信息的P-依赖与信息P-依赖挖掘-筛选

刘纪芹 张海月
(山东财经大学数学与数量经济学院 济南 250014)

摘 要 P-集合(packet sets)是一个新的动态模型,它是由内P-集合 $X^{\overline{F}}$(internal packet set $X^{\overline{F}}$)与外P-集合 X^F(outer packet set X^F)构成的集合对,即($X^{\overline{F}}$,X^F)是P-集合。P-集合把动态特性引入到有限普通集合 X(cantor set X)内,改进了有限普通集合 X。文中通过利用P-集合与它的动态特性,给出信息P-依赖(packet dependence)与P-依赖结构,给出信息P-依赖的属性特征,进而给出信息P-依赖挖掘与挖掘定理,以及P-依赖挖掘准则与信息P-依赖挖掘-筛选原理;最后根据这些研究结果给出应用。

关键词 P-集合,信息P-依赖,P-依赖挖掘定理,挖掘准则,挖掘-筛选原理,应用
中图法分类号 O144 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.07.035

Information P-dependence and P-dependence Mining-sieving

LIU Ji-qin ZHANG Hai-yue
(School of Mathematics and Quantitative Economics,Shandong University of Finance and Economics,Jinan 250014,China)

Abstract P-sets(packet sets) is a new dynamic model. It is a set pair composed of the internal P-set $X^{\overline{F}}$ (internal packet set $X^{\overline{F}}$) and the outer P-set X^F (outer packet set X^F),or ($X^{\overline{F}}$,X^F) is a P-sets. P-sets was proposed by introducing dynamic characte-ristics into a finite general set X(cantor set X) and improving X. Using P-sets and its dynamic characteristics,the paper gave the concept of information P-dependence(packet dependence) and its structure,and gave attribute characteristics of information P-dependence. It further presented the concept of information P-dependence mining,mining theorems,information P-dependence mining criterion and P-dependence mining-sieving principle. Using these results,the paper gave an application of information P-dependence mining-sieving.

Keywords P-sets,Information P-dependence,P-dependence mining theorem,Mining criterion,Mining-sieving principle,Application

1 引言

信息系统中的若干信息具有动态特性,例如,在目标跟踪的信息识别中,构成目标的信息为(x),(x)内的信息元 x_i 随机地发生变化(信息元 x_i 增多或者减少),以达到反跟踪被识别的目的。若要研究这些具有动态特性的信息及其应用,则需要建立一个具有动态特性的新的数学模型。在新的具有动态特性的数学模型出现之前,人们习惯利用具有静态特性的数学模型研究这些具有动态特性的信息,但这是不合理的,因为模型的特征与信息的特征不匹配(matching)。鉴于此,文献[1-2]提出P-集合(packet sets),给出P-集合的结构。P-集合在一类动态信息系统与一类动态信息应用研究中得到了广泛应用[1-13]。

P-集合将动态特性引入到有限普通集合 X 内(cantor set X),改进了有限普通集合 X。P-集合是由内P-集合 $X^{\overline{F}}$(internal packet set $X^{\overline{F}}$)与外P-集合 X^F(outer packet set X^F)构成的元素集合对,即($X^{\overline{F}}$,X^F)是P-集合。在一定的条件下,P-集合被还原成有限普通集合 X。P-集合具有以下动态特性:给定有限普通集合 X,α 是 X 的属性集合,1)若在 α 内不断地补充属性,α 变成 $\alpha\subseteq\alpha_1^F\subseteq\alpha_2^F\subseteq\cdots\subseteq\alpha_{n-1}^F\subseteq\alpha_n^F$,则集合 X 变成 $X_n^{\overline{F}}\subseteq X_{n-1}^{\overline{F}}\subseteq\cdots\subseteq X_2^{\overline{F}}\subseteq X_1^{\overline{F}}\subseteq X$;2)若在 α 内不断地删除属性,α 变成 $\alpha_n^{\overline{F}}\subseteq\alpha_{n-1}^{\overline{F}}\subseteq\cdots\subseteq\alpha_2^{\overline{F}}\subseteq\alpha_1^{\overline{F}}\subseteq\alpha$,则集合 X 变成 $X\subseteq X_1^F\subseteq X_2^F\subseteq\cdots\subseteq X_{n-1}^F\subseteq X_n^F$;3)若在 α 内不断地补充一些属性,同时也在 α 内不断地删除一些属性,则集合 X 变成若干个集合对($X_1^{\overline{F}}$,X_1^F),($X_2^{\overline{F}}$,X_2^F),…,($X_n^{\overline{F}}$,X_n^F),且 $\forall k,\lambda$,($X_k^{\overline{F}}$,X_λ^F)是P-集合。从1)和2)中得到两个依赖特性:在1)中,若 $X_k^{\overline{F}}\subseteq X_{k-1}^{\overline{F}}$,用 $X_k^{\overline{F}}\Rightarrow X_{k-1}^{\overline{F}}$ 表示,则 $X_k^{\overline{F}}\Rightarrow X_{k-1}^{\overline{F}}$ 被称作 $X_{k-1}^{\overline{F}}$ 单依赖于(dependence) $X_k^{\overline{F}}$。如果把 $X_k^{\overline{F}}$,$X_{k-1}^{\overline{F}}$ 定义成信息 $(x)_k^{\overline{F}}$,$(x)_{k-1}^{\overline{F}}$,即令 $(x)_k^{\overline{F}}=X_k^{\overline{F}}$,$(x)_{k-1}^{\overline{F}}=X_{k-1}^{\overline{F}}$,则利用单依赖"⇒"能够在 $(x)_{k-1}^{\overline{F}}$ 内挖掘出 $(x)_k^{\overline{F}}$;在 $(x)_k^{\overline{F}}$ 没有被挖掘出之

到稿日期:2017-03-22 返修日期:2017-05-16 本文受山东省自然科学基金资助项目(zr2013aq019)资助。
刘纪芹(1968-),女,博士,教授,主要研究方向为粗系统理论与应用、信息识别理论与应用,E-mail:sdfiljq@126.com(通信作者);**张海月**(1993-),女,硕士生,主要研究方向为经济系统分析,E-mail:1283291542@qq.com。

据在空间中有重叠的情况，其与其他无监督降维算法一样，也不能将降维后的不同聚簇类分隔开来。另外，在时间复杂度上，所提算法在计算样本间的最短路径和进行特征分解这两步上所花费的时间比其他算法多，时间复杂度较高。对于如何在考虑密度的情况下通过有监督方法改进 ISOMAP 算法，使之有利于数据分类任务，并且降低算法的时间复杂度，是我们后续继续研究的问题。

参 考 文 献

[1] LEW M S，SEBE N，DJERABA C，et al. Content-based multimedia information retrieval：State of the art and challenges[J]. ACM Transactions on Multimedia Computing，Communications，and Applications (TOMM)，2006，2(1)：1-19.

