

值域增长约束满足问题的无回溯与随机行走策略的算法复杂性分析

徐伟¹ 巩馥洲²

(北京科技大学自动化学院 北京 100083)¹

(中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所 北京 100190)²

摘要 值域增长的约束满足问题模型是计算复杂性理论中一类重要的实际问题模型,针对解决这类问题的算法研究仍然很少。通过研究 RB 模型这一典型的值域增长约束满足问题,发现当问题规模很大时,无回溯策略比随机行走策略更加有效。这与典型的值域确定的约束满足问题如 SAT 问题不同,是值域增长的约束满足问题所特有的性质。通过实验研究了两种策略的表现,并进一步对两种策略的表现进行了分析。

关键词 无回溯,随机行走,算法复杂性, RB 模型,约束满足问题

中图分类号 TP30 **文献标识码** A

Computational Complexity Analysis of Backtrack-free and Random-walk Strategies on Constraint Satisfaction Problems with Growing Domains

XU Wei¹ GONG Fu-zhou²

(School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)¹

(Institute of Applied Mathematics, Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)²

Abstract Constraint satisfaction problems (CSP) with growing domains are a kind of important practical models in complexity theory, but the algorithm performance research is still rare. By the study on a typical CSP with growing domains, RB model, it is discovered that the backtrack-free strategy works better than the random-walk strategy when the size of problems is huge. Different from CSP with fixed domains such as SAT, this is a special property to CSP with growing domain. Moreover, the performances in experiments and theoretic analysis for these two strategies were also given.

Keywords Backtrack-free, Random-walk, Algorithmic complexity, RB model, CSP

1 引言

约束满足问题(CSP)^[1]出现在许多科学分支中,比如理论计算机、统计物理、信息论、离散数学等。典型的约束满足问题包括一些变量和一些约束,变量取值于一个值域,约束包含部分变量,且约束的作用是标明这些变量不允许的联合取值。约束满足问题的解是变量的一组赋值,这组赋值能避开所有不允许的联合取值,即避开所有约束。常见的约束满足问题包括纠错编码、自旋玻璃、数独、SAT 以及下文提到的 RB 模型等,约束满足问题已经受到广泛的关注和研究^[2-6]。

RB 模型是由许可和李未^[7]提出的值域增长的约束满足问题。RB 模型具有良好的理论性质,且能产生非常难解的实例,因此已经引起了国际上的广泛研究(例如文献^[7-24])。许可和李未^[7]证明了该模型具有精确的满足性相变。进一步还有文献证明了 RB 模型强迫有解的实例难以求解^[9,10]。通过 RB 模型提出的难解实例^[11]已经被广泛采用。赵春燕等研究了物理方法在 RB 模型上的应用^[12,13]。刘田等研究了 RB 模型的结构参数^[14-16]。

无回溯策略是一种简单的策略,其对过去已经赋值的变量不进行调整,只调整当前变量赋值,是一种“不回头”的策略。在 SAT 问题上,无回溯策略效果很差,通常使用比这种无回溯策略更复杂的策略^[25]。随机行走策略^[26]主要是指给出一组赋值后,每步任取一个不被满足的约束,改变该约束中一个变量的赋值,直到找到解的策略。这一策略的可行性有很多研究^[27-31],如文献^[29]证明了当约束密度小于 1.63 时,可以在线性时间内用随机行走策略有效解决 3-SAT 问题。

本文主要研究无回溯策略与随机行走策略在 RB 模型上的算法复杂性。在分析无回溯策略时,为方便分析,将 RB 模型做微小调整,使之变为 RA 模型,当问题规模很大时它与 RB 模型基本相同。首先它们含有约束的个数基本相同,其次每个约束中的不允许的联合取值的个数基本相同。在 RA 模型上对无回溯策略进行分析更容易,我们给出了 RA 模型使用无回溯算法的解出概率的表达式,将它作为 RB 模型使用无回溯算法解出概率的一个参考。

在分析随机行走策略时,通过找到 RB 模型以大概率具有的特性,得出了该算法运行时间的一个下界。另外,本文还

到稿日期:2013-05-09 返修日期:2013-07-16

徐伟(1985-),男,博士生,主要研究方向为复杂性理论、约束满足问题, E-mail: xuwei_225@163.com; 巩馥洲(1965-),男,博士,研究员,主要研究方向为概率论。

论述了随机行走算法的表现与 $2rplnN$ 值的关系。

最后,通过多种实验展示了两种算法的表现,并首次发现:当问题规模很大时无回溯策略比随机行走策略更加有效,这与这两个算法在 SAT 问题上的表现显著不同。

2 预备知识

下面定义约束满足问题的 RB、RA 模型。令 $k \geq 2$ 是整数, $r, \alpha > 0, 0 < p < 1$ 是实数。 $RB(N, k, r, \alpha, p)$ 是一个三元组 $\langle \vec{\sigma}, D, C \rangle$, $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ 为变量, $D = \{1, 2, \dots, N^k\}$ 为变量的值域, C 为约束集合。每个约束 $c \in C$ 是一个二元组 $\langle t, R \rangle$, t 表示 k 个变量, R 表示这 k 个变量的一些联合赋值。 $RB(N, k, r, \alpha, p)$ 是一个概率空间,我们通过表明其单个实例的生成方法来定义这个概率空间,而单个实例的生成步骤为:

