

基于 Stackelberg 与边拉普拉斯矩阵的多智能体系统



张 杰¹ 岳韶华² 王 刚² 刘家义¹ 姚小强²

1 空军工程大学研究生学院 西安 710054

2 空军工程大学防空反导学院 西安 710054

(afeu_zhangjie@163.com)

摘 要 针对分布式环境下多智能体系统的交互模型存在效率低、局部冲突消解困难、缺少实际应用场景等问题,基于 Stackelberg 博弈设计了多主多从的交互模型,并将其应用于指挥控制流程中指控方与参与方之间的交互博弈问题。首先通过对 Stackelberg 博弈模型的优化与多属性决策,设计出多主多从 Stackelberg 博弈的多智能体系统,并利用半正定的二次型性能指标的最优化正则性,引入一个正则 Riccati 方程来对 Stackelberg 博弈下的闭环解问题进行求解;然后基于图论相关知识建立基于边拉普拉斯矩阵的多智能体系统模型以降低复杂问题的求解难度;最后经过数值推导仿真与实验分析,从多个角度验证了模型的高效性与强鲁棒性,证明了所提模型的真实性与高效性。

关键词: 分布式;多主多从;Stackelberg 博弈;闭环解;边拉普拉斯矩阵

中图法分类号 TP301.6

Multi-agent System Based on Stackelberg and Edge Laplace Matrix

ZHANG Jie¹, YUE Shao-hua², WANG Gang², LIU Jia-yi¹ and YAO Xiao-qiang²

1 Graduate School, Air Force Engineering University, Xi'an 710054, China

2 School of Air-Defense and Anti-Missile, Air Force Engineering University, Xi'an 710054, China

Abstract Aiming at the problems of low efficiency, local conflict resolution and lack of practical application scenarios in the interaction model of multi-agent system in the distributed environment, this paper designs a multi-agent multi-slave interaction model based on Stackelberg game, which is applied to the interaction game between the controller and the participants in the command and control process. Firstly, through the optimization of Stackelberg game model and the multi-agent system of Stackelberg game of multiple leaders-follwers designed by multi-attribute decision-making, the closed-loop solution problem of Stackelberg game is solved by introducing a regular Riccati equation, which uses the optimization regularity of semi positive quadratic performance index. Then, based on graph theory, a multi-agent system model based on edge Laplace matrix is established to reduce the difficulty of solving complex problems. At last, numerical simulation and experimental analysis verify the efficiency and strong robustness of the model from many aspects. Moreover, it also proves that the proposed model is true and efficient.

Keywords Distributed, Multi-master and multi-slave, Stackelberg game, Closed-loop solution, Edge Laplace matrix

1 引言

随着网络信息技术的快速发展,智能指挥控制被广泛应用于军事、网络、生物等领域以实现智能管控,其在信息任务管理、命令控制方面具有高度的灵敏性和精确度^[1]。本文针对多智能体系统内部的博弈策略进行讨论研究,提出一种多主多从 Stackelberg 博弈模型^[2]。以作战指挥过程中的两类主要角色作为研究对象,一种是指控方,即领导者,负责作战过程的指挥控制;另一方是参与方,即追随者,负责执行指控

方生成的决策方案。针对上述两种博弈角色,本文就其博弈关系构建交互模型,然后基于 Stackelberg 博弈的优化模型与多属性决策讨论在分布式协同环境下指控方与参与方如何进行交互^[3]。当前领导-追随架构的多智能体模型尚存在闭环解无法解释的情况,因此本文将首先从数学推导的角度论证闭环解的存在并对闭环解^[4]进行求解,然后以数值仿真证明闭环解的可靠性和合理性,建立多智能体系统建模的智能体交互博弈模型。

针对单个智能体个体能力有限的问题,可以通过个体之

到稿日期:2020-07-06 返修日期:2020-08-11 本文已加入开放科学计划(OSID),请扫描上方二维码获取补充信息。

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金(61703412);中国博士后科学基金(2016M602996);国家自然科学基金(61503407,61806219,61703426,61876189)

This work was supported by the Science Fund for Young Scholars of the National Natural Science Foundation of China(61703412), China Post-doctoral Science Foundation(2016M602996) and National Natural Science Foundation of China(61503407,61806219,61703426,61876189).

通信作者:岳韶华(zhouguoan@sina.cn)

间的相互协作来增强其处理复杂任务的能力,因此多智能体系统在处理复杂任务方面更具优势^[5]。首先,多智能体系统对战场态势感知能力强于单智能体,可以获取全局态势信息,具有并行感知和并行指控决策的能力;其次,协作的智能体系统能力强于单个智能体,因此多智能体系统具有优越的扩展性与鲁棒性;最后,基于合理的战场资源部署和作战单元之间的协同控制,使用资源损耗较低的多智能体系统代替损耗高昂的单个复杂系统,从而实现更高的收益。

图论^[6]是解决多智能体系统的构建和分析等相关问题的重要手段之一,原因之一在于图论可以清晰地表示并优化多智能体系统内各单元智能体的信息关系与协同机制。图论相关的拉普拉斯矩阵^[7]被广泛应用于多智能体系统的协同控制模型构建、鲁棒性证明和收敛性分析等各个方面。但是,目前研究人员主要针对图论的代数性质对多智能体系统的内部关系进行分析,并没有深入到系统内的单个智能体,即子图结构和全局系统控制协同架构之间的关系,本文将重点介绍基于图论的边拉普拉斯矩阵构建多智能体系统模型,并探索子图结构与全局控制系统之间的关系,最后生成基于子图的降阶后的多智能体系统模型。

本文第2节提出一种多主多从 Stackelberg 博弈多智能体交互模型,同时对其半正定控制下的闭环解进行证明并求解;第3节基于图论相关知识建立基于边拉普拉斯矩阵的多智能体系统模型,并对子图与全局控制系统的关系进行描述与挖掘,基于生成树子图得出降阶后的一阶多智能体系统模型;最后对该多智能体系统进行数值仿真与实验分析,证明多智能体系统的有效性与鲁棒性。

2 多主多从 Stackelberg 博弈的多智能体交互模型

由于分布式环境的全局耦合度低,导致策略多样化,行为规划更加复杂,解空间指数级别高。随着外部接入的智能体数量增加,各智能体的行为都会对全局收益最大化产生巨大影响^[8]。从经济学的角度看,无论是任务的指控方还是参与方,都趋向于在过程中追求自身收益最大化。基于这个原则,必须研究一种多智能体的均衡交互模型^[9],使得在满足全局收益最大的前提下各智能体均能达到自身的目标。

本节提出一个基于多主多从 Stackelberg 博弈的智能体交互模型。首先通过分析智能体的目的,在智能体系统处理复杂任务的过程中将智能体分为领导者和追随者两种角色,然后基于这两种角色对指挥控制系统中的博弈交互模型进行深入研究,最后通过数值计算与仿真验证本文博弈交互模型的有效性和鲁棒性^[10]。此外,本节还将推导交互博弈中 Stackelberg 均衡解的存在性和唯一性,并且给出均衡解的闭环表达式。

2.1 Stackelberg 博弈的优化模型

博弈论(game theory)也称“对策论”或“赛局理论”,是处理有多方参与的竞争问题的一种常用的方法模型,主要研究在有多方参与的竞争情况下,各决策主体的行为影响各参与方决策以及决策均衡,达到决策者自身收益最大化的决策过程的数学理论与方法^[11-13]。

一般情况下,根据博弈参与者对全局态势信息的掌握程

度,可以将博弈分为完全信息博弈和非完全信息博弈;根据博弈双方的全局成本是否有损失,可以将其分为零和博弈与非零和博弈;根据博弈参与方之间是否存在约束关系,可以将其分为合作博弈和非合作博弈;根据博弈过程中各参与成员在博弈中地位的不同,可将其分为纳什博弈^[14]、主从博弈(Stackelberg Game)^[15]等。

Stackelberg 博弈属于动态博弈,用于两种类型的博弈参与角色之间存在决策行为等级之分的场景,一方是领导者,另一方是追随者。在领导行动后,追随者根据领导者的行动方案制定自己的决策方案,以保证领导者的决策收益最大化。但是本文对原有模型进行了改进,结合分布式协同的相关概念构建多主多从的博弈模型,并将领导者重新定义为指控方,将追随者定义为参与方,使得指控方也会根据参与方的决策方案调整后续的行动方案,最大程度地维护参与方的收益,进而获取全局收益的最大化。这种指控方的最优决策以及参与方相对应的响应决策构成博弈的均衡。