[2] ZHANG T，TANG Y Y，FANG B，et al. Document Clustering in Correlation Similarity Measure Space[J]. IEEE Transactions on Knowledge & Data Engineering，2012，24(6)：1002-1013.

[3] BAR-JOSEPH Z，GITTER A，SIMON I. Studying and modelling dynamic biological processes using time-series gene expression data[J]. Nature Reviews Genetics，2012，13(8)：552.

[4] DONOHO D L. High-Dimensional Data Analysis：The Curses and Blessings of Dimensionality[C]//Lecture — Math Challenges of Century. 2000：178-183.

[5] ROWEIS S T，SAUL L K. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding[J]. Science，2000，290(5500)：2323-2326.

[6] HÄRDLE W K，HLÁVKA Z. Principal Component Analysis [J]. IEEE Trans on Automatic Control，2015，29(1)：163-183.

[7] AMARI S I，CICHOCKI A. A new learning algorithm for blind source separation[C]//Advances in Neural Information Processing Systems. 1996：757-763.

[8] MARTINEZ A M，KAK A C. PCA versus LDA[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence，2001，23(2)：228-233.

[9] COX M AA，COX T F. Multidimensional Scaling[J]. Journal of the Royal Statistical Society，2008，46(2)：1050-1057.

[10] TENENBAUM J B，SILVA V D，LANGFORD J C. A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction [J]. Science，2000，290(5500)：2319-2323.

[11] YANG J，FRANGI A F，YANG J，et al. KPCA plus LDA：a complete kernel Fisher discriminant framework for feature extraction and recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence，2005，27(2)：230-244.

[12] YU J，KIM S B. Density-based geodesic distance for identifying the noisy and nonlinear clusters[J]. Information Sciences，2016，360：231-243.

[13] RODRIGUEZ A，LAIO A. Clustering by fast search and find of density peaks[J]. Science，2014，344(6191)：1492-1496.

[14] GENG X，ZHAN D C，ZHOU Z H. Supervised nonlinear dimensionality reduction for visualization and classification[J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part B Cybernetics，2005，35(6)：1098-1107.

[15] ZHANG Z，CHOW T W S，ZHAO M. M-Isomap：Orthogonal constrained marginal isomap for nonlinear dimensionality reduction[J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2013，43(1)：180-191.

[16] YANG B，XIANG M，ZHANG Y. Multi-manifold Discriminant Isomap for visualization and classification[J]. Pattern Recognition，2016，55：215-230.

[17] HE J R，DING L X，LI Z K，et al. Margin Discriminant Projection for Dimensionality Reduction[J]. Journal of Software，2014，25(4)：826-838. (in Chinese)
何进荣，丁立新，李照奎，等. 基于边界判别投影的数据降维[J]. 软件学报，2014，25(4)：826-838.

[18] BERNSTEIN M，SILVA V D，LANGFORD J C，et al. Graph Approximations to Geodesics on Embedded Manifolds[J]. Stanford University，2001，24(9)：153-158.

[19] MAIER M，LUXBURG U V，HEIN M. Influence of graph construction on graph-based clustering[C]//Conference on Neural Information Processing Systems. Vancouver，British Columbia，Canada，DBLP，2008：1025-1032.

[20] FU Y，MA Y. Graph Embedding for Pattern Analysis[M]. New York：Springer，2013.

[21] LEE J S，OLAFSSON S. Data clustering by minimizing disconnectivity[J]. Information Sciences，2011，181(4)：732-746.

(上接第 206 页)

[12] ZHANG L，REN X F，SHI K Q. Intelligent switch-camouflage of information laws and P-law augmented matrices [J]. Journal of Shandong University(Natural Science)，2016，51(8)：90-97. (in Chinese)
张凌，任雪芳，史开泉. 信息规律智能变换-伪装与 P-规律增广矩阵[J]. 山东大学学报(理学版)，2016，51(8)：90-97.

[13] LU Y，LI B Y，SHI K Q. Intelligent mining for P-information with expanded characteristic of disjunctive attribute [J]. Computer Science，2015，42(1)：215-219. (in Chinese)
路英，李备友，史开泉. 具有属性析取扩展特征的内逆 P-信息智能挖掘[J]. 计算机科学，2015，42(1)：215-219.

[14] SHI K Q，YAO B X. Function S-rough sets and law identification [J]. Science in China F：Information Science，2008，51(5)：499-510.

[15] PAL S K，MEHER S K，DUTTA S. Class-dependent rough-fuzzy granular space，dispersion index and classification[J]. Pattern Recognition，2011，45(7)：2690-2707.

[16] ANDRZEJ S，JAROSLAW S，ROMAN S. Modeling rough granular computing based on approximation space [J]. Information Science，2011，184(1)：20-43.

[17] WITOLD P，BARBARA R，GIANCARLO S. Knowledge transfer in system modeling and its realization through an optimal allocation of information granularity [J]. Applied Soft Computing，2012，12(8)：1985-1995.

[18] 张文修，姚一豫，梁怡. 粗糙集与概念格[M]. 西安：西安交通大学出版社，2006.

