

基于重连机制的复杂网络鲁棒性分析

穆俊芳^{1,2} 郑文萍^{1,2} 王杰³ 梁吉业^{1,2}

1 山西大学计算机与信息技术学院 太原 030006

2 计算智能与中文信息处理教育部重点实验室(山西大学) 太原 030006

3 山西财经大学信息学院 太原 030006

(1379680219@qq.com)

摘要 随着电力系统、交通系统、通信系统等基础设施网络的广泛使用,提高复杂网络的鲁棒性具有重要意义。重连机制是一种高效且简洁的方法,常用于提高网络的鲁棒性。基于0阶零模型的重连机制通过对边的随机删除和创建操作来提高网络的鲁棒性,其尽管保持了网络的边数,但会引起节点的度值发生变化,如基于香农熵的重连算法;基于1阶零模型的重连机制通过随机选择两条边进行换边操作来提高网络的鲁棒性,其尽管保持了网络的度分布,但随机选边难以准确找到合适的节点,增加了算法的时间成本,如基于最大连通分支的重连算法。因此,为了保持网络的度分布且快速提高网络的鲁棒性,提出了一种基于1阶零模型的快速重连算法(Fast Rewiring Mechanism based on 1-order Null Model, FRM)。FRM算法通过比较每条边的两个端点度值的差异为边加权,根据边的权重优先选择权重较大的两条边,并创建度值相似节点之间的连边来提高网络的鲁棒性。在3个真实网络数据上与4种代表性重连算法相比,对比实验结果表明,FRM算法在度中心性、介数中心性和Page-Rank中心性攻击下最大连通分支中的节点比例 $s(Q)$ 、基于最大连通分支的鲁棒性指标 R 和基于香农熵的鲁棒性指标 $I(G)$ 的表现都更好。

关键词: 复杂网络; 重连机制; 鲁棒性; 最大连通分支; 香农熵

中图分类号 TP181

Robustness Analysis of Complex Network Based on Rewiring Mechanism

MU Jun-fang^{1,2}, ZHENG Wen-ping^{1,2}, WANG Jie³ and LIANG Ji-ye^{1,2}

1 School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

2 Key Laboratory of Computation Intelligence and Chinese Information Processing, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

3 College of Information, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, China

Abstract With the widespread use of infrastructure networks such as power systems, transportation systems, and communication systems, it is of great significance to improve the robustness of complex networks. The rewiring mechanism is an efficient and simple method to improve the robustness of the network. The rewiring mechanism based on the 0-order null model improves the robustness of the network by randomly deleting and creating edges. Although the number of edges is maintained, the degree of nodes will change, such as the RM-ES algorithm. The rewiring mechanism based on the 1-order null model improves the robustness of the network by randomly selecting two edges for rewiring, although the degree distribution is maintained, it is difficult to find the appropriate nodes by random edge selection, which increases the running time of algorithms, such as the RM-LCC algorithm. Therefore, in order to maintain the degree distribution and improve the robustness of the network, this paper proposes a fast rewiring mechanism based on 1-order null model, called FRM. The FRM algorithm first weights the edges by degree for each edge, then selects two edges with the probability proportional to the weight of edge, finally, creates the edges between nodes with similar degree. We compare the FRM algorithm with other methods on real network data sets. The experimental results of three real network data show that FRM algorithm performs better than four representative rewiring algorithms under the attack of degree centrality, betweenness centrality and PageRank centrality with respect to the ratio of nodes in largest connected component

到稿日期:2020-10-19 返修日期:2021-04-09

基金项目:国家自然科学基金(62072292, 62006145); 山西省重点研发计划项目(201903D121162); 山西省自然科学基金(201801D121123); 山西省回国留学人员科研基金项目(2017-014); 山西省1331工程项目

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (62072292, 62006145), Projects of Key Research and Development Plan of Shanxi Province (201903D121162), Natural Science Foundation of Shanxi Province (201801D121123), Shanxi Scholarship Council of China (2017-014) and 1331 Engineering Project of Shanxi Province, China.

通信作者: 郑文萍(wpzhang@sxu.edu.cn)

$s(Q)$, robustness index R and robustness index $I(G)$.

Keywords Complex network, Rewiring mechanism, Robustness, Largest connected component, Shannon entropy

1 引言

随着电力系统、交通系统、通讯系统等基础设施网络的广泛使用,保持系统的效率和功能至关重要。复杂系统通常抽象为复杂网络^[1-2],即 $G=(V, E)$,其中 V 表示复杂系统的基本单元, E 表示基本单元联系的集合。在复杂网络的传播与免疫^[3]、同步与控制^[4]等实际动态问题中^[5-8],面对蓄意攻击或随机故障,不同的拓扑结构具有不同的鲁棒性,如随机去除网络中的大量节点,无标度网络仍可以保持基本的连通性,但随机网络被分成了多个孤立的子网。蓄意去除少量高度节点就可以破坏无标度网络的连通性,因此改变网络的拓扑结构对提高复杂网络的鲁棒性具有重要意义。