接下来给出 Stackelberg 博弈在控制层面的定义。

定义两个类型的博弈参与方:指控方为 $L_k \in U$,其性能指标函数为 $J_L(\mu, \omega)$;参与方为 $F_k \in U$,其性能指标函数为 $J_F(\mu, \omega)$ 。双方的目的均为最小化 $J(\mu, \omega)$,从而使得双方的收益均最大化,获取全局收益最大化。对于指控方选择的任意决策 $\mu' \in U$,参与方都存在唯一的决策 $\omega' \in W$,使得其性能指标函数 $J_F(\mu', \omega)$ 最小。双方决策选择的映射关系可用下式表示:

$$U \rightarrow W \Rightarrow J_L(\mu, T_\mu) \leq J_L(\mu, \omega), \mu \in U; \omega \in W$$

(1)

考虑到指控方的性能指标 $J_L(\mu, T_\mu)$,假设存在唯一解 $\mu^* \times U$,即 $J_L(\mu^*, T_\mu^*) \leq J_L(\mu^*, T_\mu), \forall \mu \in U$ 。此时 $(\mu^*, \omega^*) = (\mu^*, T_\mu^*) \in U \times W$ 是唯一的 Stackelberg 解。

2.2 多属性决策

多属性决策(Multiple Attribute Decision-Making, MADM)问题^[16]是一种多准则决策(Multiple Criteria Decision-Making, MCMD)问题,另一种多准则决策问题为多目标优化(Multiple Object Optimization, MOO)^[17]或多目标决策(Multiple Object Decision-Making, MODM)问题^[18]。通常, MADM 问题可表示为:

$$\text{optimize}[u_1(s), u_2(s), \dots, u_m(s)], \text{s.t. } s \in S$$

(2)

其中, S 表示备选方案的集合, $s \in S$ 表示 S 中的一个备选方案; $u_1, u_2, \dots, u_m$ 表示多属性决策问题的属性。令 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} (n \in N^+)$ 为备选方案集合, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} (m \in N^+)$ 为属性集合, 设 $c_{ij} = u_j(s_i) (i \in [1, n]; j \in [1, m]; i, j \in N^+)$, 其中 c_{ij} 表示 s_i 对 u_j 的属性值, 则可以构建一个多属性决策矩阵, 即 $C = [c_{ij}]_{n \times m}$ 。 S, U, C 如表1所列。

表1 决策矩阵

Table 1 Decision matrix

	u_1	u_2	$\cdots$	u_m
s_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1m}
s_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
s_n	c_{n1}	c_{n2}	$\cdots$	c_{nm}

此时属性值 c_{ij} 是一个估计值。多属性决策问题的求解

过程为:首先给出决策矩阵,判断权重是否已知并确定权重,然后根据决策矩阵的属性值得出属性矩阵的集结算子,同时根据求解目标和决策矩阵的类型,选择合适的多属性决策方法进行计算,对计算结果进行权重分配和集结,最后根据各方案的得分情况进行决策。

在本节中,多主多从 Stackelberg 博弈模型的各成员均使用多属性决策作为基本方法进行决策方案的生成,根据决策方角色的不同适当对方法中的各权重进行优化,根据最终得分生成最优决策方案。

2.3 分布式环境下的多主多从 Stackelberg 博弈模型

博弈论在多智能体系统交互领域被广泛应用,其中 Stackelberg 博弈是一种经典的博弈模型,通常博弈中各参与者的策略是基于自身利益最大化而制定,彼此之间存在合作或者非合作关系,当所有参与者都达到最大利益且全局利益趋于平稳时,此状态被称为均衡状态。

Stackelberg 博弈是一种上下级之间的博弈问题,博弈中各参与者分属上下级关系,即领导者与追随者。博弈模型中领导者根据任务目标与追随者的状态预测生成决策方案,追随者根据领导者的决策方案做出响应。博弈过程中,领导者和追随者之间的信息不是完全共享的,即领导者对追随者实行信息的部分共享,但是追随者对领导者实行信息的完全共享。考虑到在这样的设计下,领导者的决策方案约束是基于追随者的收益最大化,因此 Stackelberg 博弈中领导者不需要设计响应函数。

当前多主多从 Stackelberg 博弈模型的主要问题在于闭环求解困难,因此 Stackelberg 博弈的开环解通常是主流的研究对象。本节旨在通过推理论证的方式获得 Stackelberg 博弈均衡,即 Stackelberg 博弈的闭环解,对于开环解的获取过程本文在此不做过多论证。本文所构建的指控方-参与方多主多从 Stackelberg 博弈模型的闭环解存在非线性的特性,不存在显式解,因此本节将在一定条件下利用半正定矩阵的正则性给出 Stackelberg 博弈的一种闭环解,通过指控方获得最优决策方案,对参与方的决策进行优化,获得参与方的最优决策方案,最终使得全局收益最大化。

2.3.1 多主多从 Stackelberg 博弈模型的闭环解

在一定复杂程度的分布式环境下,模型利用半正定的二次型性能指标的最优化正则性给出一种多主多从 Stackelberg 博弈的闭环解,本节通过引入一个正则 Riccati 方程^[19]来求解半正定的多主多从 Stackelberg 博弈问题,主要贡献是给出了多主多从 Stackelberg 博弈的一种闭环解。Stackelberg 博弈的大体流程如下:首先,在指控方的决策优化中获得最优决策 (μ, ω) ,当决策导致指控方 ω 值最大时, μ 值最小,此时由于性能控制指标中加权矩阵是半正定的,因此 μ 中存在任意项;其次,在参与方决策优化过程中继续使用 μ 中的任意项对参与方的决策进行优化;最后结合正则 Riccati 方程的解,根据指控方和参与方的决策优化过程得出多主多从 Stackelberg 博弈问题的闭环解。

2.3.2 问题描述

定义线性离散的时间系统如下:

$$x_{k+1} = Ax_k + B_1\mu_k + B_2\omega_k \quad (3)$$

$$z_k = \begin{bmatrix} Ix_k \\ K\mu_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, $x_k \in R^n$ 为博弈参与方的状态变量且存在初始值 x_0 , 并且该初始值是可以确定的; $\omega_k \in R^l$ 为可以定量的干扰, z_k 为输出项, μ_k 为输入项。定义干扰衰减因子为 γ , 其取值范围为 $\gamma \geq 0$, 则可以获取以下性能指标函数:

$$J_L = x'(N+1)P(N+1)x(N+1) - x'(0)\prod_{0}^{N-1}x(0) + \sum_{k=0}^N [\|z_k\|^2 - \gamma^2 \|\omega_k\|^2] \quad (5)$$

$$J_F = x'(N+1)\tilde{P}(N+1)x(N+1) + \sum_{k=0}^N [\|z_k\|^2] \quad (6)$$

其中, γ 是前文中定义好的干扰衰减因子且 $\gamma \geq 0$; $\prod_0^N = \gamma^2 \pi_0^{-1}$, 其中 π_0 为初始状态 $x(0)$ 的方差矩阵。

本节中,指控方和参与方的决策优化是同时进行的,在指控方决策优化过程中使得 (ω^*, μ^*) 在任意初始环境条件 (k_0, x_0) 下满足 $J_L^*(k_0, x_0; \omega^*, \mu^*) = \max_{\omega} \min_{\mu} J_L(k_0, x_0; \omega, \mu) \leq 0$, 在参与方决策优化过程中,对于任意初始环境条件 (k_0, x_0) , 寻求最优 μ^* 值使得 J 最小, 即 $J_F^*(k_0, x_0; \mu^*) = \min_{\mu} J_F(k_0, x_0; \mu)$ 。

2.3.3 Stackelberg 博弈下半正定控制的闭环解

本节将对多主多从 Stackelberg 博弈优化中的闭环求解过程进行描述,该问题的优化过程主要分为两部分。第一部分为指控方决策优化,通过调整 μ 值使 J_L 最小化,同时调整 ω 以最大化 J_L 。基于加权矩阵^[20]的正定性, μ 值中包含任意项。为保证指控方的决策唯一,任意项则作为新的待求决策,从参与方决策优化中得出,从而获取指控方的最优决策。

(1) 指控方决策优化

由式(5)可知,对指控方决策优化,即: $\max \min J_L \leq 0$, 优化公式如下:

$$J_L = x'(N+1)P(N+1)x(N+1) - x'(0)\prod_{0}^{N-1}x(0) + \sum_{k=0}^N [\mu_k'R\mu_k + x_k'Rx_k - \gamma^2 \omega_k'\omega_k] \quad (7)$$

