteq Z_i\}) \\ &= \bigcap \{\bigcup_{i \in I} Z_i \mid Z_i \in \theta_R, X_i \subseteq Z_i, i \in I\} \end{aligned}$$

对于任意 $i \in I, Z_i \in \theta_R$ 且 $X_i \subseteq Z_i$ 时, 有 $\bigcup_{i \in I} Z_i \in \theta_R$ 且 $\bigcup_{i \in I} X_i \subseteq \bigcup_{i \in I} Z_i$, 故有:

$$\{\bigcup_{i \in I} Z_i \mid Z_i \in \theta_R, X_i \subseteq Z_i, i \in I\} \subseteq \{W \mid W \in \theta_R, \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq W\}$$

从而可得:

$$\begin{aligned} \overline{R_{**}}(\bigcup_{i \in I} X_i) &= \bigcap \{W \mid W \in \theta_R, \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq W\} \subseteq \bigcap \{\bigcup_{i \in I} Z_i \mid Z_i \in \theta_R, X_i \subseteq Z_i, i \in I\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \overline{R_{**}}(X_i) \end{aligned}$$

设 (U, R) 是广义近似空间。对于任意的 $x \in U$, 称 $N_R(x) = \bigcap \{r_R(y) \mid x \in r_R(y)\}$ 为 x 关于 R 的邻域。由 R 可以确定 U 的一个二元关系 $T_R \subseteq U \times U$, 定义为 $T_R = \{(x, y) \in U \times U \mid x \in N_R(y)\}$ 。

定理 9 设 (U, R) 是广义近似空间。则:

(1) T_R 是自反、传递关系。

(2) 对于任意 $X \subseteq U$, 有 $\overline{R_{**}}(X) = \overline{T_R}(X)$ 。

证明:(1)由 $x \in N_R(x)$ 可知 T_R 为自反关系。假设 $(x, y) \in T_R, (y, z) \in T_R$ 。于是有 $y \in N_R(z)$, 由于 $N_R(z) = \bigcap \{r_R(u) \mid z \in r_R(u)\}$, 因此当 $z \in r_R(u)$ 时, 有 $y \in r_R(u)$, 即 $\{r_R(u) \mid z \in r_R(u)\} \subseteq \{r_R(u) \mid y \in r_R(u)\}$ 。从而 $\bigcap \{r_R(u) \mid z \in r_R(u)\} \supseteq \bigcap \{r_R(u) \mid y \in r_R(u)\}$, 即 $N_R(y) \subseteq N_R(z)$ 。因此有 $x \in N_R(z)$, 即 $(x, z) \in T_R$ 。故 T_R 为传递关系。

(2)对于任意 $x \in U$, 由引理 1 可得 $\overline{R_{**}}(\{x\}) = N_R(x)$ 。另一方面,

$$\begin{aligned} \overline{T_R}(\{x\}) &= \{y \mid r_{T_R}(y) \cap \{x\} \neq \emptyset\} = \{y \mid (y, x) \in T_R\} \\ &= \{y \mid y \in N_R(x)\} = N_R(x) \end{aligned}$$

从而 $\overline{R_{**}}(\{x\}) = \overline{T_R}(\{x\})$ 。于是, 对于任意 $X \subseteq U$, 有:

$$\begin{aligned} \overline{R_{**}}(X) &= \bigcup_{x \in X} \overline{R_{**}}(\{x\}) = \bigcup_{x \in X} \overline{T_R}(\{x\}) = \overline{T_R}(\bigcup_{x \in X} \{x\}) \\ &= \overline{T_R}(X) \end{aligned}$$

下面的推论给出了 $\overline{R_{**}}$ 与 \overline{R} 相等的充要条件。

推论 2 设 (U, R) 是广义近似空间。 $\forall X \subseteq U, \overline{R_{**}}(X) = \overline{R}(X)$ 当且仅当 $T_R = R$ 。