复杂网络的鲁棒性衡量了网络对外界干扰(如蓄意攻击或随机故障)的响应能力,在这种变化下(移除部分节点或边)保持其功能的网络被认为比不能保持其功能的网络更加鲁棒。目前,提高复杂网络鲁棒性的研究主要分为两大类:增加网络的连边和重连网络的连边。许多基础设施都存在容量限制,如发电厂的传输线、航空系统的航班数等,因此增加网络的连边是不切实际的。大量的研究已经证实,重连机制是一种简单且有效的方式,常用于调整网络的拓扑结构以提高网络的鲁棒性。重连机制,即受影响的节点与故障节点断开连接,并以特定的概率连接到另外一个非故障节点。研究者已经提出了大量重连机制用于提高网络的鲁棒性。基于0阶零模型的重连机制通过对边的随机删除和创建操作来提高网络的鲁棒性。尽管基于0阶零模型的重连机制保持了网络的边数,但会引起节点的度值发生变化,如基于香农熵的重连算法。基于1阶零模型的重连机制通过随机选择两条边进行重连操作,以提高网络的鲁棒性。尽管保持了网络的度分布不变,但随机选边难以准确找到合适的节点,增加了算法的时间复杂度,如基于最大连通分支的重连算法。

基于此,本文提出了一种基于1阶零模型的快速重连算法(FRM),FRM算法可以保持网络的度分布且快速提高网络的鲁棒性。FRM算法主要分为3个阶段:1)通过比较每条边两个端点度值的差异,来为每条边加权;2)根据边权重优先选择两条权重较大的边;3)在保证网络连通及鲁棒性指标增加的情况下,删除原始边并创建度值相似节点之间的连边。重复上述步骤直到达到最大迭代次数。为了验证FRM算法的合理性,在3个真实网络数据上与4种代表性重连算法相比,对比实验结果表明,FRM算法在度中心性、介数中心性和PageRank中心性攻击下最大连通分支中的节点比例、基于最大连通分支的鲁棒性指标和基于香农熵的鲁棒性指标都表现较好。

2 相关工作

复杂网络可以用图 $G=(V, E)$ 表示,其中 V 是网络 G 的节点集, E 是网络 G 的边集,令 $N=|V|$ 表示节点数, $M=|E|$ 表示边数。除非特别声明,本文仅考虑无重边无自环的简单

连通无向图^[9-10],即网络中任意一对节点之间最多存在一条边,每条边的两个端点不同且任意两个节点至少存在一条路径彼此到达。网络 G 中节点 v_i 的邻域记作 $N_{v_i}=\{u|(u, v_i) \in E, u \in V\}$,表示网络 G 中与节点 v_i 相邻的节点集合,在不引起混淆的情况下,简记为 N_i 。节点 v_i 度 $d_{v_i}=|N_i|$,表示网络 G 中与节点 v_i 关联的边数,简记为 d_i 。 d_{\max} 和 d_{\min} 分别表示网络 G 的最大度和最小度。

通常将与一个实际网络具有相同的节点数和相同的某些性质 A 的随机网络称为该实际网络的随机化网络(randomized network),其中性质 A 可以是平均度、度分布、聚集系数、同配性等,或者是它们的某种组合。这类随机化网络模型在统计学上被称为零模型(null model)。按照约束条件从少到多,可定义不同阶次的零模型,如0阶零模型和1阶零模型。

2.1 基于0阶零模型的重连机制

0阶零模型,即与原网络具有相同节点数 N 和边数 M 的随机化网络。在随机重连过程中,每次随机删除原网络中的一条边 (v_i, v_j) ,再随机选择网络中两个不相连的节点 v_m 和 v_n ,并在它们之间创建一条边 (v_m, v_n) 。基于0阶零模型的重连机制保持了网络的节点数和边数,但会引起节点度值发生变化。

Safaei 等于 2020 年提出了基于香农熵的重连算法^[11](Rewiring Mechanism Based on Shannon Entropy, RM-SE)。网络熵与网络在各种环境约束下容忍其配置变化的能力有关,因此网络的熵可用于描述网络的鲁棒性。RM-SE 方法利用香农熵评价了网络的结构复杂性,并提出了香农熵与图能之间的关系,如式(1)所示:

$$I(G)=1-\frac{2M}{E_G^2} \quad (1)$$

其中, $I(G)$ 表示有关邻接矩阵特征值的香农熵,如式(2)所示:

$$\begin{aligned} I(G) &= -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i \\ &= -\sum_{i=1}^N \frac{|\lambda_i|}{\sum_{j=1}^N |\lambda_j|} \log \frac{|\lambda_i|}{\sum_{j=1}^N |\lambda_j|} \\ &= \log \sum_{j=1}^N |\lambda_j| - \sum_{i=1}^N \frac{|\lambda_i|}{\sum_{j=1}^N |\lambda_j|} \log |\lambda_i| \\ &\approx \sum_{i=1}^N \frac{|\lambda_i|}{\sum_{j=1}^N |\lambda_j|} \left[1 - \frac{|\lambda_i|}{\sum_{j=1}^N |\lambda_j|} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ 表示网络邻接矩阵的特征值; E_G 表示网络的图能(graph energy),即为所有特征值的绝对值之和。基于式(1),RM-SE算法采用0阶零模型的重连机制来提高网络的鲁棒性。RM-SE算法主要有4个阶段:1)在保持网络最小度不变的条件下,随机选择一条边 (v_i, v_j) ,并将度小的节点作为新边的一个端点;2)在网络中的其他节点中,根据节点度值的倒数选择一个与 v_i 节点不相连的新节点 v_k 作为新边的另一个端点;3)在不产生重边和自环的情况下,删除原始边 (v_i, v_j) 并创建新边 (v_i, v_k) (假设 $d_i < d_j$);4)判断重连之后新