首先证明指控方最优决策方案的存在性:

$$x_{k+1} = Ax_k + B\mu_k + C\omega_k \quad (8)$$

$$p_{k-1} = A'p_k + Qx_k \quad (9)$$

$$C'p_k - \gamma^2 \omega_k = 0 \quad (10)$$

$$R\mu_k + B'p_k = 0 \quad (11)$$

满足上述方程,即可证明指控方存在最优决策,即 $\max \min J_L$ 存在确定值,且最优解满足式(10)和式(11),其证明过程可参见文献[21]。由式(3)和式(9)可知,变量 x_k 和 p_{k-1} 之间存在非其次线性关系,则定义如下:

$$\eta_{k-1} = p_{k-1} - P_k x_k \quad (12)$$

其中, η_{k-1} 和 P_k 的定义将在下文中给出。

将式(12)代入式(11),则式(11)可以改写为:

$$B'[\eta_k + P_{k+1}x_{k+1}] + R\mu_k = 0 \Rightarrow [R + B'P_{k+1}B]\mu_k + B'P_{k+1}Ax_k + B'P_{k+1}C\omega_k + B'\eta_k \quad (13)$$

将式(12)代入式(10)中,方程(10)可改写为:

$$C'[\eta_k + P_{k+1}x_{k+1}] - \gamma^2 \omega_k = 0 \Rightarrow Z_k \omega_k + C'P_{k+1}Ax_k + C'P_{k+1}B\mu_k + C'\eta_k \quad (14)$$

其中, $Z_{k+1} = -\gamma^2 I + C'P_{k+1}C$ 。由于指控方决策存在最优解,

可知加权矩阵 Z_{k+1} 是确定的, 即 $Z_{k+1} \leq 0$, 则式(14)可改写为:

$$\omega_k = -Z_{k+1}^{-1} [C'P_{k+1}Ax_k + C'P_{k+1}B\mu_k + C'\eta_k] \quad (15)$$

将式(15)代入式(13), 可得:

$$\begin{aligned} B'[\eta_k + P_{k+1}x_{k+1}] + R\mu_k &= 0 \\ \Rightarrow B'[\eta_k + P_{k+1}x_{k+1}] + R\mu_k \\ &= [B'P_{k+1}B + R]\mu_k + B'P_{k+1}Ax_k + B'\eta_k - B'P_{k+1} \times \\ &\quad CZ_k^{-1}[C'P_{k+1}Ax_k + C'P_{k+1}B\mu_k + C'\eta_k] \\ &= [R + B'P_{k+1}B - B'P_{k+1}CZ_k^{-1}C'P_{k+1}A]x_k + [B' + \\ &\quad B'P_{k+1}CZ_k^{-1}C']\eta_k \\ &= \phi_{k+1}\mu_k + \varsigma_k x_k + [B' + B'P_{k+1}CZ_k^{-1}C']\eta_k \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\phi_{k+1} = R + B'\bar{P}_{k+1}B$, $\varsigma_{k+1} = B'\bar{P}_{k+1}A$, $\bar{P}_{k+1} = P_{k+1} - Z_{k+1}^{-1}CP_{k+1}$. 假设当加权矩阵为半正定时, $\max \min J_L$ 的最优解可能不止一个, 此时需要引入正则 Riccati 方程, 使得 P_k 满足 Riccati 方程, 其表示如下:

$$\begin{aligned} P_k &= Q + A'P_{k+1}A - AP_{k+1}B\psi_{k+1}^*B'\bar{P}_{k+1}A - A'P_{k+1}BZ_{k+1}^{-1} \\ &\quad B'P_{k+1}A + A'P_{k+1}B \times Z_{k+1}^{-1}B'P_{k+1}B\psi_{k+1}^*B'\bar{P}_{k+1}A \\ &\quad (17) \end{aligned}$$

此时 $\eta_k = 0$, 且 $P_{N+1} = P_N x_{N+1} = H$, ψ_{k+1}^* 为 ϕ_{k+1} 的伪逆矩阵, 可以得出 $\eta_N = 0$, 故等式(12)在 N 时刻成立. 假设式(12)在时刻 k 成立, 则 $\eta_k = p_k - P_{k+1}x_{k+1}$, 当二者的值域范围符合 $Range[\varsigma_{k+1}] \subseteq Range[\phi_{k+1}]$, 由方程(16)可得:

$$\begin{aligned} \mu_k &= -\psi_{k+1}^* \varsigma_{k+1} x_k - \psi_{k+1}^* [B' - B'P_{k+1}CZ_{k+1}^{-1} \times C']\eta_k + \\ &\quad [I - \psi_{k+1}^* \varsigma_{k+1}]\varphi \end{aligned} \quad (18)$$

其中, φ 为任意项. 将方程(18)代入方程(15)可得:

$$\begin{aligned} \omega_k &= -Z_{k+1}^{-1} C'P_{k+1} [A - B\psi_{k+1}^* \varsigma_{k+1}]x_k + Z_{k+1}^{-1} C' [P_{k+1} \\ &\quad B\psi_{k+1}^* [B' - B'P_{k+1}C \times Z_{k+1}^{-1}C'] - I]\eta_k - Z_{k+1}^{-1} C'P_{k+1} \\ &\quad B \times [I - \psi_{k+1}^* \phi_{k+1}]\varphi \end{aligned} \quad (19)$$

把方程(18)、方程(19)以及方程(12)代入式(9), 可得:

$$\begin{aligned} p_{k-1} &= A'p_k + Qx_k \\ &= A'[\eta_k + P_{k+1}x_{k+1}] + Qx_k \\ &= A'[\eta_k + P_{k+1}[Ax_k + B\mu_k + C\omega_k]] + Qx_k \\ &= P_k x_k + \eta_{k-1} \end{aligned} \quad (20)$$

由于 P_k 满足方程(17), 且 $\varsigma_{k+1}[I - \psi_{k+1}^* \phi_{k+1}] = 0$, 可得:

$$\begin{aligned} \eta_{k-1} &= [A' - A'P_{k+1}B\psi_{k+1}^* [B' - B'P_{k+1}CZ_{k+1}^{-1}C'] + A' \\ &\quad P_{k+1}CZ_{k+1}^{-1}C'P_{k+1}B\psi_{k+1}^* [B' - B' \times P_{k+1}CZ_{k+1}^{-1}C'] - A' \\ &\quad P_{k+1}CZ_{k+1}^{-1}C']\eta_k \end{aligned} \quad (21)$$

综上, 可得出 $\eta_k = 0, k=0, 1, \dots, N$. 由前文可知, 当满足

$P(0) - \prod_0^{-1} \leq 0, Z_{k+1} \leq 0, \phi_{k+1} \geq 0$ 时, 存在:

$$\mu_k^* = -\phi_{k+1}\varsigma_{k+1}x_k + [I - \psi_{k+1}^* \phi_{k+1}]\phi_k \quad (22)$$

$$\omega_k^* = -Z_{k+1}^{-1}M_{k+1}x_k - Z_{k+1}^{-1}C'P_{k+1}B[I - \psi_{k+1}^* \phi_{k+1}]\varphi_k \quad (23)$$

其中, ϕ_k 为合适维数的任意向量, $M_{k+1} = C'P_{k+1}A - C'P_{k+1}B\psi_{k+1}^*B'\bar{P}_{k+1}A$, 则最优决策指标函数为:

$$J_L^* = x_0' [P_0 - \pi_0^{-1}] x_0 \quad (24)$$

具体证明过程如下:

由等式 $p_{k-1} = A'p_k + Qx_k$ 和 $\max \min J_L \leq 0$ 得到:

$$\begin{aligned} x_k' p_{k-1} - x_{k+1}' p_k \\ &= [Ax_k + Bu_k + C\omega_k]' P_{k+1} [Ax_k + Bu_k + C\omega_k] - x_k' P_k x_k \\ &= [x_k' \quad u_k' \quad \omega_k'] \times \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -P_k + A'P_{k+1}A & A'P_{k+1}B & A'P_{k+1}C \\ B'P_{k+1}A & B'P_{k+1}B & B'P_{k+1}C \\ C'P_{k+1}A & C'P_{k+1}B & CP_{k+1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \\ \omega_k \end{bmatrix}$$