4 不同二元关系生成相同近似算子的条件

在广义近似空间中, 不同的二元关系生成不同的基于对象的近似算子。然而, 不同的二元关系可能生成相同的基于粒以及基于子系统的近似算子。本节讨论不同二元关系生成相同的基于粒以及基于子系统的近似算子的相关条件。

定理 10 设 (U, R) 与 (U, S) 是广义近似空间。 $\forall X \subseteq U, \overline{R_{**}}(X) = \overline{S_{**}}(X)$ 当且仅当对于任意 $x \in U, \exists Y, Z \subseteq U$, 使得 $r_R(x) = \bigcup_{y \in Y} r_S(y), r_S(x) = \bigcup_{z \in Z} r_R(z)$ 。

证明:(充分性)对于任意 $X \subseteq U$, 设 $x \in \overline{R_{**}}(X)$, 则存在 $y \in U$ 使得 $x \in r_R(y)$ 且 $r_R(y) \subseteq X$ 。假设 $Y \subseteq U$ 使得 $r_R(y) =$

$\bigcup_{z \in Y} r_S(z)$ 。由 $x \in r_R(y)$ 可知存在 $z \in Y$ 使得 $x \in r_S(z)$ 。再由 $r_S(z) \subseteq X$ 可得 $x \in \underline{S}_*(X)$ ，于是有 $\underline{R}_*(X) \subseteq \underline{S}_*(X)$ 。类似可证 $\underline{S}_*(X) \subseteq \underline{R}_*(X)$ 。

(必要性) 对于任意 $x \in U$ ，由 $\underline{R}_*(r_R(x)) = \underline{S}_*(r_R(x))$ ， $\underline{R}_*(r_R(x)) = r_R(x)$ 可得： $r_R(x) = \underline{S}_*(r_R(x)) = \bigcup \{r_S(y) \mid r_S(y) \subseteq r_R(x)\}$ ，故存在 $Y \subseteq U$ 使得 $r_R(x) = \bigcup_{y \in Y} r_S(y)$ 。同理，存在 $Z \subseteq U$ 使得 $r_S(x) = \bigcup_{z \in Z} r_R(z)$ 。

定理 11 设 (U, R) 与 (U, S) 是广义近似空间。 $\forall X \subseteq U$ ， $\underline{R}_*(X) = \underline{S}_*(X)$ 当且仅当 $R \circ R^{-1} = S \circ S^{-1}$ 。

证明：(必要性) 对于任意 $x \in U$ ，有 $\overline{R}_*(\{x\}) = \overline{R \circ R^{-1}}(\{x\}) = \overline{l_{R \circ R^{-1}}(x)}$ ， $\overline{S}_*(\{x\}) = \overline{S \circ S^{-1}}(\{x\}) = \overline{l_{S \circ S^{-1}}(x)}$ ，于是由 $\overline{R}_*(\{x\}) = \overline{S}_*(\{x\})$ 可得 $\overline{l_{R \circ R^{-1}}(x)} = \overline{l_{S \circ S^{-1}}(x)}$ 。由 x 的任意性可得 $R \circ R^{-1} = S \circ S^{-1}$ 。

(充分性) 对于任意 $X \subseteq U$ ，由 $R \circ R^{-1} = S \circ S^{-1}$ 可得 $\overline{R}_*(X) = \overline{R^{-1}(R(X))} = \overline{R \circ R^{-1}(X)} = \overline{S \circ S^{-1}(X)} = \overline{S^{-1}(S(X))} = \overline{S}_*(X)$ 。

定义 4^[23] 对于任意 $X, Y \subseteq U$ ， X 与 Y 的内积定义为 $(X, Y) = \bigvee_{x \in U} (X(x) \wedge Y(x))$ ，其中 $X(x)$ 与 $Y(x)$ 分别表示 X 与 Y 的特征函数。