1. 可重复计次序地任选 $rNlnN$ 个约束,每个约束由从 N 个变量中不重复不计次序地任取的 k 个变量组成。或者说:任选约束的 $rNlnN$ 个可重复排列中的一个,每个约束任选变量的 k 个不重复组合中的一个。

2. 对每一个约束,从 N^k 个可能的联合赋值中不重复不计次序地随机选取 pN^k 个。这些联合取值称为不协调联合赋值。

类似地,RA 模型的单个实例的生成步骤为:

1. 每个约束包含 k 个变量,共有 C_N^k 个可能的约束,令每一个约束以概率 $rNlnN/C_N^k$ 出现。

2. 对每一个约束, N^k 个可能的联合赋值的每一个,以概率 p 属于不协调联合赋值。

解是能避免所有约束的赋值,严格表述为:在该赋值下, $\vec{\sigma}$ 中的任意子集的赋值不是不协调联合赋值。解的集合记为 S ,它是 D^N 的一个子集。

令 X 表示解的个数, $X = |S|$ 。容易看到 RB 模型 X 的均值可表示为 $E(X) = N^{nN} (1-p)^{rNlnN}$ 。文献[7]证明了 RB 模型具有精确相变:令 $r_c = -\alpha/\ln(1-p)$,如果 $\alpha > 1/k, 0 < p < 1$ 是常数,且 k, p 满足不等式 $k \geq 1/(1-p)$,那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X > 0) = 1 \text{ 当 } r < r_c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X > 0) = 0 \text{ 当 } r > r_c$$

下文用 w. h. p. (with high probability) 表示一个事件的概率当 N 趋于无穷时趋于 1。本文主要以 $k=2$ 的 RB 模型为例进行研究。下面说明两种策略的算法步骤:

无回溯算法(算法 1):

1. 对 σ_1 任意赋值。
- 依次对 $\sigma_2, \dots, \sigma_N$ 执行步骤 2、3、4
2. 对当前变量任意赋值。
3. 若当前变量赋值与已赋值变量共同违反某约束,记录此值,并对当前变量重新赋一个未记录的值;否则跳过步骤 4。

4. 重复步骤 3 直到值域的每一个值都被记录,此时输出“算法失败”,终止本算法。

5. 得到了一个解,输出该解。

随机行走算法(算法 2):

1. 选取一组随机赋值,规定最大运行步数。
2. 如果这组赋值避免了所有约束,则这组赋值是所找的解。否则随机选取一个没被避开的约束,在这个约束中任选一个变量,对这一变量重新赋值。

3. 重复步骤 2,直到找到解时,输出该解并终止本算法;

或者到达最大运行步数,输出“没有找到可满足赋值”,终止本算法。

3 无回溯策略的算法复杂性分析

为了分析无回溯策略在 RB 模型上的表现,本文将 RB 模型做微小调整,使其变为 RA 模型,当问题规模很大时 RA 模型与 RB 模型基本相同。RB 模型有 $rNlnN$ 个约束,每个约束有 pN^k 个不协调赋值。相同参数的 RA 模型约束个数的期望是 $rNlnN$,每个约束的不协调赋值个数的期望是 pN^k 。而且当 N 很大时,约束和不协调赋值的个数分别集中到期望值附近。

下面的定理给出了 RA 模型使用算法 1 解出的概率,我们认为 RB 模型使用算法 1 解出的概率也可参考此式,实验 1 中图 2、图 3 验证了这一点。

定理 1 当 $r, \alpha > 0, 0 < p < 1$ 时, $k=2$ 的 RA 模型使用算法 1 解决的概率为:

$$\prod_{i=2}^N \left(\sum_{j=0}^{i-1} (1 - (1-p)^j)^{N^i} \binom{i-1}{j} \right) \binom{2rlnN}{N-1} \quad (1)$$

证明:RA 模型与 RB 模型不同,它的每个可能的约束和不协调赋值的出现是相互独立的,我们可以利用这一点。RA 模型是随机产生的,算法 1 中也有许多随机的选择,所以形成的概率模型较复杂。

将 RA 实例的生成分为 $N-1$ 个步骤,记 $1 \leq i \leq N-1$,第 i 个步骤是:1) σ_{i+1} 变量与 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i$ 组成的 i 个可能的约束每个都以概率 $(2rlnN)/(N-1)$ 出现;2) 出现的约束中的 N^k 个可能的联合赋值,每一个以概率 p 属于不协调联合赋值。这样就将 RA 实例的生成步骤分为相互独立的 $N-1$ 个步骤。或者将每一步视为形成了一个概率空间,RA 模型为 $N-1$ 个概率空间的乘积。