对上式从 0 到 N 依次求和, 可得:

$$\begin{aligned} x_{N+1}' P_{N+1} x_{N+1} - x_0' p_{-1} = \\ \sum_{k=0}^N [x_k' \quad u_k' \quad \omega_k'] \times \\ \begin{bmatrix} -P_k + A'P_{k+1}A & A'P_{k+1}B & A'P_{k+1}C \\ B'P_{k+1}A & B'P_{k+1}B & B'P_{k+1}C \\ C'P_{k+1}A & C'P_{k+1}B & C'P_{k+1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \\ \omega_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

H_J 指控方的性能指标函数则更新为:

$$\begin{aligned} J_L = x_0' p_{-1} - x_0' \pi_0^{-1} x_0 + \sum_{k=0}^N [x_k' \quad \mu_k' \quad \omega_k'] \times \\ \begin{bmatrix} -P_k + A'P_{k+1}A & A'P_{k+1}B & A'P_{k+1}C \\ B'P_{k+1}A & B'P_{k+1}B & B'P_{k+1}C \\ C'P_{k+1}A & C'P_{k+1}B & -\gamma^2 I + C'P_{k+1}C \end{bmatrix} \times \\ \begin{bmatrix} x_k \\ \mu_k \\ \omega_k \end{bmatrix} \\ = x_0' p_{-1} - x_0' \pi_0^{-1} x_0 + \sum_{k=0}^N x_k' [-P_k + Q + A'P_{k+1}A - \\ A'P_{(k+1)}B\psi_{k+1}^*B'\bar{P}_{k+1}A - A'P_{k+1}CZ_{k+1}^{-1}C'P_{k+1}A + A' \\ P_{k+1}CZ_{k+1}^{-1}C'P_{k+1}B\psi_{k+1}^*B'\bar{P}_{k+1}A] x_k + \sum_{k=0}^N \\ \left(\begin{bmatrix} \mu_k - \hat{\mu}_k \\ \omega_k - \hat{\omega}_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R + B'P_{k+1}B & B'P_{k+1}B_2 \\ C'P_{k+1}B & -\gamma^2 I + C'P_k + IC \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} \mu_k - \hat{\mu}_k \\ \omega_k - \hat{\omega}_k \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

结合前文, 该式可以改写为:

$$\begin{aligned} J_L = x_0' p_{-1} - x_0' \pi_0^{-1} x_0 + \sum_{k=0}^N [\mu_k - \mu_k^*]' \psi_{k+1} [\mu_k - \mu_k^*] + \\ \sum_{k=0}^N [\omega_k - \omega_k^*]' Z_{k+1} [\omega_k - \omega_k^*] \end{aligned}$$

此时 $P_0 - \pi_0^{-1} < 0, \phi_{k+1} \geq 0, Z_{k+1} < 0$, 结合前文可得指控方最优决策方案 (u, ω) , 经过计算得到最优性能指标如前文等式所示. 证毕。

(2) 参与方策略优化

为了优化前文求得最优决策方案中存在的任意项, 我们首先进行矩阵变换, 将任意项转换为等待解决的参与方, 并引入初等行变换矩阵 $T_0(k)$, 使得:

$$T_k^0 [I - \psi_{k+1}^* \phi_{k+1}] = \begin{bmatrix} 0 \\ RT_k^0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

定义 $T_k^0 [I - \psi_{k+1}^* \phi_{k+1}] \psi_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_k^1 \end{bmatrix}$, 其中 $\mu_k^1 = \psi_{T_k^0} \psi_k$, 可得

到以下等式:

$$[I - \psi_{k+1}^* \phi_{k+1}] \psi_k = (T_0^{-1})_k \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_k^1 \end{bmatrix} = Z_{k+1}^0 \mu_k^1 \quad (26)$$

基于以上分析, 我们将 $\mu(k)$ 和 $\omega(k)$ 改写为:

$$\mu_k = -\psi_{k+1}^* \tau_{k+1} x_k + Z_{k+1}^0 \mu_k^1 \quad (27)$$

$$\omega(k) = -Z_{k+1}^{-1} M_{k+1} x_k - Z_{k+1}^{-1} C'P_{k+1} B Z_{k+1}^0 \mu_k^1 \quad (28)$$

将式(20)代入 x_{k+1} 的定义中, 可得:

$$x_{k+1} = \bar{A}_{k+1} x_k + \bar{B}_{k+1} u_k^1 \quad (29)$$

其中, $\bar{A}_{k+1} = A - B\psi_{k+1}^* \tau_k - CZ_{k+1}^{-1} M_{k+1}$, $\bar{B}_{k+1} = BZ_{k+1}^0 - CZ_{k+1}^{-1} C' P_{k+1} BZ_{k+1}^0$ 。将 μ_k 和 ω_k 代入 J_F , 得到:

$$\begin{aligned} J_F &= x_{N+1}' \bar{P}_{N+1} x_{N+1} + \sum_{k=0}^N [\mu_k' R \mu_k + x_k' Q x_k] \\ &= x_{N+1}' \bar{P}_{N+1} x_{N+1} + \sum_{k=0}^N [x_k' K_{k+1}' R K_{k+1}^1 x_k - 2x_k' K_{k+1}' \\ &\quad RZ_{k+1}^0 \mu_k^1 + \mu_k^{1'} Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \mu_k^1] + x_k' Q x_k \end{aligned} \quad (30)$$

此时对参与方的决策方案优化问题进行求解,即:

$$\min_{u_1} J_2 \quad (31)$$

参与方决策方案优化是一个标准的线性二次型优化问题。首先给出有解的必要条件:

$$\begin{aligned} \theta_{k-1} &= \bar{A}_{k+1}' \theta_k + [Q + K_{k+1}' R K_{k+1}^1] x_k - K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \mu_k^1 \\ &\Rightarrow 0 = -Z_{k+1}' R K_{k+1}^1 x_k + Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \mu_k^1 + \bar{B}_{k+1}' \theta_k \end{aligned} \quad (32)$$

若式(32)成立,则说明参与方决策方案优化问题存在最优解。具体证明过程如下:

首先定义 x_k 和 θ_{k-1} 之间的非齐次关系。

$$\zeta_k = \theta_k - \bar{P}_{k+1} x_{k+1} \quad (33)$$

其中, ζ_k 和 $\bar{P}_{k+1}$ 的定义在下述引理中给出。结合 J_F 和 θ_{k-1} 的定义得到以下平衡方程:

$$\begin{aligned} 0 &= -Z_{k+1}' R' K_{k+1}^1 x_k + Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \mu_k^1 + \bar{B}_{k+1}' [\zeta_k + \bar{P}_{k+1} x_{k+1}] \\ &= -Z_{k+1}' R' K_{k+1}^1 x_k + Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \mu_k^1 + \bar{B}_{k+1}' [\zeta_k + \bar{P}_{k+1} \\ &\quad [\bar{A}_{k+1} x_k + \bar{B}_{k+1} \mu_k^1]] \\ &= [-Z_{k+1}' R' K_{k+1}^1 + \bar{B}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{A}_{k+1}] x_k + [Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 + \\ &\quad \bar{B}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{B}_{k+1}] \mu_k^1 \\ &= \phi_{k+1}^0 \mu_k^1 + \Gamma_{k+1} x_k + \bar{B}_{k+1}' \mu_k^1 \end{aligned} \quad (34)$$

其中,

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}^0 &= Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 + \bar{B}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{B}_{k+1} \\ \Gamma_{k+1} &= -Z_{k+1}' R' K_{k+1}^1 + \bar{B}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{A}_{k+1} \end{aligned} \quad (35)$$

为了求得最优控制器 μ_k^1 的显式解,定义以下假设:

$$Range[\Gamma_{k+1}] \subseteq Range[\phi_{k+1}^0] \quad (36)$$

当参与方决策方案性能指标中的控制权阵为半正定矩阵时,问题 $\min_{u_1} J_2$ 不存在唯一解,此处为引入正则 Riccati 方程。基于上述正则假设,本文求解正则 Riccati 方程的解,并且验证 $x(k)$ 和 $\theta(k-1)$ 之间的齐次关系。在前文假设情况下 $\theta(k-1) = \bar{P}(k) x(k)$ 成立,其中:

$$\bar{P}_k = Q + K_{k+1}' R K_{k+1}^1 + \bar{A}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{A}_{k+1} - \Gamma_{k+1}' \psi_{k+1}^0 Z_{k+1} \quad (37)$$

此时 $\zeta(k) = 0$ 且存在 $\theta_N = \bar{P}_{N+1} x_{N+1}$ 以及 $\bar{P}_{N+1} = \bar{H}$ 。即