网络的连通性和 $I(G)$ 值,若新网络连通且 $I(G)$ 值增加,则保持此次换边操作,否则还原换边操作。重复上述重连操作,直到达到最大迭代次数, RM-SE 算法设置最大迭代次数为 2000 或者边数的 30%。

2.2 基于 1 阶零模型的重连机制

1 阶零模型,即与原网络具有相同的节点数 N 和度分布 $P(k)$ 的随机化网络。在随机重连过程中,每次随机选择原网络的两条边 (v_i, v_j) 和 (v_m, v_n) ,若节点 v_i, v_j, v_m, v_n 之间只有这两条边,则去除这两条边,并创建新边 (v_i, v_n) 和 (v_j, v_m) ,因此网络的度序列保持不变。基于 1 阶零模型的重连算法通过交换选定的两条边以保持每个节点的度值不变,然而如何选择符合条件的边以及交换条件会影响网络的鲁棒性。

Schneider 等于 2011 年提出了基于最大连通分支的重连算法(Rewiring Mechanism Based on Largest Connected Cluster, RM-LCC)^[12-13]。RM-LCC 算法通过最大连通分支中的节点比例来度量网络的鲁棒性,如式(3)所示:

$$R = \frac{1}{N+1} \sum_{Q=1}^N s(Q) \quad (3)$$

其中, N 表示网络的节点数, $s(Q)$ 表示移除 Q 个节点后最大连通分支中的节点比例。基于式(3), RM-LCC 算法采用基于 1 阶零模型的重连机制来提高网络的鲁棒性。RM-LCC 算法主要分为两个阶段:1) 随机选择两条边 (v_i, v_j) 和 (v_m, v_n) ; 2) 保证不产生重边和自环的情况下,交换两条边,即删除旧边 (v_i, v_j) 和 (v_m, v_n) ,并创建新边 (v_i, v_n) 和 (v_j, v_m) ; 3) 判断网络的连通性和 R 值,若新网络连通且 R 值增加,则保持此次换边操作,否则还原换边操作。重复上述过程,直到达到网络的最大迭代次数或 R 值收敛。

Louzada 等于 2013 年提出了基于最大连通分支的智能重连算法(Smart Rewiring Mechanism Based on Largest Connected Cluster, SRM-LCC)^[14]。SRM-LCC 算法使用式(3)来度量网络的鲁棒性。SRM-LCC 算法主要分为 5 个阶段:1) 随机选择一个节点 $v_i (d_i > 2)$,其邻域节点的度值大于 1; 2) 在节点 v_i 的邻域 N_i 中选择度值最小的邻居节点 v_j 和度值最大的邻居节点 v_k ; 3) 随机选择节点 v_j 和节点 v_k 的邻居节点 v_m 和 v_n ; 4) 删除旧边 (v_j, v_m) 和 (v_k, v_n) 并创建新边 (v_j, v_k) 和 (v_m, v_n) ; 5) 判断网络的连通性和 R 值,若新网络连通且 R 值增加,则保持此次换边操作,否则还原换边操作。重复上述过程,直到达到网络的最大迭代次数或 R 值收敛。

Bai 等于 2015 年提出了基于最大连通分支的快速智能重连算法(Fast Smart Rewiring Mechanism Based on Largest Connected Cluster, FSRM-LCC)^[15]。FSRM-LCC 算法使用式(3)来度量网络的鲁棒性。FSRM-LCC 主要分为 3 个阶段:1) 随机选择两条边 (v_i, v_j) 和 (v_m, v_n) ; 2) 根据节点的度值对 4 个节点进行非递增排序,在保证不产生自环和重边的情况下,删除原始边并创建最大度节点和次大度节点之间的连边及最小度节点和次小度节点之间的连边; 3) 判断网络的连通性和 R 值,若新网络连通且 R 值增加,则保持此次换边操作,否则还原换边操作。重复上述过程,直到达到网络的最大迭代次数或 R 值收敛。

基于零模型的重连机制使得优化后的网络呈现“洋葱结

构”^[11-15](onion-like topology),即度值较大的节点彼此相连形成核心,其他节点围绕在核心并被递减的节点分层包围。因此,优化后的网络具有较高的同配性,即度值相似的节点之间存在更多的连边。尽管基于零模型的重连机制通过交换随机选择边来调整网络的拓扑结构,但是随机选边难以准确找到合适的节点,使得算法时间增加。基于此,本文提出了一种基于 1 阶零模型的快速重连算法,通过为边赋权重并根据权重选择合适的边,来快速地提高网络的鲁棒性。