下面考察条件概率

$$P(\sigma_i \text{ 能成功赋值} | \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1} \text{ 已成功赋值})$$

其中, $2 \leq i \leq N$ 。

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}$ 的赋值情况有很多,对任意一个进行分析。记任一组已有赋值为 $\sigma_1 = a_1, \sigma_2 = a_2, \dots, \sigma_{i-1} = a_{i-1}$,在这种情况下对 σ_i 进行赋值,只需考虑生成 RA 实例的第 $i-1$ 步。在生成 RA 实例的第 $i-1$ 个步骤中,出现 j 个约束的概率为:

$$\binom{i-1}{j} x^j (1-x)^{i-1-j}$$

其中, $\binom{i-1}{j} x^j (1-x)^{i-1-j}$ 表示 i 次独立重复试验、

每次试验成功概率为 x 、共成功 j 次的概率。当有 j 个约束时, σ_i 能取到一个值 $a_i \in \{1, 2, \dots, N^k\}$ 等价于要求 j 个联合赋值,比如 $\sigma_i = a_i, \sigma_1 = a_1$ 为一个联合赋值,都不出现在不协调赋值中。由于每个联合赋值相互独立地以概率 p 成为不协调赋值, σ_i 能取到 a_i 的概率为 $(1-p)^j$ 。 σ_i 不能取到 a_i 的概率为 $1 - (1-p)^j$ 。由于 σ_i 的其他取值能否成功取到取决于其他不协调赋值是否出现,并且 σ_i 的其他取值不能成功取到与 $\sigma_i = a_i$ 不能成功取到相互独立,因此 σ_i 的 N^k 个值都不能成功取到的概率为 $(1 - (1-p)^j)^{N^k}$ 。有某个值能取到的概率为 $1 - (1 - (1-p)^j)^{N^k}$ 。对于 $2 \leq i \leq N$,

$$P(\sigma_i \text{ 能成功赋值} | \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1} \text{ 已成功赋值})$$

$$= P(\sigma_i \text{ 能成功赋值} | \sigma_1 = a_1, \sigma_2 = a_2, \dots, \sigma_{i-1} = a_{i-1})$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} (1 - (1-p)^j)^{N^k} \binom{i-1}{j} \binom{2rlnN}{N-1}$$

因为 $2 \leq i \leq N$ 时,

$P(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i \text{ 能成功赋值})$

$$= P(\sigma_i \text{ 能成功赋值} | \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1} \text{ 已成功赋值}) \times P(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1} \text{ 能成功赋值})$$

又因为 σ_1 成功赋值的概率为 1, 所以迭代得到式(1)。

由于 RA 与 RB 模型的相似性, 有理由相信式(1)能作为 RB 模型使用算法 1 解出的概率, 如实验 1 中验证的那样, 但其严格证明还需要进一步研究。

用算法 1 进行求解时, 由于共有 N 个变量, 每个最多调整 N^α 次, 因此最多用时为 $N^{1+\alpha}$ 。

继续观察算法 1 运行的过程, 如图 3 和图 9 所示, 随着约束密度的增加, RB 模型解出概率逐渐下降。详细观察算法运行过程, σ_1 可任意赋值。对 σ_2 赋值时, 只有 σ_1 赋值了, σ_2 的约束很少, 基本不用重新赋值。类似地, 开始的变量几乎都是任意赋值, 不用重新赋值, 总体上越往后的变量重新赋值的次数越多。实验 1 中的图 1 验证了这种现象。所以无回溯策略开始时会产生很多赋值情况, 或者说产生很多分支, 如果大部分分支以较高概率取到解, 则解出概率较大, 如果大部分分支以较小概率取到解, 则解出概率较小。所以总体而言约束和不协调赋值越多, 大多数分支取到解的概率越小, 解出概率越低。

4 随机行走策略的算法复杂性分析

4.1 N 很大时随机行走运行时间的一个下界

由于随机行走算法的表现依赖于具体的实例, 很难统一分析它的运行情况, 本文使用严格的证明只能得出一个很弱的下界, 得出的方法是找到实例 w. h. p. 具有的特性, 然后对这一特性进行分析。

引理 1 任意给定 $0.5 < \alpha_0, \alpha_1, \epsilon_1 < 1$, w. h. p. $k=2$ 的 RB 实例具有一个变量集合 A , 它占有所有变量的比例大于 ϵ_1 , 多于 $\alpha_1 r N \ln N$ 的约束在 A 类的变量之内, 每个变量连接的变量个数属于 $(\alpha_0 2r \ln N, (2-\alpha_0) 2r \ln N)$ 。

证明: $k=2$ 的 RB 模型在实例生成步骤第一步后, 得到一个概率空间, 其每个元素包含 $r N \ln N$ 个约束, 每个约束包含两个变量, 但尚未确定各约束的不协调赋值, 本引理只涉及该概率空间的性质。记 M 为该概率空间的一个元素, $\mu(M)$ 为元素 M 在该概率空间中的概率, 用 i 表示一个变量。