$\theta_N = \bar{P}_{N+1} x_{N+1}$ 。假设 $\zeta(k)$ 在时刻 k 成立,使得 $\zeta_k = \theta_k - \bar{P}_{k+1} x_{k+1}$, 此时存在:

$$\mu_k^1 = -\psi_{k+1}^0 Z_{k+1} x_k - \psi_{k+1}^0 \bar{B}_{k+1}' \Gamma_k + [I - \psi_{k+1}^0 \phi_{k+1}^0] \varphi_k \quad (38)$$

其中, $\varphi(k)$ 是合适维数的任意项。将式(38)和 $\zeta_k = \theta_k - \bar{P}_{k+1} x_{k+1}$ 代入 θ_{k-1} , 得到:

$$\theta_{k+1} = \bar{P}_k x_k + \zeta_k \quad (39)$$

将 $\Gamma_{k+1}' [I - \psi_{k+1}^0 \phi_{k+1}^0] = 0$ 应用到式(39)的推导中,可得:

$$\zeta_{k-1} = [\bar{A}_{k+1} - \bar{A}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{B}_{k+1} \phi_{k+1}^0 \bar{B}_{k+1} + K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \phi_{k+1}^0$$

$$\bar{B}_{k+1}' \zeta_k \quad (40)$$

由于 $\zeta_N = 0$, 可得 $\zeta_k = 0, k = 0, 1, \dots, N$ 。

接下来考虑状态空间模型和决策方案指标函数,当 H_F 符合前文的假设时,优化问题存在最优解 μ_k^1 , 当且仅当满足下列条件: 1) $\bar{P}_0 \geq 0$; 2) $\phi_k \geq 0$ 。当满足这两个条件时,该问题是可解的,且其最优解为:

$$\mu_k^{1*} = -\phi_{k+1}^* \Gamma_{k+1} x_k + [I - \phi_{k+1}^* \phi_{k+1}^0] \varphi_k \quad (41)$$

其中, $\varphi(k)$ 是有合适维数的任意向量。则相应的最优决策方案性能指标为:

$$J_F^* = x_0' P_0 x_0 \quad (42)$$

具体推导过程如下:

必要性证明: 假设问题 $\min_{\mu^1} J_F$ 有解, 通过归纳法来验证 $\phi_{k+1}^0 \geq 0$ 并且获得最优决策方案。式(30)可以改写为:

$$\begin{aligned} J_F &= x_{N+1}' \bar{P}_{N+1} x_{N+1} + \sum_{k=0}^N [x_k' \mu_k^1] \times \\ &\quad \begin{bmatrix} Q + K_{k+1}' R K_{k+1}^1 & -K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \\ -K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 & Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \mu_k^1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 $k = N$ 时, J_F 可以被写为 $x(N)$ 和 u_N^1 的表达式, 具体如下:

$$J_F = [x_N' \mu_N^1] \Phi_{N+1} \begin{bmatrix} x_N \\ \mu_N^1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{N+1} = \begin{bmatrix} \Theta_{N+1} & \Gamma_{N+1} \\ \Gamma_{N+1}' & \phi_{N+1}^0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{N+1} = Q + K_{N+1}' R K_{N+1}^1 + \bar{A}_{N+1}' \bar{P}_{N+1} \bar{A}_{N+1}$$

其中, μ_N^1 存在二次项对于任意非零的 μ_N^1 为半正定矩阵, 此时 $x(N) = 0$, 得到:

$$J_F = \mu_N^{1'} \phi_{N+1}^0 \mu_N^1$$

即 $\phi_{N+1}^0 \geq 0$ 。结合 $\theta_N = \bar{P}_{N+1} x_{N+1}$, 可知:

$$\begin{aligned} 0 &= -Z_{N+1}' R' K_{N+1}^1 x_N + Z_{N+1}' RZ_{N+1}^0 \mu_N^1 + \bar{B}_{N+1}' \bar{P}_{N+1} \\ &\quad [\bar{A}_{N+1} x_N + \bar{B}_{N+1} \mu_N^1] \end{aligned}$$

此时, 参与方最优决策方案参数可定义为:

$$\mu_N^1 = -\phi_{N+1}^* \Gamma_{N+1} x_N + [I - \phi_{N+1}^0 \phi_{N+1}^0] \varphi_N$$

$$\begin{aligned} \theta_N &= \bar{A}_{N+1}' \bar{P}_{N+1} [\bar{A}_{N+1} x_N + \bar{B}_{N+1} \mu_N^1] + [Q + K_{N+1}' R K_{N+1}^1] x_N - K_{N+1}' RZ_{N+1}^0 \mu_N^1 \\ &= [\bar{A}_{N+1}' \bar{P}_{N+1} \bar{A}_{N+1} + Q + K_{N+1}' R K_{N+1}^1] x_N + [\bar{A}_{N+1}' \bar{P}_{N+1} \bar{B}_{N+1} \bar{P}_{N+1} \\ &\quad \bar{B}_{N+1} \bar{P}_{N+1} \bar{B}_{N+1}] \mu_N^1 - K_{N+1}' RZ_{N+1}^0 \mu_N^1 \\ &= [\bar{A}_{N+1}' \bar{P}_{N+1} \bar{A}_{N+1} + Q + K_{N+1}' R K_{N+1}^1 - \Gamma_{N+1}' \bar{P}_{N+1} \bar{B}_{N+1} \phi_{N+1}^0 \\ &\quad \Gamma_{N+1} \bar{P}_{N+1} \bar{B}_{N+1}] x_N + \Gamma_{N+1}' \bar{P}_{N+1} [I - \phi_{N+1}^0 \phi_{N+1}^0] \varphi_N \end{aligned}$$

至此, 我们验证了在 $k = N$ 时刻的 $\bar{P}_N$ 。运用归纳法, 选取 $0 \leq k \leq N$ 中的任意 k , 假设 $\phi_k^0 \geq 0$ 以及最优决策方案参数 μ_N^1 在 $k > 1$ 时和前文推导一致, 则当 $k = 0$ 时, 本文条件依然成立。令 μ_k 在所有的 $k \geq 1$ 时都存在最优决策。需要验证 ψ^0 为半正定矩阵。假设 $x^0 = 0$, 求解 J_F^0 中关于 μ^0 的二次型。此时可得:

$$\begin{aligned} &x_k' \theta_{k-1} - x_k' \theta_k \\ &= x_k' [Q + K_{k+1}' R K_{k+1}^1] x_k - 2x_k' K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \mu_k^1 + \\ &\quad \mu_k^{1'} Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \mu_k^1 \end{aligned}$$

$$=[x_k' \mu_k^{1''}] \times \begin{bmatrix} Q+K_{k+1}' RK_{k+1}^1 & -K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \\ -K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 & Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \mu_k^1 \end{bmatrix}$$

对等式两边进行 $\sum_{k=1}^N$ 求和。

$$\begin{aligned} x_k' \theta_0 - x_{N+1}' \bar{P}_{N+1} x_{N+1} \\ = \sum_{k=1}^N [x_k' \theta_{k-1} - x_{k+1}' \theta_k] \\ = \sum_{k=1}^N [x_k' \mu_k^{1'}] \times \begin{bmatrix} Q+K_{k+1}' RK_{k+1}^1 & -K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \\ -K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 & Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \mu_k^1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

综上, 可以将 J_F 写为:

$$\begin{aligned} J_F &= x_{N+1}' \bar{P}_{N+1} x_{N+1} + [x_0' \mu_0^{1'}] \\ &\quad \begin{bmatrix} Q+K_1' RK_1^1 & -K_1' RZ_1^0 \\ -K_1' RZ_1^0 & Z_1' RZ_1^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \mu_0^1 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N [x_k' \mu_k^{1'}] \times \\ &\quad \begin{bmatrix} Q+K_{k+1}' RK_{k+1}^1 & -K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \\ -K_{k+1}' RZ_{k+1}^0 & Z_{k+1}' RZ_{k+1}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \mu_k^1 \end{bmatrix} \\ &= [x_0' \mu_0^{1'}] \begin{bmatrix} Q+K_1' RK_1^1 & -K_1' RZ_1^0 \\ -K_1' RZ_1^0 & Z_1' RZ_1^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \mu_0^1 \end{bmatrix} + x_1' \theta_1 \\ &= \mu_0^{1'} [Z_1^0 R G_1^0 + \bar{B}_1' P_1 \bar{B}_1] \mu_0^{1'} \\ &= \mu_0^{1'} \phi_0^1 \mu_0^1 \end{aligned}$$