前，$(x)_k^{\bar{F}}$ 不被人们事先知晓，$(x)_k^{\bar{F}}$ 被隐藏在 $(x)_{k-1}^{\bar{F}}$ 内，即 $(x)_k^{\bar{F}} \subseteq (x)_{k-1}^{\bar{F}}$。在 2)中，若 $X_k^F \subseteq X_{k+1}^F$，用 $X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F$ 表示，则 $X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F$ 被称作 X_{k+1}^F 单依赖于 X_k^F。如果把 X_k^F，X_{k+1}^F 定义成信息 $(x)_k^F$，$(x)_{k+1}^F$，即令 $(x)_k^F = X_k^F$，$(x)_{k+1}^F = X_{k+1}^F$，则利用单依赖"⇒"能够在 $(x)_k^F$ 外挖掘出 $(x)_{k+1}^F$；在 $(x)_{k+1}^F$ 没有从 $(x)_k^F$ 外被挖掘出之前，$(x)_{k+1}^F$ 不被人们事先知晓，$(x)_{k+1}^F$ 被隐藏在 $(x)_k^F$ 外，或者 $(x)_k^F \subseteq (x)_{k+1}^F$。

基于此，需要讨论以下 3 个问题：1)利用单依赖"⇒"从 $(x)_{k-1}^{\bar{F}}$ 内挖掘出 $(x)_k^{\bar{F}}$，或者，利用单依赖"⇒"从 $(x)_k^F$ 外挖掘出 $(x)_{k+1}^F$，需要满足什么样的条件；2) $(x)_i^{\bar{F}}$ 是从 (x) 内利用单依赖挖掘出的信息，或者，$(x)_j^F$ 是从 (x) 外利用单依赖挖掘出的信息，如何对 $(x)_i^{\bar{F}}$，$(x)_j^F$ 进行筛选；3)用什么样的几何方法对信息依赖挖掘给出直观的表示，使人们更容易接受"信息挖掘"的概念。本文利用 P-集合讨论这些问题，并给出信息 P-依赖、信息 P-依赖的属性特征、信息 P-依赖挖掘与挖掘定理、挖掘-筛选原理及其应用。

为了方便讨论，同时又能使读者容易接受与阅读本文给出的研究，把 P-集合与其结构引入到第 2 节作为阅读本文的预备知识与概念准备；P-集合的更多概念、特性与应用详见文献[1-10]。

2　P-集合及其结构

约定：U 是有限元素论域；V 是有限属性论域；$X \subset U$ 是 U 上的有限普通集合；$\alpha \subset V$ 是 V 上的有限属性集合。$F = \{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$，$\bar{F} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_n\}$ 是函数迁移族(属性迁移族)；$f \in F$，$\bar{f} \in \bar{F}$ 是函数迁移(属性迁移)。$f \in F$ 的特征是：对于元素 $u \in U$，$u \overline{\in} X$，$f \in F$ 把 u 变成 $f(u) = x' \in X$；对于属性 $\beta \in V$，$\beta \overline{\in} \alpha$，$f \in F$ 把 β 变成 $f(\beta) = \alpha' \in \alpha$。$\bar{f} \in \bar{F}$ 的特征是：对于元素 $x_i \in X$，$\bar{f} \in \bar{F}$ 把 x_i 变成 $\bar{f}(x_i) = u_i \overline{\in} X$；对于属性 $\alpha_i \in \alpha$，$\bar{f} \in \bar{F}$ 把 α_i 变成 $\bar{f}(\alpha_i) = \beta_i \overline{\in} \alpha$。$f \in F$，$\bar{f} \in \bar{F}$ 是设定的两个变换(或函数)。

文献[1,2]给出如下定义。

给定集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_q\} \subset U$，$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\} \subset V$ 是 X 的属性集合，称 $X^{\bar{F}}$ 是 X 生成的内 P-集合(internal packet set)，简称 $X^{\bar{F}}$ 是内 P-集合，而且：

$$X^{\bar{F}} = X - X^- \tag{1}$$

X^- 称作 X 的 $\bar{F}$-元素删除集合，而且：

$$X^- = \{x_i \mid x_i \in X, \bar{f}(x_i) = u_i \overline{\in} X, \bar{f} \in \bar{F}\} \tag{2}$$

如果 $X^{\bar{F}}$ 的属性集合 α^F 满足：

$$\alpha^F = \alpha \cup \{\alpha_i' \mid \beta_i \in V, \beta_i \overline{\in} \alpha, f(\beta_i) = \alpha_i' \in \alpha, f \in F\} \tag{3}$$

式(1)中，$X^{\bar{F}} \neq \emptyset$，$X^{\bar{F}} = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$，$p < q$，$p, q \in N^+$。

给定集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_q\} \subset U$，$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\} \subset V$ 是 X 的属性集合，称 X^F 是 X 生成的外 P-集合(outer packet set)，简称 X^F 是外 P-集合，而且：

$$X^F = X \cup X^+ \tag{4}$$

X^+ 称作 X 的 F-元素补充集合，而且：

$$X^+ = \{u_i \mid u_i \in U, u_i \overline{\in} X, f(u_i) = x_i' \in X, f \in F\} \tag{5}$$

如果 X^F 的属性集合 $\alpha^{\bar{F}}$ 满足：

$$\alpha^{\bar{F}} = \alpha - \{\beta_i \mid \alpha_i \in \alpha, \bar{f}(\alpha_i) = \beta_i \overline{\in} \alpha, \bar{f} \in \bar{F}\} \tag{6}$$

其中，$\alpha^{\bar{F}} \neq \emptyset$。式(4)中，$X^F = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$，$q < r$，$q, r \in N^+$。

由内 P-集合 $X^{\bar{F}}$ (internal packet set $X^{\bar{F}}$)与外 P-集合 X^F (outer packet set X^F)构成的元素集合对称作 X 生成的 P-集合(packet sets)，简称 P-集合：

$$(X^{\bar{F}}, X^F) \tag{7}$$

有限普通集合 X 称作 P-集合的基集合，即基础集合(ground set)。

利用式(3)得到：

$$\alpha_1^F \subseteq \alpha_2^F \subseteq \cdots \subseteq \alpha_{n-1}^F \subseteq \alpha_n^F \tag{8}$$