由此定义，若 $X \cap Y \neq \emptyset$ ，则 $(X, Y) = 1$ ；若 $X \cap Y = \emptyset$ ，则 $(X, Y) = 0$ 。

定理 12 设 (U, R) 与 (U, S) 是广义近似空间。 $\forall X \subseteq U$ ， $\underline{R}_*(X) = \underline{S}_*(X)$ 当且仅当 $\forall x, y \in U$ ， $(l_R(x), l_R(y)) = (l_S(x), l_S(y))$ 。

证明：(必要性) 对于任意 $x, y \in U$ ，若 $(l_R(x), l_R(y)) = 1$ ，则存在 $z \in U$ 使得 $z \in l_R(x) \cap l_R(y)$ ，即 $x, y \in r_R(z)$ 。于是有 $r_R(z) \cap \{x\} \neq \emptyset$ ， $y \in r_R(z) \subseteq \overline{R}_*(\{x\}) = \overline{S}_*(\{x\})$ 。从而存在 $u \in U$ 使得 $y \in r_S(u)$ 且 $r_S(u) \cap \{x\} \neq \emptyset$ ，故有 $u \in l_S(x) \cap l_S(y)$ ， $(l_S(x), l_S(y)) = 1$ 。若 $(l_S(x), l_S(y)) = 1$ ，类似可以证明 $(l_R(x), l_R(y)) = 1$ 。

(充分性) 对于任意 $X \subseteq U$ ，假设 $x \in \overline{R}_*(X)$ 。于是存在 $y \in U$ 使得 $x \in r_R(y)$ 且 $r_R(y) \cap X \neq \emptyset$ 。不妨设 $z \in r_R(y) \cap X$ ，则 $y \in l_R(x) \cap l_R(z)$ ，从而 $(l_S(x), l_S(z)) = (l_R(x), l_R(z)) = 1$ 。于是存在 $v \in U$ 使得 $v \in l_S(x) \cap l_S(z)$ 。由 $z \in r_S(v)$ 可得 $r_S(v) \cap X \neq \emptyset$ ，从而 $x \in r_S(v) \subseteq \overline{S}_*(X)$ 。由 x 的任意性可得 $\overline{R}_*(X) \subseteq \overline{S}_*(X)$ 。类似可证 $\overline{S}_*(X) \subseteq \overline{R}_*(X)$ 。

定理 13 设 (U, R) 与 (U, S) 是广义近似空间。 $\forall X \subseteq U$ ， $\underline{R}_{**}(X) = \underline{S}_{**}(X)$ 当且仅当 $\forall x \in U$ ， $N_R(x) = N_S(x)$ 。

证明：(必要性) 由定理 9 可得，对于任意 $X \subseteq U$ ，有 $\overline{T}_R(X) = \overline{T}_S(X)$ ，从而有 $T_R = T_S$ 。对于任意 $x, y \in U$ ，若 $y \in N_R(x)$ ，则 $(y, x) \in T_R = T_S$ ，即 $y \in N_S(x)$ 。故有 $N_R(x) \subseteq N_S(x)$ 。类似地，可以证明 $N_S(x) \subseteq N_R(x)$ 。因此必要性成立。

(充分性) 假设对于 $x \in U$ ，有 $N_R(x) = N_S(x)$ 。于是有 $T_R = T_S$ ，从而对于任意 $X \subseteq U$ ，有 $\overline{R}_{**}(X) = \overline{T}_R(X) = \overline{T}_S(X) = \overline{S}_{**}(X)$ 。

文献[23]给出了 \underline{R}_* 和 \overline{R}_* 对偶的条件，具体如下。

命题 4^[23] 设 (U, R) 是广义近似空间。若 \underline{R}_* 和 \overline{R}_* 对偶，则 $R \circ R^{-1}$ 是一个等价关系。