首先证明任给 $0 < \alpha_2 < \frac{1}{2}$, w. h. p. 元素的约束个数满足 $\sum_i (X_i \cdot 1_{X_i \in B}) < \alpha_2 2r N \ln N$, 其中 X_i 为变量 i 的约束个数,

$$B = [1, \alpha_0 2r \ln N] \cup [(2-\alpha_0) 2r \ln N, r N \ln N]$$

$1_{X_i \in B}$ 为示性函数。若假设不成立, 存在 $\epsilon_2 > 0$, 使得对任意 N_0 , 存在 $N_1 > N_0$, 模型规模为 N_1 时,

$$\sum_{M,i} (\mu(M) \cdot X_M \cdot 1_{X_M \in B}) \geq \alpha_2 \epsilon_2 2r N \ln N$$

其中, X_M 为元素 M 的变量 i 连接的约束个数。然而, 对一个变量, 连接的边个数 X 服从实验 $r N \ln N$ 次、 $p=2/N$ 的二项分布。原因是约束可以重复, 共有 $r N \ln N$ 个约束, 每个约束独立得以概率 $2/N$ 与该变量相连。令 $0 < a, b < 1$ 且 $1-a > \alpha_0, (1-a)(1-b) > 1-\alpha_2 \epsilon_2$, 由切比雪夫不等式存在当 $N > N_2$ 时

$$P(|X-2r \ln N| \geq a 2r \ln N) \leq \frac{r N \ln N \frac{2}{N} (1-\frac{2}{N})}{(a 2r \ln N)^2} < b \quad (2)$$

从而

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_i (j \cdot P(X=j) \cdot 1_{j \in B})}{2r \ln N} \\ &= \frac{E(X) - \sum_i (j \cdot P(X=j) \cdot 1_{j \in [a_0 2r \ln N, (2-\alpha_0) 2r \ln N]})}{2r \ln N} \\ &< 1 - \frac{\sum_i (j \cdot P(X=j) \cdot 1_{j \in [(1-a) 2r \ln N, (1+a) 2r \ln N]})}{2r \ln N} \\ &< 1 - \frac{(1-a) 2r \ln N \cdot P(|X-2r \ln N| \leq a 2r \ln N)}{2r \ln N} \\ &< 1 - (1-a)(1-b) < \alpha_2 \epsilon_2 \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{M,i} (\mu(M) \cdot X_M \cdot 1_{X_M \in B}) = \sum_i \sum_j (j \cdot P(X=j) \cdot 1_{j \in B}) < \alpha_2 \epsilon_2 2r N \ln N$$

产生矛盾。

然后证明 w. h. p. 每个元素的变量的约束个数满足 $\sum_i (1_{X_i \in B}) < (1-\epsilon_1) N$, 其中 X_i 为变量 i 的约束个数。否则, 存在 $\epsilon_3 > 0$, 使得对任意 N_0 , 存在 $N_1 > N_0$, 模型规模为 N_1 时,

$$\sum_{M,i} (\mu(M) \cdot 1_{X_i \in B}) \geq (1-\epsilon_1) \epsilon_3 N$$

然而, 由切比雪夫不等式存在 N_2 , 当 $N > N_2$ 时, 类似式(2),

$$\begin{aligned} & P(|X-2r \ln N| \geq (1-\alpha_0) 2r \ln N) \\ & \leq \frac{r N \ln N \frac{2}{N} (1-\frac{2}{N})}{((1-\alpha_0) 2r \ln N)^2} < (1-\epsilon_1) \epsilon_3 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{M,i} (\mu(M) \cdot 1_{X_M \in B}) &= \sum_i \sum_j (P(X=j) \cdot 1_{j \in B}) \\ &= \sum_i P(|X-2r \ln N| \geq (1-\alpha_0) 2r \ln N) < (1-\epsilon_1) \epsilon_3 N \end{aligned}$$

产生矛盾。

对一个实例, 定义 A 类变量集合为约束个数属于 $(\alpha_0 2r \ln N, (2-\alpha_0) 2r \ln N)$ 的变量的集合, 即约束个数不属于 B 的变量的集合。从而我们已经证明了 w. h. p. A 类变量占的比例大于 ϵ_1 , 且不在 A 类变量之内的约束最多 $2\alpha_2 r N \ln N$ 个。

另外, 每个元素所具有的约束个数服从一个实验次数为 $\frac{N(N-1)}{2}$ 、取到概率为 $\frac{2r \ln N}{N-1}$ 的二项分布。令 $0.5 < \alpha_1 < \alpha_3 < 1$, 可以得到 w. h. p. 每个元素具有多于 $\alpha_3 r N \ln N$ 个约束。令 $\alpha_2 < (\alpha_3 - \alpha_1)/2$, 则由于不在 A 类变量之内的约束最多 $2\alpha_2 r N \ln N$ 个, w. h. p. A 类的变量之内的约束所占比例大于 $\frac{\alpha_3 r N \ln N - 2\alpha_2 r N \ln N}{r N \ln N} > \alpha_1$, 因此引理成立。