3 基于 1 阶零模型的快速重连算法

为了保持网络的度分布且快速提高网络的鲁棒性,本文提出了一种基于 1 阶零模型的快速重连算法。FRM 算法包括 3 个主要阶段:1) 通过比较每条边两个端点度值的差异为每条边加权; 2) 根据边权重优先选择两条权重较大的边; 3) 在保证网络不产生重边和自环、网络连通和鲁棒性指标增大的条件下,删除原始边并创建度值相似节点之间的连边。

3.1 边权重的定义

在复杂网络中,度是刻画单个节点属性的最简单但又最重要的概念之一。复杂网络具有无标度特性,其度分布服从幂律分布,即网络中存在大量度相对较小的节点,也存在少量度相对较大的节点。因此,为了简洁地衡量节点之间的连边方式,FRM 算法使用节点的度值之差的绝对值来为网络中的每条边赋权重,如式(4)所示:

$$w_{ij} = |d_i - d_j| \quad (4)$$

其中, d_i 表示节点 v_i 的度值, w_{ij} 表示边 (v_i, v_j) 的权重。边权重越大,表明该边两个端点的度值差异越大。

3.2 选边规则

大量的研究表明,基于零模型的重连机制使得优化后的网络呈现“洋葱结构”,同时优化后的网络同配性增加,即度值相似的节点之间存在较多的连边。因此,选择合适的边进行交换,使度值相似的节点尽可能地相连,可以有效地提高网络的鲁棒性。

FRM 算法通过式(4)为每条边加权,度量了每条边两个端点度值的差异。根据边权重选择两条边,其选择的概率正比于边的权重,即满足如下规则:

$$P_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{(u,v) \in E} w_{uv}} \quad (5)$$

根据式(5),FRM 算法选择权重较大的边,即大度节点与小度节点相连的边。通过选择边权重较大的两条边,使得 FRM 算法可快速找到度值相差较大的边,从而通过重连操作快速提高网络的鲁棒性。

3.3 重连方式

根据式(5),FRM 算法优先选择两条权重较大的边(4 个节点各不相同)进行重连操作。根据度值对 4 个节点进行非递增排序,即 $d_{(1)} \geq d_{(2)} \geq d_{(3)} \geq d_{(4)}$ 。根据 1 阶零模型的重连机制可知,4 个节点的连接方式有 3 种:1) $(v_{d_{(1)}}, v_{d_{(2)}})$ 和 $(v_{d_{(3)}}, v_{d_{(4)}})$; 2) $(v_{d_{(1)}}, v_{d_{(3)}})$ 和 $(v_{d_{(2)}}, v_{d_{(4)}})$; 3) $(v_{d_{(1)}}, v_{d_{(4)}})$ 和 $(v_{d_{(2)}}, v_{d_{(3)}})$ 。由于基于零模型的重连机制使得优化后的网络同配性增加,因此本文通过比较 3 种连边方式的同配系数变化情况来确定节点之间的最优连边方式。

根据复杂网络中节点的连边方式,若度大的节点倾向于与度大的节点连接,则称网络是同配(assortative);若度大的节点倾向于与度小的节点连接,则称网络是异配(disassortative)。通常使用同配系数^[16]来度量网络的同配性,如式(6)所示:

$$\rho = 1 - \frac{\sum_{(i,j) \in E} (d_i - d_j)^2}{\sum_{i=1}^N d_i^3 - \frac{1}{2M} (\sum_{i=1}^N d_i^2)^2} \quad (6)$$

其中, d_i 表示节点 v_i 的度值, N 表示网络的节点数, M 表示网络的边数。

分析式(6)可知,基于1阶零模型的重连机制在重连过程中不改变节点的度值,因此 $\sum_{i=1}^N d_i^3 - \frac{1}{2M} (\sum_{i=1}^N d_i^2)^2$ 在计算过程中为常量,记作 σ ,即 $\rho = 1 - \sum_{(i,j) \in E} (d_i - d_j)^2 / \sigma$,则网络的同配系数只与每条边两个端点的度值之差的平方有关。因此,3种连边方式的同配系数之差如式(7)~式(9)所示:

$$\rho_{(1)} - \rho_{(2)} = \frac{2(d_{(2)} - d_{(3)})(d_{(1)} - d_{(4)})}{\sigma} \geq 0 \quad (7)$$

$$\rho_{(2)} - \rho_{(3)} = \frac{2(d_{(1)} - d_{(2)})(d_{(3)} - d_{(4)})}{\sigma} \geq 0 \quad (8)$$

$$\rho_{(1)} - \rho_{(3)} = \frac{2(d_{(2)} - d_{(4)})(d_{(1)} - d_{(3)})}{\sigma} \geq 0 \quad (9)$$