下面的例子说明此命题的逆一般不成立。

例 2 设 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $R = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 4)\}$ ，于是有：

$$R^{-1} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (1, 3), (4, 4)\}$$

$$R \circ R^{-1} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

显然， $R \circ R^{-1}$ 是 U 上的等价关系。注意到 $r_R(1) = \emptyset$ ， $r_R(2) = \{1, 2, 3\}$ ， $r_R(3) = \{1\}$ ， $r_R(4) = \{4\}$ ，故有 $\overline{R}_*(\{2\}) = \bigcup \{r_R(x) \mid r_R(x) \cap \{2\} \neq \emptyset\} = \bigcup \{r_R(x) \mid 2 \in r_R(x)\} = \{1, 2, 3\}$ 。另一方面，有：

$$\underline{R}_*(\{2\}^c) = \underline{R}_*(\{1, 3, 4\}) = \bigcup \{r_R(x) \mid r_R(x) \subseteq \{1, 3, 4\}\} = \{1, 4\}$$

于是有 $(\underline{R}_*(\{2\}^c))^c = \{2, 3\} \neq \overline{R}_*(\{2\})$ 。故 \underline{R}_* 与 \overline{R}_* 不对偶。

下面的定理给出了 \underline{R}_* 与 \overline{R}_* 对偶的充要条件。

定理 14 设 (U, R) 是广义近似空间。 \underline{R}_* 与 \overline{R}_* 对偶当且仅当 $C = \{r_R(x) \mid x \in U\} - \{\emptyset\}$ 是 U 的划分。

证明：(必要性) 因为 \underline{R}_* 与 \overline{R}_* 对偶，令 $x \in U$ ，则有 $\overline{R}_*(\{x\}) = (\underline{R}_*(\{x\}^c))^c$ 。又由于 $\overline{R}_*(\{x\}) = \bigcup \{r_R(y) \mid x \in r_R(y)\}$ ， $\underline{R}_*(\{x\}^c) = \bigcup \{r_R(y) \mid r_R(y) \subseteq \{x\}^c\} = \bigcup \{r_R(y) \mid x \notin r_R(y)\}$ 。从而， $U = (\bigcup \{r_R(y) \mid x \in r_R(y)\}) \cup (\bigcup \{r_R(y) \mid x \notin r_R(y)\}) = \bigcup \{r_R(y) \mid y \in U\}$ ，即 C 是 U 的一个覆盖。若 $x, y \in U$ 使得 $r_R(x) \neq r_R(y)$ ，不妨假设存在 $z \in U$ 使得 $z \in r_R(x)$ ， $z \notin r_R(y)$ ，则有：

$$r_R(x) \cap r_R(y) \subseteq (\bigcup \{r_R(u) \mid z \in r_R(u)\}) \cap (\bigcup \{r_R(u) \mid z \notin r_R(u)\}) = \overline{R}_*(\{z\}) \cap \underline{R}_*(\{z\}^c) = \emptyset$$

从而有 $r_R(x) \cap r_R(y) = \emptyset$ 。故 C 是 U 的一个划分。

(充分性) (1) 对于任意 $X_i \subseteq U$ ， $i \in I$ ，有 $\underline{R}_*(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} \underline{R}_*(X_i)$ ，其中 I 为一个指标集。事实上， $\underline{R}_*(\bigcap_{i \in I} X_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \underline{R}_*(X_i)$ 由 \underline{R}_* 的单调性可得。另一方面，若 $x \in \bigcap_{i \in I} \underline{R}_*(X_i)$ ，则对于任意 $i \in I$ ，由 $x \in \underline{R}_*(X_i)$ 可知存在 $y_i \in U$ 使得 $x \in r_R(y_i)$ 且 $r_R(y_i) \subseteq X_i$ 。对于任意的 $i, j \in I$ ， $i \neq j$ ，由于 $r_R(y_i) \cap r_R(y_j) \neq \emptyset$ 且 C 是 U 的划分，因此 $r_R(y_i) = r_R(y_j)$ 。于是 $x \in r_R(y_i) \subseteq \bigcap_{j \in I} r_R(y_j)$ ，即 $x \in \underline{R}_*(\bigcap_{i \in I} X_i)$ 。