再由式(8)得到内 P-集合：

$$X_n^{\bar{F}} \subseteq X_{n-1}^{\bar{F}} \subseteq \cdots \subseteq X_2^{\bar{F}} \subseteq X_1^{\bar{F}} \tag{9}$$

利用(6)得到：

$$\alpha_n^{\bar{F}} \subseteq \alpha_{n-1}^{\bar{F}} \subseteq \cdots \subseteq \alpha_2^{\bar{F}} \subseteq \alpha_1^{\bar{F}} \tag{10}$$

再由式(10)得到外 P-集合：

$$X_1^F \subseteq X_2^F \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1}^F \subseteq X_n^F \tag{11}$$

由式(9)、式(11)得到 P-集合的一般表达式，它是 P-集合的集合对族的形式，而且：

$$\{(X_i^{\bar{F}}, X_j^F) \mid i \in I, j \in J\} \tag{12}$$

其中，I，J 是指标集合(index set)。

利用式(1)－式(12)，容易证明定理 1 和定理 2。

定理 1(P-集合第一还原定理)　若 $F = \bar{F} = \emptyset$，则 P-集合 $(X^{\bar{F}}, X^F)$ 被还原成有限普通集合 X；或者：

$$(X^{\bar{F}}, X^F)_{F=\bar{F}=\emptyset} = X \tag{13}$$

定理 2(P-集合第二还原定理)　若 $F = \bar{F} = \emptyset$，则 P-集合 $\{(X_i^{\bar{F}}, X_j^F) \mid i \in I, j \in J\}$ 被还原成有限普通集合 X；或者：

$$\{(X_i^{\bar{F}}, X_j^F) \mid i \in I, j \in J\}_{F=\bar{F}=\emptyset} = X \tag{14}$$

应注意：式(3)、式(4)与计算机存储器 $T = T + 1$ 的结构相似。例如，在式(3)中，给定 $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，若 $\{\alpha_i' \mid \beta_i \in V, \beta_i \overline{\in} \alpha, f(\beta_i) = \alpha_i' \in \alpha, f \in F\} = \{\alpha_1'\}$，则式(3)：$\alpha_1^F = \alpha \cup \{\alpha_i' \mid \beta_i \in V, \beta_i \overline{\in} \alpha, f(\beta_i) = \alpha_i' \in \alpha, f \in F\} = \{\alpha_1, \alpha_2\} \cup \{\alpha_1'\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1'\}$；若 $\{\alpha_i' \mid \beta_i \in V, \beta_i \overline{\in} \alpha, f(\beta_i) = \alpha_i' \in \alpha, f \in F\} = \{\alpha_2', \alpha_3'\}$，则式(3)：$\alpha_2^F = \alpha_1^F \cup \{\alpha_i' \mid \beta_i \in V, \beta_i \overline{\in} \alpha, f(\beta_i) = \alpha_i' \in \alpha, f \in F\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1'\} \cup \{\alpha_2', \alpha_3'\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\}$，等。

事实上，式(9)中的 $X_k^{\bar{F}} \subseteq X_{k-1}^{\bar{F}}$ 与 $X_k^{\bar{F}} \Rightarrow X_{k-1}^{\bar{F}}$ 等价；式(11)中的 $X_k^F \subseteq X_{k+1}^F$ 与 $X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F$ 等价。在数理逻辑中，$X_k^{\bar{F}} \Rightarrow X_{k-1}^{\bar{F}}$ 被定义成 $X_{k-1}^{\bar{F}}$ 单依赖于 $X_k^{\bar{F}}$；$X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F$ 被定义成 X_{k+1}^F 单依赖于 X_k^F。显然，利用单依赖于"⇒"，可以在 $X_{k-1}^{\bar{F}}$ 内找到 $X_k^{\bar{F}}$，在 X_k^F 外找到 X_{k+1}^F。

3　信息的 P-依赖及其属性特征

约定：在第 3－第 5 节的讨论中，第 2 节中的 X，$X^{\bar{F}}$，X^F 分别用 (x)，$(x)^{\bar{F}}$，$(x)^F$ 表示，即 $(x) = X$，$(x)^{\bar{F}} = X^{\bar{F}}$，$(x)^F = X^F$；$(x)$，$(x)^{\bar{F}}$，$(x)^F$ 分别称作信息、内 P-信息、外 P-信息。

$\forall x_i \in (x)$(或者,$\forall x_j \in (x)^{\bar{F}}$;或者,$\forall x_k \in (x)^F$)称作$(x)$的一个信息元(或者,称作$(x)^{\bar{F}}$的一个信息元;或者,称作$(x)^F$的一个信息元);$(X^{\bar{F}}, X^F)$记作$((x)^{\bar{F}}, (x)^F)$,即$((x)^{\bar{F}}, (x)^F) = (X^{\bar{F}}, X^F)$,$((x)^{\bar{F}}, (x)^F)$称作 P-信息。

定义 1 称$(x)_k^{\bar{F}}$内 P-单依赖于$(x)_{k+1}^{\bar{F}}$,$(x)_{k+1}^F$外 P-单依赖于$(x)_k^F$,分别记作:

$$(x)_{k+1}^{\bar{F}} \Rightarrow (x)_k^{\bar{F}} \tag{15}$$

$$(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k+1}^F \tag{16}$$

定义 2 称$(x)_k^{\bar{F}}$内 P-双依赖于$(x)_{k+1}^{\bar{F}}$,$(x)_{k+1}^F$外 P-双依赖于$(x)_k^F$,分别记作:

$$(x)_{k+1}^{\bar{F}} \Leftrightarrow (x)_k^{\bar{F}} \tag{17}$$

$$(x)_k^F \Leftrightarrow (x)_{k+1}^F \tag{18}$$

定义 3 称$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F)$P-单依赖于$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F)$,记作:

$$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F) \Rightarrow ((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F) \tag{19}$$

定义 4 称$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F)$P-双依赖于$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F)$,记作:

$$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F) \Leftrightarrow ((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F) \tag{20}$$