引理 2 任给 $0.5 < \alpha_4 < \alpha_1 < 1$, 选取不协调赋值形成 $k=2$ 的 RB 实例后, 任意给出一组赋值, w. h. p. 上述 A 类变量之内有多于 $\alpha_4 r p N \ln N$ 个不被满足的约束。

证明: 先给出包含变量和约束的元素, 再给出一组赋值, 然后对每一个约束的不协调赋值随机选取, 对于给定的一组赋值, 元素的每个约束以概率 p 不被满足。当一个元素的 A 类变量之内的约束多于 $\alpha_1 r N \ln N$, 不满足约束个数服从一个实验次数大于 $\alpha_1 r N \ln N$ 、取到概率为 p 的二项分布, 此时由切比雪夫不等式可证明不满足约束个数多于 $\alpha_4 r p N \ln N$ 的概率趋于 1。又由于引理 1, w. h. p. 一个元素的 A 类变量之内的约束多于 $\alpha_1 r N \ln N$, 引理成立。

现在给出 $k=2$ 的 RB 模型上随机行走运行时间的一个下界:

定理 2 当 $\alpha > 0, 0 < p < 1, r$ 为固定的常数时, 对 $w < 0.5, k=2$ 的 RB 模型 w. h. p. 不能用随机行走算法在 $w p N$

步内解决。

证明:随机行走算法首先给出一个赋值,然后调整单个变量的赋值。由引理 1 和引理 2 可知, w. h. p. 和引理 1 中定义的 A 类变量之内的不满足约束多于 $\alpha_4 r p N \ln N$, 且每调整一个 A 类的变量最多使 $(2-\alpha_0) 2r \ln N$ 个 A 类变量之内的约束由不满足变满足。取引理 1 与引理 2 中的 α_0, α_4 足够接近于 1, 可使 $\frac{\alpha_4 r p N \ln N}{(2-\alpha_0) 2r \ln N} > w p N$, 从而在 $w p N$ 步内无法将多于 $\alpha_4 r p N \ln N$ 个不满足约束变满足, 定理得证。

4.2 N 很大时随机行走运行时间的分析

上面定理给出了 N 很大时随机行走算法所需时间的一个下界, 我们也可以给出它的一个上界。考虑另一种策略, 每次不是选取一个不满足约束再选取该约束的一个变量, 而是直接任选变量改变赋值, 此种策略与不断取随机赋值验证满足性的效果相同, 需要大约 $N^{-r \ln(1-p)}$ 步。随机行走策略比这种策略更优, 从而其上界为 $N^{-r \ln(1-p)}$ 步。

我们并不能确定 N 很大时随机行走解决 RB 模型所需的时间, 只能做如下分析: 根据 RB 模型的生成算法, 每个变量对应约束的个数期望是 $2r \ln N$, 每个变量的任一个取值关联的不满足约束的个数期望是 $2r p \ln N$ 。每次选取重赋值的变量时, 几乎都能选到典型的变量, 且每个典型变量被选到的概率几乎一样。对变量 i 重新赋值后, 该变量的不满足约束以大概率在 $2r p \ln N$ 上下。然而, 即便 i 重新赋值后不满足约束变少, 但根据占据问题^[32]的极限理论知, 存在正常数 a 使得当算法运行 aN 步后, 大部分的变量被重新赋值, 从而使得 i 的不满足约束又回到 $2r p \ln N$ 上下, 即选取变量重新赋值产生的效果无法保留下来, 如图 5 所示。所以我们认为 N 很大时随机行走策略所需时间更接近于上界, 即 $N^{-r \ln(1-p)}$ 步。

4.3 运行时间与 $2r p \ln N$

由于在 RB 模型中每个变量在值域里面的任一个取值关联的不协调赋值的个数期望是 $2r p \ln N$, 因此 $2r p \ln N$ 与随机行走的运行时间密切相关。本小节讨论 $2r p \ln N$ 与随机行走的关系。 $2r p \ln N$ 很小比如小于 1.5 时, 由于只产生均值小于 1.5 的不满足约束, 因此每次赋值调整对已满足所有约束的变量影响不大, 更多的是优化了当前变量的赋值, 此时随机行走算法可以很快解决问题。实验 2 的图 4 与图 6 验证了这一点。但当 $2r p \ln N$ 很大时, 我们认为随机行走不能有效解决问题, 如图 5 与图 10 所示。本节主要讨论 $N \rightarrow \infty$ 的情况, 此时 $2r p \ln N$ 很大, 属于后者。

5 两种算法的实验表现与比较

实验 1 无回溯算法在 $k=2$ 的 RB 模型上的表现。

首先, 观察无回溯算法中每个变量更换赋值的次数, 它可以反映出算法的运行情况。图 1 中我们设置 $N=200, r=1.6, \alpha=0.6, p=0.1$ 进行了一次实验, 可观察到越往后期, 需要更换赋值的次数越多。