(2) 对于任意 $x \in U$ ，有 $\overline{R}_*(\{x\}) = (\underline{R}_*(\{x\}^c))^c$ 。事实上， $\overline{R}_*(\{x\}) = \bigcup \{r_R(y) \mid x \in r_R(y)\}$ ， $\underline{R}_*(\{x\}^c) = \bigcup \{r_R(y) \mid x \notin r_R(y)\}$ 。由于 C 是 U 的划分，因此 $\overline{R}_*(\{x\}) \cup \underline{R}_*(\{x\}^c) = \bigcup \{r_R(z) \mid z \in U\} = U$ 。另一方面，若 $x \in r_R(y)$ ， $x \notin r_R(z)$ ，则有 $r_R(y) \neq r_R(z)$ ，从而 $r_R(y) \cap r_R(z) = \emptyset$ 。于是有：

$$\begin{aligned} & \overline{R}_*(\{x\}) \cap \underline{R}_*(\{x\}^c) \\ &= (\bigcup \{r_R(y) \mid x \in r_R(y)\}) \cap (\bigcup \{r_R(z) \mid x \notin r_R(z)\}) \\ &= \bigcup \{r_R(y) \cap r_R(z) \mid x \in r_R(y), x \notin r_R(z)\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

从而有 $\overline{R}_*(\{x\}) = (\underline{R}_*(\{x\}^c))^c$ 。

(3) 对于任意 $X \subseteq U$ ，由 (1) 与 (2) 可得：

$$\begin{aligned} \overline{R}_*(X) &= \bigcup_{x \in X} \overline{R}_*(\{x\}) = \bigcup_{x \in X} (\underline{R}_*(\{x\}^c))^c = (\bigcap_{x \in X} \underline{R}_*(\{x\}^c))^c \\ &= (\underline{R}_*(\bigcap_{x \in X} \{x\}^c))^c = (\underline{R}_*(X^c))^c \end{aligned}$$

故 \underline{R}_* 与 \overline{R}_* 对偶。

注：例 3 说明，当 C 为 U 的划分时， R 不一定为等价关系。

例3 假设 $U = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, 则有 $r_R(1) = \emptyset$, $r_R(2) = \{1, 2\}$, $r_R(3) = \{3\}$, 则 C 是 U 的一个划分, 且有 $R_*(\emptyset) = R_*(\{1\}) = R_*(\{2\}) = \emptyset$, $R_*(\{1, 3\}) = R_*(\{2, 3\}) = R_*(\{3\}) = \{3\}$, $R_*(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$, $R_*(U) = U$; $\overline{R}_*(\emptyset) = \emptyset$, $\overline{R}_*(\{3\}) = \{3\}$, $\overline{R}_*(\{1\}) = \overline{R}_*(\{2\}) = \overline{R}_*(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$, $\overline{R}_*(\{1, 3\}) = \overline{R}_*(\{2, 3\}) = \overline{R}_*(U) = U$. 不难验证 R_* 与 \overline{R}_* 是对偶算子, 但 R 不是等价关系.

由推论 1 和定理 14 可得如下推论.

推论 3 设 (U, R) 是广义近似空间. 若 $C = \{r_R(x) \mid x \in U\} - \{\emptyset\}$ 是 U 的划分, 则 R_* 与 \overline{R}_* 是对偶算子.

结束语 本文讨论了一般广义近似空间中基于对象、知识粒以及子系统的广义粗糙近似算子之间的关系, 刻画了基于对象与基于子系统的广义粗糙近似算子以及基于知识粒与基于子系统的广义粗糙近似算子之间的关系, 给出了相应的上、下近似算子对偶的条件以及不同二元关系生成相同近似算子的条件. 在后续研究中, 将进一步讨论粗糙近似算子的拓扑结构及其应用.