假设参与方最优决策方案存在, 则对于任意的 $\mu_0 \neq 0$, J_F

可以获得最小值。因此 $\phi_1^0 \geq 0$ 。结合 $\theta_0 = \bar{P}_1 x_1$, 得到:

$$0 = -Z_1^0' RK_1^1 x(0) + Z_1^0' RZ_1^0 \mu_0^1 + \bar{B}_1' \bar{P}_1 [\bar{A}_1 x_0 + \bar{B}_1 \mu_0^1]$$

故 u_0^1 可以写为 $\mu_0^1 = -\phi_1^0 * \Gamma_1 x_0 + [I - \phi_1^0 * \psi_1^0] \phi_0$ 。结合前文可以得到:

$$\begin{aligned} \theta_{-1} &= \bar{A}_1' \bar{P}_1 [\bar{A}_1 x_0 + \bar{B}_1 \mu_0^1] + [Q + K_1' RK_1^1] x_0 - \\ &\quad K_1' RZ_1^0 \mu_0^1 \\ &= [\bar{A}_1' \bar{P}_1 \bar{A}_1 + Q + K_1' RK_1^1] x_0 + [\bar{A}_1' \bar{P}_1 \bar{B}_1 - \\ &\quad K_1' RZ_1^0] \mu_0^1 \\ &= [\bar{A}_1' \bar{P}_1 \bar{A}_1 + Q + K_1' RK_1^1 - \Gamma_1' \phi_1^0 * \Gamma_1] x_0 + \\ &\quad \Gamma_1' [I - \phi_1^0 * (1) \phi_1^0] \phi_0 \end{aligned}$$

至此, $\bar{P}_0$ 在 $k=0$ 时成立得到验证。

充分性证明。

运用完全平方和, 得到:

$$\begin{aligned} x_{k+1}' \bar{P}_{k+1} x_{k+1} - x_k' \bar{P}_k x_k \\ = [\bar{A}_{k+1} x_k + \bar{B}_{k+1} \mu_k^1]' \bar{P}_{k+1} [\bar{A}_{k+1} x_k + \bar{B}_{k+1} \mu_k^1] - \\ x_k' \bar{P}_k x_k \\ = [x_k' \mu_k^{1'}]' \begin{bmatrix} -\bar{P}_k + \bar{A}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{A}_{k+1} & \bar{A}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{B}_{k+1} \\ \bar{B}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{A}_{k+1} & \bar{B}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{B}_{k+1} \end{bmatrix} \times \\ \begin{bmatrix} x_k \\ \mu_k^1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对上式从 $k=0, 1, \dots, N$ 求和, 则:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N [x_{k+1}' \bar{P}_{k+1} x_{k+1} - x_k' \bar{P}_k x_k] \\ = x_{N+1}' P_{N+1} x_{N+1} - x_0' \bar{P}_0 x_0 \\ = \sum_{k=0}^N [x_k' \mu_k^{1'}] \times \begin{bmatrix} -\bar{P}_k + \bar{P}_{k+1} \bar{A}_{k+1} & \bar{A}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{B}_{k+1} \\ \bar{B}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{A}_{k+1} & \bar{B}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \bar{B}_{k+1} \end{bmatrix} \times \\ \begin{bmatrix} x_k \\ \mu_k^1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将 $x_{N+1}' \bar{P}_{N+1} x_{N+1}$ 代入上式, 并且结合 Riccati 方程, 则 J_F 可以被描述为:

$$\begin{aligned} J_F &= x_0' \bar{P}_0 x_0 + \sum_{k=0}^N x_k' [-\bar{P}_k Q + K_{k+1}' RK_{k+1}^1 + \bar{A}_{k+1}' \bar{P}_{k+1} \\ &\quad \bar{A}_{k+1} - \Gamma_{k+1}' \phi_{k+1}^{0*} \Gamma_{k+1}] x_k + \sum_{k=0}^N [\mu_k^{1'} - \mu_k^{1*}]' \phi_{k+1}^0 \mu_k^{1'} \\ &\quad - \mu_k^{1*}] \\ &= x_0' \bar{P}_0 x_0 + \sum_{k=0}^N [\mu_k^{1'} - \mu_k^{1*}]' \phi_{k+1}^0 [\mu_k^1 - \mu_k^{1*}] \end{aligned}$$

证毕。

此时 $\bar{P}_0 \geq 0$, $\phi_{k+1}^0 \geq 0$ 。因此, 参与方最优决策方案存在, 且最优指控方一参与方决策方案, 即全局最优决策方案如下:

$$\mu_k^{1*} = -[\phi_{k+1}^{0*} \tau_{k+1} + Z_{k+1}^0 \phi_{k+1}^{0*} \Gamma_{k+1}] x_k + Z_{k+1}^0 [I - \phi_{k+1}^{0*} \phi_{k+1}^0] \phi_k \quad (43)$$

$$\omega_k^* = -Z_{k+1}^{-1} [M_{k+1} - C' P_{k+1} B G_k^0 \phi_{k+1}^{0*} \times \Gamma_{k+1}] x_k - Z_{k+1}^{-1} C' P_{k+1} B G_{k+1}^0 [I - \phi_{k+1}^{0*} \phi_{k+1}^0] \quad (44)$$

至此, 得到了 Stackelberg 博弈的一种闭环解, 获得指控方与参与方的最优决策方案, 最终达到全局收益最大化。

3 代数图论和有向边拉普拉斯矩阵的相关概念与引理

3.1 代数图论相关概念和引理

本节简单梳理下文中即将使用的数学相关术语与图论基本知识^[22]。本文使用 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示向量的欧拉范数和矩阵的 2-范数^[23]; 定义 1_n 表示元素全为 1 的 n 维向量, I_n 表示 n 维单位矩阵, 0 表示元素全为 0 的 n 维 0 矩阵或者 n 维 0 向量; 用 $null(A)$ 表示矩阵 A 的核空间, $rank(A)$ 表示矩阵 A 的秩; 符号 $\otimes$ 表示克罗内克积^[24] (kronecker product)。

图论通常用于表示节点之间的联系, 进而表示多智能体系统的拓扑关系并建模, 而且可以模拟系统内智能体之间的关系, 分析系统的协同性与鲁棒性。数学上定义图 $\mathfrak{R} = \{\nu, \epsilon\}$ 由非空点集合 ν 和对应边的集合 $\epsilon \in \nu \times \nu$ 构成。假设规定所有边的方向, 则定义 $\mathfrak{R}$ 为有向图, 反之则定义 $\mathfrak{R}$ 为无向图。当节点 $(i, j) \in \epsilon, i, j \in R$, 则两个节点 i, j 互为对方的邻居节点, 可以表示为 $N_i = \{j: (j, i) \in \epsilon\}$ 。就无向图而言, 任意两个节点之间的距离被定义为通路 r , 其数学含义为 $r+1$ 个不同节点所构成的节点序列。假设两个节点之间存在通路, 则定义二者为连通的, 进而无向图 R 也是连通的。指定好无向图每条边的方向后可得到定向图, 任意两相邻节点之间是否仅存在一条有向边是定义定向图与无向图二者之间区别的唯一准则。有向图 $\mathfrak{R} = \{\nu, \epsilon\}$ 中的通路是首节点和尾结点互相连接的有向边序列, 关于有向树的定义, 即单一节点到其他任一节点仅存在唯一通路, 此类结构被定义为有向树, 所有有向树的集合则定义为生成树 $\mathfrak{R}_t = \{\nu, \epsilon_t\}$, 除去生成树外的所有子图集合称为生成余树。如果图中两节点之间的有向图通路一致, 则称此有向图具有强连通^[25]的特性。

邻接矩阵 $A_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$, 其中非负元素 a_{ij} 的取值取决于 i, j 两个节点是否存在相邻关系, 即 i, j 是否为相邻节点。对角矩阵 $\Delta_R(R) = \text{diag}\{\Delta_i(\mathfrak{R})\}$, 此时定义对角元素对应节点的度为 $\Delta_i(\mathfrak{R})$, 度的取值为 $\sum_{j=1}^n a_{ij} (i=1, \dots, n)$, 则图 $\mathfrak{R}$ 的边 $e_k (k=1, \dots, m)$ 的对应权重 $w_k \geq 0$ 。图的关联矩阵 $E(\mathfrak{R})$

定义如下:任意一个有向图上 $n \times m$ 的 $\{0, \pm 1\}$ 矩阵,关联矩阵的行与列分别对应于有向图的点与边,关联矩阵的秩满足 $\text{rank}(E(\mathfrak{R})) = n - 1$, 且 $E(\mathfrak{R})^T \mathbf{1}_n = 0$, 具体如下:

$$[E(\mathfrak{R})]_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{节点 } i \text{ 为边 } e_k \text{ 终点} \\ -1, & \text{节点 } i \text{ 为边 } e_k \text{ 起点} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (45)$$