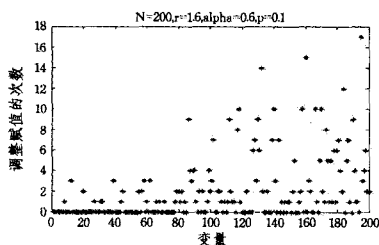


图 1 无回溯算法中每个变量更换赋值次数

其次, 将用无回溯算法实验求解 RB 模型的成功概率与由式(1)表示的无回溯算法求解 RA 模型的成功概率进行比较。图 2 由式(1)计算所得, 图 3 由实验所得(每个点重复实验 15 次取平均), 可见它们非常相符, 若更多次重复平均则更一致。前文提到 RA 与 RB 模型非常相似, RB 模型使用算法 1 解出的概率可参考式(1), 通过本实验进行了验证。

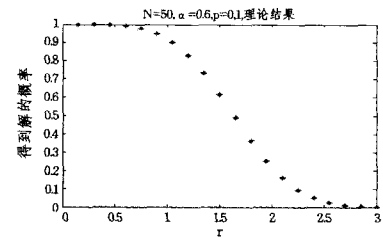


图 2 RA 模型无回溯算法解出概率理论值

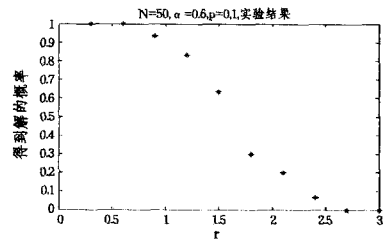


图 3 RB 模型无回溯算法解出概率实验值

实验 2 随机行走算法在 $k=2$ 的 RB 模型上的表现。

首先, 考察每一步调整后不满足约束的数目变化, 不满足约束数目为零时问题得以成功解决。图 4 是一个成功的例子, 此时 $2r p \ln N$ 值较低, 不满足约束数目整体上成下降趋势。图 5 是不成功例子, 此时 $2r p \ln N$ 值较高, 不满足约束数目处于震荡、无下降趋势。

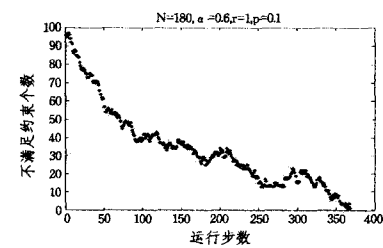


图 4 RB 模型随机行走成功时不满足约束数目变化

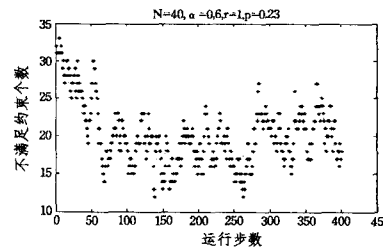


图 5 RB 模型随机行走不成功时不满足约束数目变化

其次, 考察 $2r p \ln N$ 值较低时运行步数与问题规模的关系。如图 6 所示, 在 $2r p \ln N$ 值较低的情况下, 可以看到运行步数与问题规模呈现近似线性关系。这一实验支持了 4.3 节的讨论。这里取 $r=1, \alpha=0.6, p=0.1, N=30, 60, \dots, 300$, 每一点为 9 次重复平均所得。

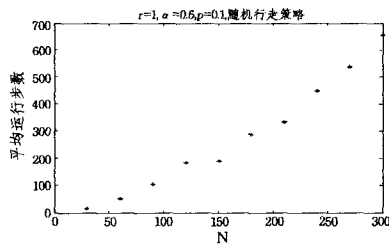


图 6 RB 模型随机行走算法在 $2rplnN$ 值较低时的表现

实验 3 无回溯与随机行走在 3-SAT 模型上的比较。

图 7、图 8 是 $N=500$ 、3-SAT 约束密度 α 取不同值时无回溯算法与随机行走算法的成功概率。图 8 是随机行走算法取最大运行次数 $10N$ 得到的结果。可以看到随机行走比无回溯有效,事实上无回溯基本不能解决 3-SAT 问题,而随机行走对约束密度较小的 3-SAT 能在线性时间内解决^[29]。这一实验是为了与 RB 模型情形做对比,以说明值域增长与值域确定的满足约束问题的不同。

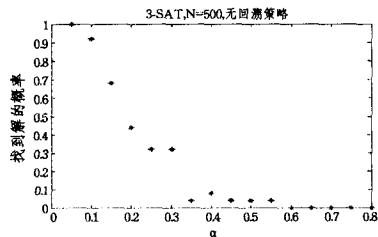


图 7 3-SAT 问题上的无回溯算法

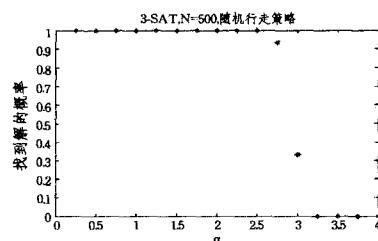


图 8 3-SAT 问题上的随机行走算法

实验 4 无回溯与随机行走在 $k=2$ 的 RB 模型上的比较。

由第 4.2、4.3 节的分析,我们认为随机行走取决于 $2rplnN$ 的值,尽量使得 $2rplnN$ 比较大,就能使得无回溯算法表现优于随机行走算法。比如当 $k=2, N=50, p=0.1, \alpha=1, r=0.15, 0.3, \dots, 3$ 时,有 $2rplnN=0.78$ 。图 9、图 10 将这时的无回溯与随机行走算法进行了比较,图 10 中随机行走算法的最大运行次数为 $40N$,图 9 中每个点为重复 10 次实验平均得到。可以发现与 3-SAT 问题不同,当 RB 模型问题规模很大时无回溯策略要优于随机行走策略。