式(15)—式(20)中,"$\Rightarrow$"与"$\subseteq$"等价,"$\Leftrightarrow$"与"$=$"等价;式(19)表示:$(x)_{k+1}^{\bar{F}} \Rightarrow (x)_k^{\bar{F}}$与$(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k+1}^F$;式(20)表示:$(x)_{k+1}^{\bar{F}} \Leftrightarrow (x)_k^{\bar{F}}$与$(x)_k^F \Leftrightarrow (x)_{k+1}^F$,$k=1,2,\cdots,n-1$。

由式(15)—式(20)得到以下定理。

定理 3(内 P-单依赖属性定理) 若$(x)_k^{\bar{F}}$与$(x)_{k+1}^{\bar{F}}$满足:

$$(x)_{k+1}^{\bar{F}} \Rightarrow (x)_k^{\bar{F}} \tag{21}$$

则存在$\Delta\alpha_k \neq \emptyset$,$\alpha_{k+1}^F = \alpha_k^F \cup \Delta\alpha_k$;$\alpha_{k+1}^F$内 P-单依赖于$\alpha_k^F$;或者:

$$\alpha_k^F \Rightarrow \alpha_{k+1}^F \tag{22}$$

其中,α_k^F,α_{k+1}^F分别是$(x)_k^{\bar{F}}$,$(x)_{k+1}^{\bar{F}}$的属性集合。

证明:根据式(1)—式(3)可得:$(x)_k^{\bar{F}}$的属性集合α_k^F与$(x)_{k+1}^{\bar{F}}$的属性集合α_{k+1}^F满足$\alpha_k^F \subseteq \alpha_{k+1}^F$,显然,存在$\Delta\alpha_k \neq \emptyset$,$\alpha_{k+1}^F = \alpha_k^F \cup \Delta\alpha_k$。因为$\alpha_k^F \subseteq \alpha_{k+1}^F$,利用定义 1,$\alpha_k^F$与$\alpha_{k+1}^F$满足$\alpha_k^F \Rightarrow \alpha_{k+1}^F$,于是可得式(22)。

定理 4(外 P-单依赖属性定理) 若$(x)_k^F$与$(x)_{k+1}^F$满足:

$$(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k+1}^F \tag{23}$$

则存在$\nabla\alpha_k \neq \emptyset$,$\alpha_{k+1}^{\bar{F}} = \alpha_k^{\bar{F}} - \nabla\alpha_k$;$\alpha_k^{\bar{F}}$外 P-单依赖于$\alpha_{k+1}^{\bar{F}}$;或者:

$$\alpha_{k+1}^{\bar{F}} \Rightarrow \alpha_k^{\bar{F}} \tag{24}$$

其中,$\alpha_k^{\bar{F}}$,$\alpha_{k+1}^{\bar{F}}$分别是$(x)_k^F$,$(x)_{k+1}^F$的属性集合。

证明与定理 3 类似,略。

由定理 3 和定理 4 可直接得到定理 5。

定理 5(P-单依赖属性定理) 若$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F)$与$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F)$满足:

$$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F) \Rightarrow ((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F) \tag{25}$$

则存在$\Delta\alpha_k \neq \emptyset$,$\nabla\alpha_k \neq \emptyset$,$\alpha_{k+1}^F = \alpha_k^F \cup \Delta\alpha_k$,$\alpha_{k+1}^{\bar{F}} = \alpha_k^{\bar{F}} - \nabla\alpha_k$;$(\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^{\bar{F}})$P-单依赖于$(\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^{\bar{F}})$;或者:

$$(\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^{\bar{F}}) \Rightarrow (\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^{\bar{F}}) \tag{26}$$

其中,$(\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^{\bar{F}})$是$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F)$的属性集合,$(\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^{\bar{F}})$是$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F)$的属性集合;式(26)表示:$\alpha_k^F \Rightarrow \alpha_{k+1}^F$,$\alpha_{k+1}^{\bar{F}} \Rightarrow \alpha_k^{\bar{F}}$。

推论 1 若$(x)_k^{\bar{F}}$与$(x)_{k+1}^{\bar{F}}$满足$(x)_k^{\bar{F}} \Leftrightarrow (x)_{k+1}^{\bar{F}}$,则$(x)_{k+1}^{\bar{F}}$的属性集合$\alpha_{k+1}^F$与$(x)_k^{\bar{F}}$的属性集合$\alpha_k^F$满足$UNI(\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^F)$。

推论 2 若$(x)_k^F$与$(x)_{k+1}^F$满足$(x)_k^F \Leftrightarrow (x)_{k+1}^F$,则$(x)_{k+1}^F$的属性集合$\alpha_{k+1}^{\bar{F}}$与$(x)_k^F$的属性集合$\alpha_k^{\bar{F}}$满足$UNI(\alpha_{k+1}^{\bar{F}}, \alpha_k^{\bar{F}})$。

推论 3 若$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F)$与$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F)$满足$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F) \Leftrightarrow ((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F)$,则$((x)_{k+1}^{\bar{F}}, (x)_k^F)$的属性集合$(\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^{\bar{F}})$与$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_{k+1}^F)$的属性集合$(\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^{\bar{F}})$满足$UNI((\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^{\bar{F}}), (\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^{\bar{F}}))$。

$UNI((\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^{\bar{F}}), (\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^{\bar{F}}))$表示:$UNI(\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^F)$,$UNI(\alpha_{k+1}^{\bar{F}}, \alpha_k^{\bar{F}})$;$UNI$即 unidentification。

4 信息的 P-依赖挖掘与挖掘定理

定义 5 称$(x)_k^{\bar{F}}$是(x)的一个内 P-依赖挖掘信息,如果$(x)_k^{\bar{F}} \Rightarrow (x)$,简称$(x)_k^{\bar{F}}$是内 P-挖掘信息。称$\eta_k^{\bar{F}}$是$(x)_k^{\bar{F}}$关于$(x)$的内 P-挖掘系数,而且:

$$\eta_k^{\bar{F}} = card((x)_k^{\bar{F}})/card((x)) \tag{27}$$

定义 6 称$(x)_\lambda^F$是(x)的一个外 P-依赖挖掘信息,如果$(x) \Rightarrow (x)_\lambda^F$,简称$(x)_\lambda^F$是外 P-挖掘信息。称$\eta_\lambda^F$是$(x)_\lambda^F$关于$(x)$的外 P-挖掘系数,而且:

$$\eta_\lambda^F = card((x)_\lambda^F)/card((x)) \tag{28}$$

定义 7 称$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_\lambda^F)$是$(x)$的一个 P-依赖挖掘信息,如果$(x)_k^{\bar{F}} \Rightarrow (x)$,$(x) \Rightarrow (x)_\lambda^F$,简称$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_\lambda^F)$是 P-挖掘信息。称:

$$(\eta_k^{\bar{F}}, \eta_\lambda^F) \tag{29}$$

是$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_\lambda^F)$关于$(x)$的 P-挖掘系数。