综上,图 $\mathfrak{R}$ 的拉普拉斯矩阵定义为 $L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = \Delta_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) - A_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$, 对于连通图,拉普拉斯矩阵为半正定矩阵^[25], 且 $L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = E(\mathfrak{R})E(\mathfrak{R})^T$, 则本文基于图论对拉普拉斯矩阵重新进行定义:

$$L_e(\mathfrak{R}) = E(\mathfrak{R})^T E(\mathfrak{R}) \quad (46)$$

此时 $L_e(\mathfrak{R})$ 和 $L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ 都具有相同的非零特征值。

3.2 有向边拉普拉斯矩阵

在描述强连通有向图(下文简称为有向图) $\mathfrak{R}$ 中节点与边的关系时,此处引入了入度关联矩阵和出度关联矩阵两个概念,具体定义如下:假设有向图 $\mathfrak{R}$ 的节点和边数量分别为 n 和 m , 则 $n \times m$ 维入度关联矩阵 $E_{\odot}(\mathfrak{R})$ 为 $[0, -1]$ 矩阵,出度关联矩阵^[26] $E_{\otimes}(\mathfrak{R})$ 为 $[0, +1]$ 矩阵,其行与列分别对应于有向图 $\mathfrak{R}$ 的点与边:

$$[E_{\odot}(\mathfrak{R})]_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{当 } i \text{ 节点为边 } e_j \text{ 的终点} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (47)$$

$$[E_{\otimes}(\mathfrak{R})]_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{当 } i \text{ 节点为边 } e_j \text{ 的起点} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

通过比较可以发现 $E(\mathfrak{R})$ 和出度关联矩阵 $E_{\otimes}(\mathfrak{R})$ 、入度关联矩阵 $E_{\odot}(\mathfrak{R})$ 之间存在如下关系:

$$E(\mathfrak{R}) = E_{\odot}(\mathfrak{R}) + E_{\otimes}(\mathfrak{R}) \quad (48)$$

现赋值权重 w_k 到有向图 $\mathfrak{R}$ 中的边 e_k 上,则加权后的入度关联矩阵可表示为 $E_{\odot}^w(\mathfrak{R}) = E_{\odot}(\mathfrak{R})w(\mathfrak{R})$, 其中 $w(\mathfrak{R})$ 为式(45)中的权重矩阵,此时可以基于关联矩阵与加权后的入度关联矩阵对拉普拉斯矩阵进行重新定义,表达式如下:

$$L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = E_{\otimes}^w(\mathfrak{R})E(\mathfrak{R})^T \quad (49)$$

具体证明过程如下:

根据等式 $\text{reward} = \begin{cases} -1, & \text{终止状态条件下} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 可以将

$$F = \int_0^{\infty} (w_1 |e(t)| + w_2 u^2(t)) dt \text{ 分解:}$$

$$E_{\odot}^w(\mathfrak{R})E(\mathfrak{R})^T = E_{\odot}^w(\mathfrak{R})E_{\odot}(\mathfrak{R})^T + E_{\odot}^w(\mathfrak{R})E_{\otimes}(\mathfrak{R})^T$$

定义 $E_{\odot}^w(\mathfrak{R})$ 和 $E_{\otimes}^w(\mathfrak{R})$ 分别是 $E_{\odot}^w(\mathfrak{R})$ 和 $E_{\otimes}^w(\mathfrak{R})$ 的第 i 行。根据 $E_{\odot}^w(\mathfrak{R})$ 的定义可得:

$$E_{\odot}^w(\mathfrak{R})E_{\odot}(\mathfrak{R})^T = \begin{cases} \Delta_i(\mathfrak{R}), & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

同理可证得:

$$E_{\odot}^w(\mathfrak{R})E_{\otimes}(\mathfrak{R})^T = \begin{cases} -w_k, & \text{当 } i \in N_i \text{ 时} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中, N_i 是 i 的邻居节点,邻接矩阵 $A_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = -E_{\odot}^w(\mathfrak{R})E_{\otimes}(\mathfrak{R})^T$, 至此由拉普拉斯矩阵的定义可知:

$$\begin{aligned} E_{\otimes}^w(\mathfrak{R})E(\mathfrak{R})^T &= E_{\otimes}^w(\mathfrak{R})E_{\odot}(\mathfrak{R})^T + E_{\otimes}^w(\mathfrak{R})E_{\otimes}(\mathfrak{R})^T \\ &= \Delta_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) - A_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) \end{aligned}$$

证毕。

本节基于无向图边拉普拉斯矩阵的概念与性质构建了基

于边拉普拉斯矩阵的多智能体系统模型,接下来将给出有向边拉普拉斯矩阵的定义与代数性质。

对于 $n \times m$ 的有向图 $\mathfrak{R}$, 有向拉普拉斯矩阵定义如下:

$$L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = E(\mathfrak{R})^T E_{\otimes}(\mathfrak{R}) \quad (50)$$

则有向边邻接矩阵可以表示为:

$$[A_e(\mathfrak{R})]_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{当边 } e_k \text{ 与 } e_l \text{ 的起点相同} \\ -1, & \text{当边 } e_k \text{ 终点是 } e_l \text{ 的起点} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (51)$$

且 $L_{\odot}(\mathfrak{R})$ 与 $A_e(\mathfrak{R})$ 的关系表示为:

$$L_e(\mathfrak{R}) = I_m + A_e(\mathfrak{R}) \quad (52)$$

接下来进一步探索边拉普拉斯矩阵的代数性质,为后续将拉普拉斯矩阵引入多智能体系统建模中做铺垫,因此给出如下引理。

假设 $L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ 具有非零特征值为 λ , 其特征向量为 p , 可得:

$$L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})p = E_{\odot}(\mathfrak{R})(E(\mathfrak{R})^T p) = \lambda p \quad (53)$$

令 $\bar{p} = E(\mathfrak{R})^T p$ 且 $\bar{p} \neq 0$, 等式(49)两端同乘 $E(\mathfrak{R})^T$, 可得:

$$L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})\bar{p} = (E(\mathfrak{R})^T E_{\odot}(\mathfrak{R}))\bar{p} = \lambda \bar{p} \quad (54)$$

由式(53)和式(54)可知, $L_e(\mathfrak{R})$ 的特征值包含 $L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ 的全部非零特征值,同理可得 $L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ 的特征值包含 $L_e(\mathfrak{R})$ 的全部非零特征值,根据文献[27]可知, $\mathfrak{R}$ 中的 $L_e(\mathfrak{R})$ 和 $L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ 具有 $n-1$ 个相同的非零特征值。此时 $L_e(\mathfrak{R})$ 的零特征值的代数连通度^[28] 为 $m-n+1$, 可得 $\text{rank}(L_e(\mathfrak{R})) \geq n-1$, 结合 $L_e(\mathfrak{R}) = E(\mathfrak{R})^T E_{\odot}(\mathfrak{R})$ 和 $\text{rank}(E(\mathfrak{R})) = n-1$ 可知:

$$\text{rank}(L_e(\mathfrak{R})) \leq \text{rank}(E(\mathfrak{R})^T) = n-1 \quad (55)$$

上述内容表明 $L_e(\mathfrak{R})$ 和 $L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ 的代数性质相似,下节将把本节所涉及的理论知识应用于多智能体系统分析。

4 基于边拉普拉斯矩阵的多智能体系统建模

多智能体系统中分布式任务分配、分布式协同控制等问题的基础与核心是多智能体系统的一致性问题。多智能体系统通过各个智能体之间的信息交互、区域内信息共享来实现协同和编队^[29], 因此多智能体系统的内部信息交互模型处于核心位置。针对多智能体系统的建模,本文采用拉普拉斯矩阵来描述各个智能体成员之间的关联关系,目的是构建一个多智能体系统内部各成员智能体进行信息交互的机制以及对应的拓扑建模方式^[30], 并以此来降低复杂问题的求解难度。