由式(7)~式(9)可知, $\rho_{(1)} \geq \rho_{(2)} \geq \rho_{(3)}$,即第一种重连方式会引起最大的同配性增量。因此,FRM算法根据第一种连边方式进行重连操作,即根据度值对根据边权重选中的两条边的4个节点进行非递增排序,创建度值相似的节点之间的两条边。同样,在重连过程中网络不允许产生重边和自环,且网络连通。此外,本文同时使用式(1)和式(3)来判断重连之后的网络的鲁棒性,若网络鲁棒性增加则保持本次重连操作,否则还原本次重连操作。

3.4 算法描述与时间复杂度分析

图1给出了FRM算法的流程图,其中包括边加权、选边操作和交换边3个主要过程。

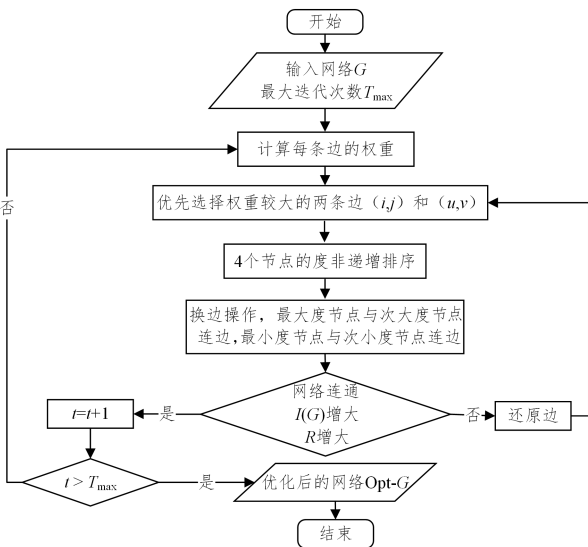


图1 FRM算法的流程图

Fig.1 Flow chart of FRM algorithm

在调整网络鲁棒性的不同算法中,需要计算 $I(G)$ 或 R 来

判断是否进行换边操作,其中计算 $I(G)$ 时需要计算邻接矩阵的特征值,因此时间复杂度为 $O(N^3)$;计算 R 时需要计算每个移除节点后的最大连通分支的规模,通过使用深度优先遍历计算网络的连通分支,其复杂度为 $O(N^2)$,因此计算 R 的时间复杂度为 $O(N^3)$ 。

令 t_{RM-SE} , t_{RM-LCC} , $t_{SRM-LCC}$ 和 $t_{FSRM-LCC}$ 分别表示 RM-SE 算法、RM-LCC 算法、SRM-LCC 算法和 FSRM-LCC 算法中的迭代次数,则对应的平均时间复杂度为 $O(t_{RM-SE} * N^3)$, $O(t_{RM-LCC} * N^3)$, $O(t_{SRM-LCC} * N^3)$ 和 $O(t_{FSRM-LCC} * N^3)$ 。

令 t_{FRM} 表示 FRM 算法中的迭代次数,则 FRM 算法的平均时间复杂度为 $O(t_{FRM} * N^3)$ 。

根据不同算法的选边策略,不同算法的迭代次数关系为:

$$t_{RM-SE} \approx t_{RM-LCC} > t_{SRM-LCC} > t_{FSRM-LCC} > t_{FRM}$$

因此,FRM 算法的时间复杂度较低。表1列出了各种算法的时间复杂度。

表1 不同算法的时间复杂度

Table 1 Time complexity of different algorithms

Algorithm	Time complexity
RM-SE	$O(t_{RM-SE} * N^3)$
RM-LCC	$O(t_{RM-LCC} * N^3)$
SRM-LCC	$O(t_{SRM-LCC} * N^3)$
FSRM-LCC	$O(t_{FSRM-LCC} * N^3)$
FRM	$O(t_{FRM} * N^3)$

4 实验结果与分析

为评估 FRM 算法的性能,本文在3个真实网络上与 RM-SE 算法、RM-LCC 算法、SRM-LCC 算法和 FSRM-LCC 算法进行了对比实验。

4.1 数据集

本文使用3个真实网络数据集^[17]: Karate club network, US air lines network 和 Email network,其基本特征如表2所列。在重连过程中,网络始终保持连通且节点的度值保持不变。本文设置最大迭代次数为边的30%,即 $T_{max} = M \times 30\%$ 。

表2 真实网络数据集

Table 2 Real network datasets

Data set	N	M	d_{max}	d_{min}
Karate club network	37	78	17	1
US air lines network	332	2 126	139	1
Email network	1 133	5 451	71	1

4.2 鲁棒性分析

为了研究网络在各种攻击下的鲁棒性,选择合适的攻击策略具有重要的意义。不同的攻击策略对网络的拓扑结构会产生不同程度的破坏,从而影响网络的功能。本文采用高中心性自适应攻击(High Centrality Adaptive Attacks, HCAA),即每次攻击前重新计算当前网络的中心性值最高的节点。本小节使用基于邻域的度中心性^[18](Degree Centrality, DC)、基于路径的介数中心性^[19](Betweenness Centrality, BC)和基于特征向量的 PageRank 中心性^[20](PageRank Centrality, PR)3种不同的攻击策略,来评价优化后网络的最大连通分支中的节点比例 $s(Q)$ 以及两个鲁棒性指标 R 和 $I(G)$ 。