$card$即 cardinal number。$\eta_k^{\bar{F}}$,η_λ^F分别是内 P-挖掘系数和外 P-挖掘系数。

显然,给定信息(x),(x)的自身挖掘系数$\eta = card((x))/card((x)) = 1$。

图 1 给出了内 P-挖掘信息$(x)_k^{\bar{F}}$、外 P-挖掘信息$(x)_\lambda^F$、P-挖掘信息$((x)_k^{\bar{F}}, (x)_\lambda^F)$的几何图形的直观解释。

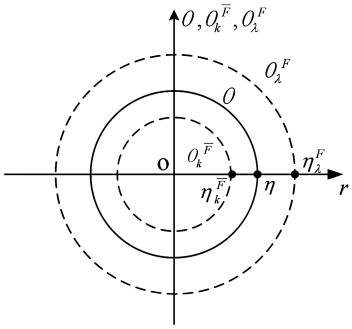

图 1 内 P、外 P、P-挖掘信息的几何图形表示

Fig. 1 Geometric figure of internal P, outer P and P-mining information

图 1 中，O 是信息(x)生成的信息单位圆，用实线表示。坐标原点 O 和 $\eta=1=card((x))/card((x))$分别是 O 的圆心与半径。$O_k^{\bar{F}}$ 是内 P-挖掘信息$(x)_k^{\bar{F}}$ 生成的一个内-同心圆，坐标原点 O 和 $\eta_k^{\bar{F}}=card((x)_k^{\bar{F}})/card((x))$分别是 $O_k^{\bar{F}}$ 的圆心与半径。O_λ^F 是外 P-挖掘信息$(x)_\lambda^F$ 生成的一个外-同心圆，坐标原点 O 和 $\eta_\lambda^F=card((x)_\lambda^F)/card((x))$分别是 O_λ^F 的圆心与半径。$O_k^{\bar{F}}$，O_λ^F 用虚线表示，$O_k^{\bar{F}}$-O_λ^F 是 P-信息环。

利用定义 5－定义 7 以及图 1，可以直接得到如下结论。

定理 6（内 P-依赖挖掘的内-同心圆定理）　$(x)_k^{\bar{F}}$ 是(x)的内 P-挖掘信息的充分必要条件是$(x)_k^{\bar{F}}$ 的内 P-挖掘系数 $\eta_k^{\bar{F}}$ 与坐标原点 O 生成一个信息单位圆 O 的一个内-同心圆 $O_k^{\bar{F}}$，而且：

$$O_k^{\bar{F}}\subset O \tag{30}$$

其中，$\subset$表示 $O_k^{\bar{F}}$ 被 O 包围，$O_k^{\bar{F}}$ 与 O 具有同一个圆心 O。

推论 4　内 P-挖掘信息$(x)_k^{\bar{F}}$ 在信息(x)内被找到。

定理 7（外 P-依赖挖掘的外-同心圆定理）　$(x)_\lambda^F$ 是(x)的外 P-挖掘信息的充分必要条件是$(x)_\lambda^F$ 的外 P-挖掘系数 η_λ^F 与坐标原点 O 生成一个信息单位圆 O 的一个外-同心圆 O_λ^F，而且：

$$O\subset O_\lambda^F \tag{31}$$

其中，$\subset$表示 O 被 O_λ^F 包围，O_λ^F 与 O 具有同一个圆心 O。

推论 5　外 P-挖掘信息$(x)_\lambda^F$ 在信息(x)外被找到。

定理 8（P-依赖挖掘的信息环定理）　$((x)_k^{\bar{F}},(x)_\lambda^F)$是$(x)$的 P-挖掘信息的充分必要条件是$((x)_k^{\bar{F}},(x)_\lambda^F)$生成一个信息环 $O_k^{\bar{F}}$-O_λ^F，$O_k^{\bar{F}}$-O_λ^F 与信息单位圆 O 满足：

$$O\subset O_k^{\bar{F}}\text{-}O_\lambda^F \tag{32}$$

其中，$\subset$表示 O 被包围在 $O_k^{\bar{F}}$-O_λ^F 内。

推论 6　P-挖掘信息$((x)_k^{\bar{F}},(x)_\lambda^F)$在信息$(x)$内与$(x)$外同时被找到。

利用定理 5－定理 7 可以得到信息依赖挖掘的直观解释：1)在已知信息(x)内被挖掘出多个内 P-依赖挖掘信息$(x)_k^{\bar{F}}$，这些$(x)_k^{\bar{F}}$ 都分布在信息单位圆 O 内，$(x)_k^{\bar{F}}$ 中的每一个$(x)_i^{\bar{F}}$ 生成一个内-同心圆 $O_i^{\bar{F}}$；2)在已知信息(x)外挖掘出多个外 P-依赖挖掘信息$(x)_\lambda^F$，这些$(x)_\lambda^F$ 都分布在信息单位圆 O 外，$(x)_\lambda^F$ 中的每一个$(x)_j^F$ 生成一个外-同心圆 O_j^F；3)在已知信息(x)的内-外挖掘出多个 P-依赖挖掘信息$((x)_k^{\bar{F}},(x)_\lambda^F)$，这些$((x)_k^{\bar{F}},(x)_\lambda^F)$都分布在信息单位圆 O 内与外，$((x)_k^{\bar{F}},(x)_\lambda^F)$中的每一个$((x)_i^{\bar{F}},(x)_j^F)$生成一个信息环 $O_i^{\bar{F}}$-O_j^F。