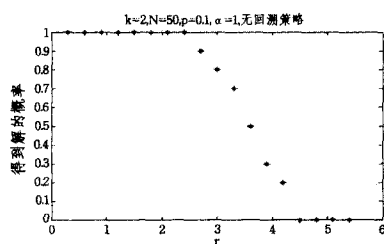


图 9 RB 模型无回溯算法表现

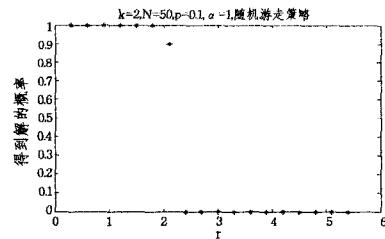


图 10 RB 模型随机行走算法表现

结束语 值域增长约束满足问题越来越受到人们的重视,但各种算法在其上的表现还需要进一步研究。我们认为对随机行走算法可以继续下面的研究:

1. 给出 N 很大时,随机行走解决 RB 模型所需时间更好的上下界。
2. 给出 $2rplnN$ 很小比如小于 1.5 时,随机行走可以有效解决 RB 模型的严格证明。

参考文献

- [1] Rossi F, Van Beek P, Walsh T. Handbook of constraint programming[M]. New York: Elsevier Science Inc, 2006
- [2] Nishimori H. statistical physics of spin glasses and information processing; an introduction[M]. Oxford: Clarendon Press, 2001
- [3] Mezard M, Montanari A. Information, physics and computation [M]. New York: Oxford University Press, 2009
- [4] Creignou N, Daude H. The SAT-UNSAT transition for random constraint satisfaction problems[J]. Discrete Math, 2009, 309: 2085-2099
- [5] Martin O C, Monasson R, Zecchina R. Statistical mechanics methods and phase transitions in optimization problems [J]. Theor Comput Sci, 2001, 265: 3-67
- [6] 王美, 周育人, 叶立. 调查传播算法和蚁群算法相结合求解可满足性问题[J]. 计算机科学, 2012, 39(4): 227-231
- [7] Xu K, Li W. Exact phase transitions in random constraint satisfaction problems[J]. J Artif Intell Res, 2000, 12: 93-103
- [8] Lecoutre C. Constraint networks: techniques and algorithms [M]. London: ISTE Ltd, Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2009
- [9] Xu K, Li W. Many hard examples in exact phase transitions[J]. Theor Comput Sci, 2006, 355: 291-302
- [10] Xu K, Boussemart F, Hemery F, et al. Random constraint satisfaction: easy generation of hard (satisfiable) instances[J]. Artif Intell, 2007, 171: 514-534
- [11] Saitta L, Giordana A, Cornuejols A. Phase transitions in machine learning[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011
- [12] Zhao C Y, Zhang P, Zheng Z M, et al. Analytical and belief-propagation studies of random constraint satisfaction problems with growing domains[J]. Phys Rev E, 2012, 85: 016106
- [13] 赵春燕, 郑志明. 一种基于变量熵求解约束满足问题的置信传播算法[J]. 中国科学: 信息科学, 2012, 42(9): 1170-1180
- [14] Jiang W, Liu T, Ren T, et al. Two hardness results on feedback vertex sets [C] // FAW-AAIM 2011, LNCS 6681. Springer, 2011: 233-243
- [15] Liu T, Lin X, Wang C, et al. Large hinge width on sparse random hypergraphs[C] // IJCAI 2011, AAAI, 2011: 611-616
- [16] Wang C, Liu T, Cui P, et al. A note on treewidth in random