度中心性表明了该节点与其他节点的直接通信能力,度

中心性越大,节点就越重要;介数中心性认为,通过该节点的最短路径越多,该节点就越重要;PageRank 中心性通过考虑节点的邻居和邻居节点的重要性来共同决定节点的重要性。3 个中心性公式如下:

$$DC(i) = \frac{d_i}{N-1}$$

$$BC(i) = \sum_{s \neq i} n_{st}^i / n_s$$

$$PR_i(t) = (1-d) \sum_{j=1}^N \frac{a_{ji}}{k_j^{out}} PR_j(t-1) + \frac{d}{N}$$

其中, n_{st}^i 表示经过节点 v_i 的最短路径数目, n_s 表示节点 v_s 和节点 v_t 之间的最短路径数目, a_{ji}/k_j^{out} 表示从节点 v_j 随机游走到节点 v_i 的概率, k_j^{out} 表示节点 v_j 的出度, d 为分配给每个节点的概率值, d 值越大,收敛速度就越快。

图 2 给出了空手道俱乐部网络基于不同中心性(度、介数和 PageRank 中心性)攻击后最大连通分支节点比例的变化情况。X 轴表示移除节点的个数, Y 轴表示最大连通分支中的节点比例。图 2(a) 给出了每次移除度值最大的节点, 空手

道俱乐部网络中最大连通分支中的节点比例。原始空手道网络在面对度攻击时, $s(Q)$ 迅速下降。然而, 经过 RM-LCC 算法、SRM-LCC 算法、FSRM-LCC 算法、RM-SE 算法和本文 FRM 算法优化后的网络, $S(Q)$ 在面对度攻击时有不同程度的提高, 其中, RM-SE 算法的性能最好。根据 RM-SE 算法的过程可知, RM-SE 算法在调整网络鲁棒性时会改变节点的度值。因此, 由 RM-SE 算法优化后的网络使得网络中的节点度值趋于平均, 即增大了原始度值较小的节点的度, 减小了原始度值较大的节点的度, 使得优化后的网络节点之间的回路增多。当移除节点时, 对最大连通分支中的节点的影响较小, 因此在面对度攻击时 RM-SE 算法性能表现最好。本文提出的 FRM 算法优化后的网络与 RM-LCC 算法、SRM-LCC 算法、FSRM-LCC 算法优化后的网络具有类似的性能。图 2(b) 和图 2(c) 分别给出了每次移除介数和 PageRank 中心性最大的节点后, 空手道俱乐部网络中最大连通分支中的节点比例。

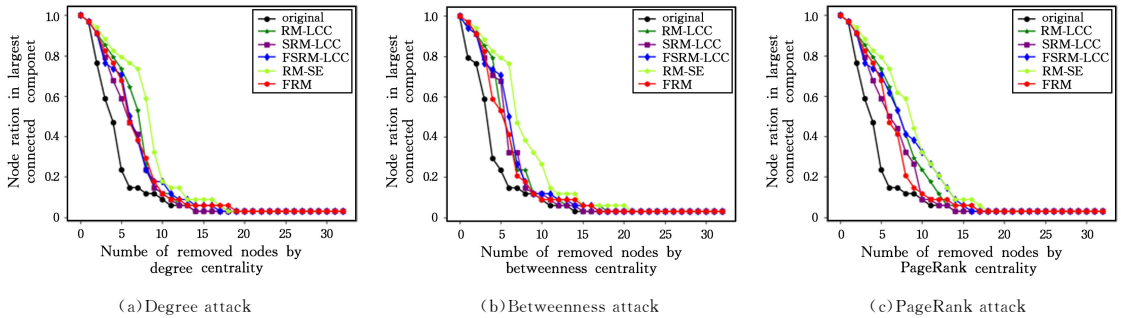


图 2 空手道俱乐部网络中基于中心性攻击下最大连通分支的节点比例

Fig. 2 Fractional size of the largest component under centrality-based attacks in Karate club network

通常具有“洋葱结构”的网络在面对攻击时会呈现出较好的鲁棒性。在网络调整过程中, FRM 算法优先选择端点度值差异较大的两条边进行重连操作, 以使网络更接近于“洋葱结构”。与随机选择边进行重连操作相比, FRM 算法能较快调整网络的鲁棒性, 当网络规模增大时, 这一优势更明显。

图 3 给出了空手道俱乐部网络中基于不同中心性(度、介数和 PageRank 中心性)攻击下的不同算法优化后网络鲁棒性指数 R 的变化情况。X 轴表示不同的重连算法, Y 轴表示

鲁棒性指数 R 。图 3(a) 给出了基于度攻击的鲁棒性指标的变化情况。RM-LCC 算法、SRM-LCC 算法、FSRM-LCC 算法、RM-SE 算法和本文提出的 FRM 算法优化后的网络的 R 值均逐渐增加。由于 RM-SE 算法改变了网络的度分布, 使得节点度值均匀化, 因此其 R 值提升得最快, 本文提出的 FRM 算法与其他算法具有类似的效果。图 3(b) 和图 3(c) 分别给出了基于介数和 PageRank 中心性攻击后网络鲁棒性的对比情况。