上述解释使人们更容易认识到信息依赖挖掘的特征，更直接地理解信息依赖挖掘的意义。

根据第 4 节的讨论，容易得到：在(x)的内-外能够挖掘出多个 P-依赖挖掘信息$((x)_k^{\bar{F}},(x)_\lambda^F)$，$k,\lambda\in\{1,2,\cdots,n\}$。因为$(x)_i^{\bar{F}}$，$(x)_j^F$ 具有颗粒特征[14-17]，第 5 节将讨论利用什么样的准则或原理，把$(x)_i^{\bar{F}}$，$(x)_j^F$ 从$((x)_k^{\bar{F}},(x)_\lambda^F)$中筛选出来。

5　依赖挖掘-筛选原理与信息的 P-依赖挖掘的应用

5.1　依赖挖掘-筛选原理

Θ 是一个具有以挖掘系数 η 为筛子孔尺寸的筛子，P-依赖挖掘信息$((x)_k^{\bar{F}},(x)_\lambda^F)$中的$(x)_i^{\bar{F}}$ 被 Θ 过滤-筛选在 Θ 之外，$(x)_j^F$ 被 Θ 过滤-筛选留在 Θ 之内。

5.2　信息 P-依赖挖掘准则

内 P-依赖挖掘得到信息$(x)_k^{\bar{F}}$，$(x)_k^{\bar{F}}$ 的颗粒小于(x)的颗粒；外 P-依赖挖掘得到信息$(x)_\lambda^F$，$(x)_\lambda^F$ 的颗粒大于(x)的颗粒。

利用信息 P-依赖挖掘准则以及式(8)－式(11)直接得到命题 1－命题 4。

命题 1　依赖挖掘-筛选在 Θ 之外的内 P-依赖挖掘信息$(x)_i^{\bar{F}}$，它的颗粒 $GRD((x)_i^{\bar{F}})$满足序列：

$$GRD((x)_n^{\bar{F}})\leqslant GRD((x)_{n-1}^{\bar{F}})\leqslant\cdots\leqslant GRD((x)_2^{\bar{F}})\leqslant GRD((x)_1^{\bar{F}}) \tag{33}$$

命题 2　依赖挖掘-筛选在 Θ 之内的外 P-依赖挖掘信息$(x)_j^F$，它的颗粒 $GRD((x)_j^F)$满足序列：

$$GRD((x)_1^F)\leqslant GRD((x)_2^F)\leqslant\cdots\leqslant GRD((x)_{n-1}^F)\leqslant GRD((x)_n^F) \tag{34}$$

其中，GRD 即 granulation degree，$GRD((x)_i^{\bar{F}})=card((x)_i^{\bar{F}})/card((x))$，$GRD((x)_j^F)=card((x)_j^F)/card((x))$。

命题 3　满足 $GRD((x)_p^{\bar{F}})=\min\limits_{i=1}^{n}(GRD((x)_i^{\bar{F}}))$的$(x)_p^{\bar{F}}$ 的属性集合 α_p^F 为：

$$\alpha_p^F=\bigcup_{i=1}^{n}\alpha_i^F \tag{35}$$

命题 4　满足 $GRD((x)_q^F)=\max\limits_{j=1}^{n}(GRD((x)_j^F))$的$(x)_q^F$ 的属性集合 $\alpha_q^{\bar{F}}$ 为：

$$\alpha_q^{\bar{F}}=\bigcap_{j=1}^{n}\alpha_j^{\bar{F}} \tag{36}$$

5.3　信息的 P-依赖挖掘的应用

为表述简单又不失一般性，本节只给出信息的内 P-依赖挖掘的应用。案例取自一个盗窃案件的侦查与案件的主要罪犯的寻找-发现。2009 年 5 月 21 日在中国 A 市的珠宝商店 M 内发生了珠宝商品被盗案件，被盗的商品价值为 60.32 万美元。罪犯伪装面貌进行盗窃，以逃避他人与电子监视的识别。案例遵守案件的保密要求，城市用名称 A 表示，罪犯用 x_i 表示，案件的证据(属性)用 α_j 表示。

1)警察在案件的现场获得部分证据(案件属性)：α_1＝指纹，α_2＝足迹，α_3＝罪犯的体态特征与行走特征(从电子监视中获取)。利用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 得到案件的初始结论：罪犯是 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$；$x_1-x_7$ 用信息(x)表示；α 是 x_1-x_7 的证据(属性)集合：

$$(x)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\} \tag{37}$$

$$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \tag{38}$$

2)警察对 x_1-x_7 分别进行调查、问讯，x_1,x_3,x_5,x_7 提供了相同的证词：x_1,x_3,x_5,x_7 被雇佣运送盗窃的商品。则有证据(属性)：α_4'＝运送盗窃的商品；证据集合 α(属性集合 α)被补充属性，得到：

$$\alpha_1^F=\alpha\cup\{\alpha_4'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4'\} \tag{39}$$

信息(x)变成$(x)_1^{\bar{F}}$：

$$(x)_1^{\bar{F}}=(x)-\{x_1,x_3,x_5,x_7\}=\{x_2,x_4,x_6\} \tag{40}$$

显然，(x)与$(x)_1^{\bar{F}}$ 满足内 P-单依赖；或者，$(x)_1^{\bar{F}}\Rightarrow(x)$。$(x)_1^{\bar{F}}$ 从(x)内被筛选得到，$(x)_1^{\bar{F}}$ 具有证据集合(属性集合)α_1^F。利用依赖挖掘-筛选原理得到：$(x)_1^{\bar{F}}$ 被筛选出 Θ 之外，因为 $GRD((x)_1^{\bar{F}})<GRD((x))$；$(x)_1^{\bar{F}}$ 的内 P-挖掘系数 $\eta_1^{\bar{F}}=card((x)_1^{\bar{F}})/card((x))=0.43<1$，$(x)_1^{\bar{F}}$ 生成一个内-同心圆 $O_1^{\bar{F}}$。