- graphs[C]//COCOA 2011, LNCS 6831. Springer, 2011; 491-499
- [17] Richter S, Helmert M, Gretton C. A stochastic local search approach to vertex cover[C]//Proceedings of the 30th German Conference on Artificial Intelligence (KI). 2007
- [18] Guturu P, Dantu R. An impatient evolutionary algorithm with probabilistic tabu search for unified solution of some NP hard problems in graph and set theory via clique finding[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 2008, 28; 645-666
- [19] Pullan W. Approximating the maximum vertex/edge weighted clique using local search[J]. Journal of Heuristics, 2008, 14; 117-134
- [20] Alphonse E, Osmani A. A model to study phase transition and plateaus in relational learning [C]//18th International Conference on Inductive Logic Programming. 2008;6-23
- [21] Heras F, Baneres D. The impact of Max-SAT resolution-based preprocessors on local search solvers. Journal on Satisfiability[J]. Boolean Modeling and Computation (JSAT), 2010, 7(2/3); 89-126
- [22] Zhao C, Zheng Z. Threshold behaviors of a random constraint satisfaction problem with exact phase transitions[J]. Information Processing Letters, 2011, 111(20); 985-988
- [23] Cai S, Su K, Sattar A. Local search with edge weighting and configuration checking heuristics for minimum vertex cover[J]. Artificial Intelligence, 2011, 175(9/10); 1672-1696
- [24] Cai S, Su K, Luo C, et al. NuMVC: an efficient local search algorithm for minimum vertex cover[J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2013, 46; 687-716
- [25] Biere A, Heule M, Maaren H, et al. Handbook of satisfiability [M]. Amsterdam; IOS press, 2009
- [26] Papadimitriou C H. On selecting a satisfying truth assignment [C]//Proceedings of the 32nd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 1991; 163-169
- [27] Selman B, Kautz H. Local search strategies for satisfiability testing[C]//AMS-DIMACS Series on Discr Math Theor Comp Sci. 1996, 26; 521-531
- [28] Iwama K, Tamaki S. Improved bounds for 3-SAT [C]//Proceedings of the Fifteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. 2004; 321-322
- [29] Alekhovich M, Ben-Sasson E. Linear upper bounds for random walk on small density random 3-cnfs[J]. SIAM J Comput, 2006, 36(5); 1248-1263
- [30] Coja-Oghlan A, Feige U, Frieze A, et al. On smoothed k-CNF formulas and the walksat algorithm [C]//Proc 20th SODA. 2009; 451-460
- [31] Coja-Oghlan A, Frieze A. Analyzing walksat on random formulas[C]//Proc 9th ANALCO. 2012; 48-55
- [32] Kamath A, Motwani R, Palem K, et al. Tail bounds for occupancy and the satisfiability threshold conjecture[J]. Random Struct Alg, 1995, 7; 59-80

(上接第 199 页)

- [8] Nukarapu D T, Bin Tang, Wang Li-qiang, et al. Data replication in data intensive scientific applications with performance guarantee[J]. Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions, 2011, 22(8); 1299-1306
- [9] Sung Hoon Baek K P, Sung Hoon B, Kyu Ho park. Prefetching with adaptive cache culling for striped disk[C]//2008 USENIX Annual Technical Conference. Boston, MA, USA, 2008; 363-376
- [10] Jiang S, Zhang Xue-chen, Shuang Liang, et al. Improving networked file system performance using a Locality-Aware cooperative cache protocol[J]. Computers, IEEE Transactions, 2010, 59(11); 1508-1519
- [11] Wei Qi-ying, Qin Ting-ting, Fujita S. A Two-Level caching protocol for hierarchical Peer-to-Peer file sharing systems [C]//Parallel and Distributed Processing with Applications (ISPA), 2011 IEEE 9th International Symposium. Busan, 2011; 195-200
- [12] Anderson E, Hoover C, Li Xiao-zhou. New algorithms for file system cooperative caching[C]//Modeling, Analysis Simulation of Computer and Telecommunication Systems (MASCOTS), 2010 IEEE International Symposium. Miami Beach, FL, 2010; 437-440
- [13] Butt A R, Gniady C, Hu Y C. The performance impact of kernel prefetching on buffer cache replacement algorithms[J]. Computers, IEEE Transactions, 2007, 56(7); 889-908
- [14] Spillane R P, Dixit S, Archak S, et al. Exporting kernel page caching for efficient user-level I/O[C]//Mass Storage Systems and Technologies (MSST), 2010 IEEE 26th Symposium. Incline Village, NV, 2010; 1-13
- [15] Yue Jian-hui, Zhu Yi-feng, Zhao Cai, et al. Energy efficient buffer cache replacement for data servers[C]//Networking, Architecture and Storage (NAS), 2011 6th IEEE International Conference. Dalian, Liaoning, 2011; 329-338
- [16] Schoeberl M. A Time-Predictable object cache [C]//Object/Component/Service-Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC), 2011 14th IEEE International Symposium. 2011; 99-105
- [17] Li Chong-min, Wang Hai-xia, Xue Yi-bo, et al. Fast hierarchical cache directory: a scalable cache organization for Large-Scale CMP[C]//Networking, Architecture and Storage (NAS), 2010 IEEE Fifth International Conference. 2010; 367-376
- [18] Park S O, Kim S J. An efficient array file system for multiple Small-Capacity NAND flash memories[C]//Network-Based Information Systems (NBIS), 2011 14th International Conference. 2011; 569-572
- [19] Yang Liu, Huang Jian-zhong, Xie Chang-sheng, et al. Raf: a random access first cache management to improve SSD-Based disk cache[C]//Networking, Architecture and Storage (NAS), 2010 IEEE Fifth International Conference. 2010; 492-500