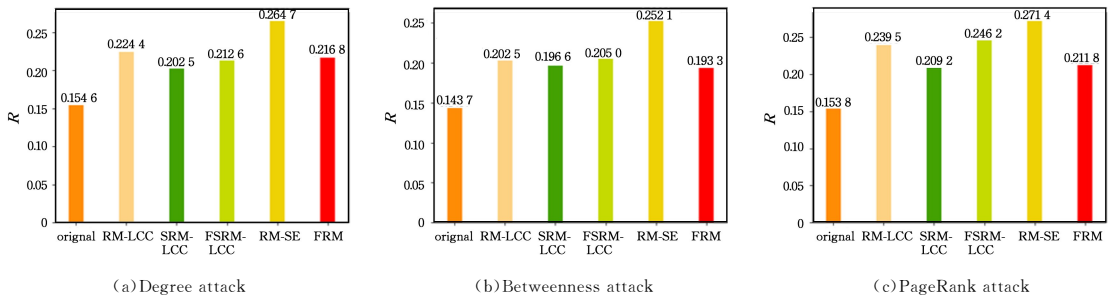


图 3 空手道俱乐部网络中基于中心性(度、介数和 Pagerank 中心性)攻击下的不同重连方法优化后的网络鲁棒性指数

Fig. 3 Average robustness index R in term of different rewiring algorithm under centrality-based attacks (degree, betweenness and PageRank centrality) in Karate club network

图 4 给出了空手道俱乐部网络不同重连方法下优化网络基于香农熵的鲁棒性指数 $I(G)$ 的变化情况。X 轴表示不同

的重连方法, Y 轴表示鲁棒性指数 $I(G)$ 。与其他重连方法相比, FRM 算法优化后的网络具有较高的 $I(G)$ 值, 即 FRM 算

法优化后的网络具有较强的鲁棒性。

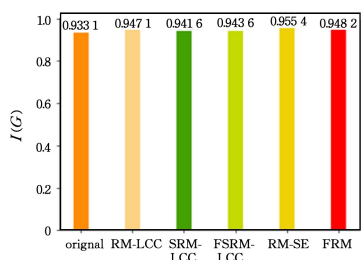


图4 不同算法下空手道俱乐部网络及优化网络的鲁棒性指数 $I(G)$

Fig. 4 Robustness index $I(G)$ of optimized network for Karate club networks under different algorithms

表3列出了原始空手道俱乐部网络与RM-LCC算法、SRM-LCC算法、FSRM-LCC算法、RM-SE算法和本文提出的FRM算法优化后网络的各个拓扑指标值。复杂网络具有“小世界”特性,即网络具有较高的聚集系数和较短的平均路径长度;其中, C 表示网络的聚集系数,刻画了网络的局部结构的聚集性; APL 表示网络的平均最短路径长度,描述了网络中节点间的平均分离程度; ρ 表示网络的同配系数,刻画了节点的连边倾向; $I(G)$ 表示基于香农熵的鲁棒性指标。同样,表4列出了原始美国航空网络与RM-LCC算法、SRM-LCC算法、FSRM-LCC算法、RM-SE算法和FRM算法优化后网络的各个拓扑指标值。表5列出了原始邮件网络与RM-LCC算法、SRM-LCC算法、FSRM-LCC算法、RM-SE算法和FRM算法优化后网络的各个拓扑指标值。

表3 优化后空手道俱乐部网络的指标

Table 3 Index of optimized Karate club network

Data set	N	M	C	APL	ρ	$I(G)$
Karate club network	37	78	0.5706	2.4082	-0.4756	0.9331
RM-LCC	34	78	0.3649	2.2513	-0.2342	0.9471
SRM-LCC	34	78	0.5047	2.2103	-0.3687	0.9416
FSRM-LCC	34	78	0.3398	2.3672	-0.1915	0.9436
RM-SE	34	78	0.2337	2.3101	-0.2552	0.9554
FRM	34	78	0.3176	2.6827	-0.1047	0.9482

表4 优化后美国航空网络的指标

Table 4 Index of optimized US air lines network

Data set	N	M	C	APL	ρ	$I(G)$
US air lines network	332	2126	0.62521	2.7381	-0.2078	0.9887
RM-LCC	332	2126	0.3199	2.7242	-0.1877	0.9905
SRM-LCC	332	2126	0.5755	2.6300	-0.2293	0.98904
FSRM-LCC	332	2126	0.2722	3.1973	-0.1223	0.9909
RM-SE	332	2126	0.2324	2.6143	0.0113	0.9937
FRM	332	2126	0.2623	3.5438	-0.0925	0.9915