3)警察对 x_2,x_4,x_6 分别进行调查、问讯，x_2,x_6 给出相同证词：x_4 组织、策划了盗窃案件。警察调查案件的见证者 y，y 给出与 x_2,x_6 相同的证词，得到：α_5'＝组织、策划盗窃。警察对 x_4 再进行调查、问讯；x_4 对 $\alpha_1-\alpha_3,\alpha_4',\alpha_5'$给予承认，则得到证据集合 α_2^F(属性集合 α_1^F 被补充属性)，即

$$\alpha_2^F=\alpha_1^F\cup\{\alpha_5'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4',\alpha_5\} \tag{41}$$

信息$(x)_1^{\bar{F}}$ 变成$(x)_2^{\bar{F}}$：

$$(x)_2^{\bar{F}}=(x)_1^{\bar{F}}-\{x_2,x_6\}=\{x_4\} \tag{42}$$

显然，$(x)_1^{\bar{F}}$ 与$(x)_2^{\bar{F}}$ 满足：$(x)_2^{\bar{F}}\Rightarrow(x)_1^{\bar{F}}$，$(x)_2^{\bar{F}}$ 从$(x)_1^{\bar{F}}$内被筛选-发现，或者 x_4 从(x)内被挖掘发现；$(x)_2^{\bar{F}}$ 具有证据集合(属性集合)α_2^F。

4)案件侦查-调查结论：x_1,x_3,x_5,x_7 没有违反中国法律；x_1,x_3,x_5,x_7 被无罪释放；x_2,x_4,x_6 已触犯了中国法律，分别受到不同的法律制裁。x_2,x_6 是主要罪犯 x_4 的支持者及盗窃商品的合作者。

结束语 人们熟悉的有限普通集合 X(Cantor set X)具有静态特性，即 X 内的因素 x_i 不允许发生变化；或者，X 内的因素 x_i 不允许离开 X，X 之外的元素 y_j 不允许进入 X 内。如果把 X 定义成信息(x)，则(x)具有静态特性，这个认识已成为人们的习惯。事实上，一些集合具有动态特性，而动态特性却未引起人们的重视。如果把具有动态特性的集合 X 定义成信息(x)，则信息(x)具有动态特性。

为了对具有动态特性的信息(x)进行研究，以认识动态信息的特征与应用，文献[1-2]把动态特性引入到有限普通集合 X 内，改进了有限普通集合 X 并提出了 P-集合，P-集合就是在这样的应用背景下产生的。P-集合是一个具有动态特征的新的数学模型，P-集合在动态信息理论与应用研究中得到了广泛应用[1-13]。

本文利用 P-集合，给出信息 P-依赖的概念、信息 P-依赖挖掘-筛选、信息 P-依赖的特征及信息 P-依赖在信息依赖挖掘中的应用，最后给出了简单的应用案例。信息 P-依赖是 P-集合具有的重要应用特征之一，P-集合能够对动态信息的应用研究给予帮助。

特别说明：1)粗糙集是把近似特征引入 Cantor set 内，通过改进 Cantor set 而得到的一个新的数学结构与数学概念，并在近似分析等多个领域获得了应用。2)在概念格理论中，用形式背景(U,A,I)表示所要分析的数据，其中 U 为对象集(外延)，A 为属性集(内涵)，I 为 U 和 A 之间的二元关系，进而可以从形式背景中提取出不同层次的概念及概念之间的关系。概念格的形式概念分析方法将概念的内涵和外延作为一对相互对应的对象进行研究，并形成概念格[18]，概念格在知识发现领域具有重要应用。粗糙集和概念格都是与 Cantor set(静态集)相关的概念，在粗糙集和概念格中找不到动态特征的影子，但是在应用数学中具有动态特征的问题很多，粗糙集和概念格不能解决动态应用问题。在这样的背景下，P-集合被提出，式(1)－式(12)已给出了它的动态特征。因此，粗糙集、概念格与 P-集合是不相关的 3 个数学概念，P-集合将成为独立的数学分支。

参 考 文 献

[1] SHI K Q. P-sets [J]. Journal of Shandong University(Natural Science),2008,43(11):77-84.(in Chinese)
史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报(理学版),2008,43(11):78-84.

[2] SHI K Q. P-sets and its applications[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications,2009,9(2):209-219.

[3] SHI K Q,LI X H. Camouflaged information identification and its application [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications,2010,10(2):157-167.

[4] SHI K Q. Function P-sets [J]. Journal of Shandong University (Natural Science),2011,46(2):62-69.(in Chinese)
史开泉. 函数 P-集合[J]. 山东大学学报(理学版),2011,46(2):62-69.

[5] SHI K Q. Function P-sets [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2011,2(4):281-288.

[6] SHI K Q. P-sets and its applied characteristics [J]. Computer Science,2010,37(8):1-8.(in Chinese)
史开泉. P-集合与它的应用特征[J]. 计算机科学,2010,37(8):1-8.

[7] SHI K Q. P-reasoning and P-reasoning discovery-identification of information [J]. Computer Science,2011,38(7):1-9.(in Chinese)
史开泉. P-推理与信息的 P-推理发现辨识 [J]. 计算机科学,2011,38(7):1-9.

[8] SHI K Q. P-sets,inverse P-sets and the intelligent fusion-filter identification of information [J]. Computer Science,2012,39(4):1-13.(in Chinese)
史开泉. P-集合,逆 P-集合与信息智能融合-过滤辨识 [J]. 计算机科学,2012,39(4):1-13.

[9] FAN C X,LIN H K. P-sets and the reasoning identification of disaster information [J]. Journal of Convergence Information Technology,2012,7(1):337-345.

[10] XIE W Q,XUE Y X. The attribute law of hierarchical packet sets [J]. Mathematics in Practice and Theory,2016,46(11):280-286.(in Chinese)
谢维奇,薛永献. 层次 P-集合的属性规律发现[J]. 数学的实践与认识,2016,46(11):280-286.

[11] SHI K Q. P-augmented matrix and dynamic intelligent discovery-identification of information [J]. Journal of Shandong University (Natural Science),2015,50(10):1-12.(in Chinese)
史开泉. P-增广矩阵与信息的智能动态发现-辨识[J]. 山东大学学报(理学版),2015,50(10):1-12.

(下转第 213 页)