参 考 文 献

- [1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.
- [2] DAI J, XU Q. Approximations and uncertainty measures in incomplete information systems[J]. Information Sciences, 2012, 198(1): 62-80.
- [3] KANEIWA K, KUDO Y. A sequential pattern mining algorithm using rough set theory [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2011, 52(6): 881-893.
- [4] YAO Y Y, ZHOU B. Two Bayesian approaches to rough sets [J]. European Journal of Operational Research, 2016, 251: 904-917.
- [5] YAO Y Y. Three-way decision with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353.
- [6] YAO Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators [J]. Information Sciences, 1998, 111(1): 239-259.
- [7] YAO Y Y. Constructive and algebraic methods of rough sets [J]. Information Sciences, 1998, 109(1): 21-47.
- [8] SLOWINSKI R, VANDERPOOTEN D. A generalized definition of rough approximations based on similarity [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2000, 12: 331-336.
- [9] DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191-209.
- [10] RADZIKOWSKA A M, KERRE E E. A comparative study of fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126: 137-155.
- [11] MI J S, LEUNG Y, ZHAO H Y, et al. Generalized fuzzy rough sets determined by a triangular norm [J]. Information Sciences, 2008, 178: 3203-3213.
- [12] BONIKOWSKI Z, BRYNIARSKI E, WYBRANIEC-SKARDOWSKA U. Extensions and intentions in the rough set theory [J]. Information Sciences, 1998, 107: 149-167.

- [13] ZHU W, WANG F Y. On three types of covering based rough sets [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2007, 19(8): 1131-1144.
- [14] KONDO M. On the structure of generalized rough sets [J]. Information Sciences, 2006, 176(5): 589-600.
- [15] QIN K Y, YANG J L, PEI Z. Generalized rough sets based on reflexive and transitive relations [J]. Information Sciences, 2008, 178(21): 4138-4141.
- [16] QIN K Y, PEI Z. On the topological properties of fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151: 601-613.
- [17] LASHIN E F, KOZAE A M, MEDHAT T, et al. Rough set theory for topological spaces [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2005, 49(1/2): 35-43.
- [18] ZHU W. Topological approaches to covering rough sets [J]. Information Sciences, 2007, 177: 1499-1508.
- [19] ZHANG Y L, LI C Q. Topological structures of a type of granule based covering rough sets [J]. Filomat, 2018, 32(9): 3129-3141.
- [20] WU H S, LIU G L. The relationships between topologies and generalized rough sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 119: 313-324.
- [21] ZHANG W X, WU W Z, LIANG J Y, et al. Rough set theory and method [M]. Beijing: Science Press, 2001.
- [22] LIU G L. A comparison of two types of generalized rough sets [C]// IEEE International Conference on Granular Computing. IEEE Computer Society, 2012: 423-426.
- [23] LIU G L, ZHU K. The relationship among three types of rough approximation pairs [J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 60: 28-34.
- [24] ZHANG Y L, LI C Q. Topological properties of a pair of relation based approximation operators [J]. Filomat, 2017, 31(19): 6175-6183.
- [25] AKOWSKI W. Approximations in the space (u, π) [J]. Demonstration Mathematics, 1983, 16(3): 761-769.
- [26] ZHU W. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering [J]. Information Sciences, 2009, 179(1): 210-225.
- [27] BOUZAYANE S, SAAD L. A multicriteria approach based on rough set theory for the incremental Periodic prediction [J]. European Journal of Operational Research, 2020, 286(1): 282-298.



LU XUN, born in 1995, postgraduate. His main research interests include rough set theory, formal concept analysis and so on.



QIN Ke-yun, born in 1962, Ph. D., professor, Ph. D supervisor. His main research interests include rough set theory, formal concept analysis and so on.