表5 优化后邮件网络的指标

Table 5 Index of optimized Email network

Data set	N	M	C	APL	ρ	$I(G)$
Email network	1133	5451	0.2201	3.6060	0.0782	0.9981
RM-LCC	1133	5451	0.0607	3.4873	0.2116	0.9983
SRM-LCC	1133	5451	0.2388	3.4746	-0.0303	0.9981
FSRM-LCC	1133	5451	0.0728	3.6517	0.3582	0.9983
RM-SE	1133	5451	0.0742	3.4376	0.1961	0.9985
FRM	1133	5451	0.0538	3.9079	0.6060	0.9984

结束语 本文提出了一种基于1阶零模型的快速重连算法。FRM算法通过比较每条边两个端点度值的差异为每条边加权,并根据边权重优先选择两条权重较大的边。在保证网络连通及鲁棒性指标增加的前提下,删除原始边并创建度值相似节点之间的连边。通过与RM-LCC算法、SRM-LCC算法、FSRM-LCC算法和RM-SE算法在3个真实网络上进行对比分析,实验结果表明,经过FRM算法优化后的网络在面对不同攻击时最大连通分支节点比例 $s(Q)$ 、鲁棒性指标 R 和 $I(G)$ 均表现出了较好的性能。

探索复杂网络的鲁棒性是一项基础且具有挑战的工作。复杂网络的鲁棒性在实际系统中有具体且直接的应用,如复杂网络中的疾病传播、舆论和知识传播以及同步控制理论等。复杂网络的鲁棒性与拓扑结构密切相关,因此合理地调整复杂网络的拓扑结构以提高鲁棒性具有重要意义。

参考文献

- [1] BOCCALETIA S, LATORAB V, MORENOD Y, et al. Complex networks: structure and dynamics [J]. Physics Reports, 2006, 424(4/5): 175-308.
- [2] NEWMAN M E J. The structure and function of complex networks [J]. SIAM Review, 2003, 45(2): 167-256.
- [3] YANG D, LIAO X, SHEN H, et al. Dynamic node immunization for restraint of harmful information diffusion in social networks [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2018, 503(1): 640-649.
- [4] ARENAS A, ALBERT D G, KURTHS J, et al. Synchronization in complex networks [J]. Physics Reports, 2008, 469(3): 93-153.
- [5] WANG J, LIANG J Y, ZHENG W P, et al. A graph clustering method for detecting protein complexes [J]. Journal of Computer Research and Development, 2015, 52(8): 1784-1793.
- [6] ZHENG W P, CHE C H, QIAN Y H, et al. A graph clustering algorithm based on paths between nodes in complex networks [J]. Chinese Journal of Computer, 2018, 49(15): 1958-1966.
- [7] WANG Z Q, LIANG J Y, LI R, et al. An approach to cold-start link prediction: Establishing connections between non-topological and topological information [J]. IEEE Transaction on Knowledge and Data Engineering, 2016, 28: 2857-2870.
- [8] LIU Z H. Dynamics on complex networks [J]. Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica, 2020(50): 010501.
- [9] NEWMAN M E J. Networks: An Introduction [M]. Oxford University Press, 2010.
- [10] WANG X F, LI X, CHENG G R. Network science: An introduction [M]. Higher Education Press, 2012.
- [11] SAFAEI F, YEGANLOO H, AKBAR R. Robustness on topology reconfiguration of complex networks: An entropic approach [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2020(170): 379-409.
- [12] HERRMANN H J, SCHNEIDER C M, MOREIRA A A, et al. Onion-like network topology enhances robustness against malicious attacks [J]. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2011(2011): 01027.

- [13] SCHNEIDER C M, MOREIRA A A, ANDRADE J S, et al. Mitigation of malicious attacks on networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2011(108):3838-3841.
- [14] LOUZADA V H P, DAOLIO F, HANS J, et al. Smart rewiring for network robustness[J]. IO: Theory eJournal, 2013(1):150-159.
- [15] BAI L, XIAO Y D, HOU L L, et al. Smart rewiring: Improving network robustness faster[J]. Chinese Physics Letters, 2015(32):078901.
- [16] MIEGHEM P V, WANG H, GE X S, et al. Influence of assortativity and degree-preserving rewiring on the spectra of networks[J]. The European Physical Journal B, 2010(76):643-652.
- [17] ROSSI R A, AHMED N K. The network data repository with interactive graph analytics and visualization[C]// Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence. AAAI Press, 2015: 4292-4293.
- [18] JEONG H, MASON S P, BARABASI A L, et al. Oltvai, Lethality and centrality in protein networks[J]. Nature, 2001(411): 41-42.
- [19] JOY M P, BROCK A L, INGBER D E, et al. High-betweenness proteins in the yeast protein interaction network[J]. Journal of Biomedicine and Biotechnology, 2005(2):96-103.
- [20] BONACICH P. Power and Centrality: A family of measures[J]. American Journal of Sociology, 1987(92):1170-1182.



MU Jun-fang, born in 1991, candidate Ph.D, is a member of China Computer Federation. Her main research interests include complex network and bioinformatics, etc.



ZHENG Wen-ping, born in 1979, Ph.D, associate professor, Ph.D supervisor, is a member of China Computer Federation. Her main research interests include network science and bioinformatics, etc.