智能体系统由多个智能体构成,其拓扑结构由 $\mathfrak{R}$ 表示,单个智能体的动力学方程如下:

$$\dot{x}_i = u_i \quad (56)$$

对于 $\mathfrak{R}$ 的边 $e_k, k=1, \dots, m$, 边状态的定义如下:

$$x_{e_k}(t) = x_i(t) - x_j(t) \quad (57)$$

其中, x_i 和 x_j 分别是 e_k 的起点和终点。假设 $x_e(t) = [x_{e_1}^T, \dots, x_{e_m}^T]^T$ 为 $\mathfrak{R}$ 中所有对应的边状态向量,结合关联矩阵 $E(\mathfrak{R})$ 的性质,可得:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= (E(\mathfrak{R})^T \otimes I_d)x(t) \\ &\Rightarrow \dot{x}(t) = -(L_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})^T \otimes I_d)x(t) \end{aligned} \quad (58)$$

式(58)可结合式(56)来更新单个智能体的动力学方程,

然后在其两端同乘 $E(\mathfrak{R})^\top$, 可得:

$$\dot{x}_e(t) = -(L_e(\mathfrak{R}) \otimes I_d) x_e(t) \quad (59)$$

由于有向图可以写作 $\mathfrak{R} = [E_L(\mathfrak{R}) E_F(\mathfrak{R})]$ 的联合形式, 则对应的入度关联矩阵 $E_{\otimes}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})$ 可以写作 $E_{\otimes}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) = [E_{\otimes L}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) E_{\otimes F}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})]$, 由此推理拉普拉斯矩阵 $L_e(\mathfrak{R})$ 可以写作分块矩阵:

$$\begin{aligned} L_e(\mathfrak{R}) &= E(\mathfrak{R})^\top E_{\otimes}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) \\ &= \begin{bmatrix} L_e^L(\mathfrak{R}) & E_L(\mathfrak{R})^\top E_{\otimes F}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) \\ E_F(\mathfrak{R})^\top E_{\otimes L}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) & L_e^F(\mathfrak{R}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (60)$$

如此可以获得智能体的信息交互反馈, 可表示为:

$$H_L: \begin{cases} \dot{x}_L(t) = -(L_e^L(\mathfrak{R}) \otimes I_d) x_L(t) + y_F(t) \\ y_L(t) = -((E_F(\mathfrak{R})^\top E_{\otimes L}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})) \otimes I_d) x_L(t) \end{cases} \quad (61)$$

$$H_F: \begin{cases} \dot{x}_F(t) = -(L_e^F(\mathfrak{R}) \otimes I_d) x_F(t) + y_L(t) \\ y_F(t) = -((E_L(\mathfrak{R})^\top E_{\otimes F}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})) \otimes I_d) x_F(t) \end{cases} \quad (62)$$

获得多智能体系统中智能体之间的信息反馈模型^[31]后, 接下来对多智能体系统进行模型降阶, 并基于生成树子图结构降低求解的复杂度。对生成树进行线性变换获得生成余树, 由于 $E_L(\mathfrak{R})T(\mathfrak{R}) = E_F(\mathfrak{R})$, 则通过线性变换 $T(\mathfrak{R})$ 表示生成余树, 具体如下:

$$x_F(t) = (T(\mathfrak{R})^\top \otimes I_d) x_L(t) \quad (63)$$

由前文关联矩阵的定义可知 $x_e(t)$ 可表示为:

$$x_e(t) = (R(\mathfrak{R})^\top \otimes I_d) x_L(t) \quad (64)$$

式(63)所推导出的生成余树可作为多智能体系统, 即式(64)的内反馈项, 将式(63)代入式(61)中获得降阶后的多智能体系统模型 $\hat{H}$ 如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_L(t) &= (-L_e^L(\mathfrak{R}) - E_L(\mathfrak{R})^\top E_{\otimes F}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})^\top (\mathfrak{R})^\top \otimes I_d) x_L(t) \\ &= -E_L(\mathfrak{R})^\top (E_{\otimes L}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R}) + E_{\otimes F}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})(\mathfrak{R})^\top \otimes I_d) x_L(t) \\ &= -(E_L(\mathfrak{R})^\top E_{\otimes}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{R})(\mathfrak{R})^\top \otimes I_d) x_L(t) \\ &= -(\hat{L}_e(\mathfrak{R}) \otimes I_d) x_L(t) \end{aligned} \quad (65)$$

5 数值仿真

为了验证以上结果的有效性, 本节将给出一个数值例子。假设多智能体系统的部分参数如下:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ C'C &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D'D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (66)$$

φ^2 取值为 4, π_0^{-1} 取值为 $\begin{bmatrix} 3 & 2.98 \\ 2.98 & 3 \end{bmatrix}$ 。初始状态为

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。令 $N=2$, $P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。通过分析 H_L 的决策优化推导与代数迭代运算, 得到正则 Riccati 方程式(17)的解如下所示:

$$\begin{aligned} P(2) &= \begin{bmatrix} 2.33 & 2.33 \\ 2.33 & 2.33 \end{bmatrix}, P(1) = \begin{bmatrix} 2.65 & 2.65 \\ 2.65 & 2.65 \end{bmatrix}, \\ P(0) &= \begin{bmatrix} 2.68 & 2.68 \\ 2.68 & 2.68 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

其中, $P(0) - \pi_0^{-1} < 0$ 。结合上述运算取得的结果来计算式(20)和式(21), 得到式(1)中描述的最优决策方案为:

$$\begin{aligned} u(2) &= \begin{bmatrix} -15.92 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varphi(2), \\ u(1) &= \begin{bmatrix} -9.84 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi(1) \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} u(0) &= \begin{bmatrix} -5.04 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi(0) \\ w(2) &= \begin{bmatrix} 7.84 \\ 7.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.64 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix} \varphi(2) \\ w(1) &= \begin{bmatrix} 4.92 \\ 4.92 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varphi(1) \end{aligned} \quad (69)$$

$$w(0) = \begin{bmatrix} 2.52 \\ 2.52 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.61 \\ 0 & 0.61 \end{bmatrix} \varphi(0)$$

在 H_F 优化中, 正则 Riccati 方程式(27)的解如下:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(2) &= \begin{bmatrix} 6.70 & 6.70 \\ 6.70 & 6.70 \end{bmatrix}, \tilde{P}(1) = \begin{bmatrix} 20.16 & 20.16 \\ 20.16 & 20.16 \end{bmatrix} \\ \tilde{P}(0) &= \begin{bmatrix} 12.65 & 12.65 \\ 12.65 & 12.65 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

参与者决策方案中的任意项 φ_k 可以通过矩阵变换化为 μ_k^1 。由式(32)得到 μ_k^1 的值如下:

$$\mu_1(2) = \begin{bmatrix} -0.2019 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi(2)$$

$$\mu_1(1) = \begin{bmatrix} 13.25 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi(1)$$

$$\mu_1(0) = \begin{bmatrix} 173.65 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi(0)$$

式(32)中的任意项 $\varphi(k) (k=2, 1, 0)$ 为:

$$\varphi(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \varphi(1) = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

将 φ_k 代入 μ_k^1 , 然后根据式(3), 可以分别得到最优指控方的策略, 如式(43)和式(44)所示:

$$\mu(2) = \begin{bmatrix} -15.92 \\ 0 \end{bmatrix}, \mu(1) = \begin{bmatrix} -9.84 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mu(0) = \begin{bmatrix} -5.04 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu(2) = \begin{bmatrix} -15.92 \\ 0 \end{bmatrix}, \mu(1) = \begin{bmatrix} -9.84 \\ 0 \end{bmatrix}, \mu(0) = \begin{bmatrix} -5.04 \\ 0 \end{bmatrix}$$

经过计算, H_L 范数形式的最优性能指标 $J_L = -6.35$ 。 H_F 范数形式的最优性能指标 $J_F = 79.65$ 。

6 实验仿真

6.1 仿真场景描述

本节将以防空反导领域中的要地防空作为实验场景, 并设计约束条件与目标函数作为仿真环境, 构建基于边拉普拉斯矩阵的多智能体系统, 对系统复杂性进行分析, 验证系统的可靠性与鲁棒性^[32]。

本节以要地防空作为背景, 在考虑山地影响的情况下, 使用本文算法进行多智能体系统建模, 并基于系统对战场火力单元进行部署^[33], 验证是否能在规定的来袭火力下保卫要地目标, 达到目标函数值。

6.2 实验仿真结果分析

本节将以多智能体系统的状态轨迹作为实验对象,以此证明基于图拉普拉斯矩阵构建的多智能体系统具有良好的鲁棒性和一致性。实验背景设为战场资源部署,图 1 给出了智能体稳定性的迭代曲线图,横轴为迭代次数,纵轴为多智能体系统收益函数,当迭代次数达到 2500 时,收益函数趋于平稳,证明多智能体系统趋于稳定,具有优越的鲁棒性。

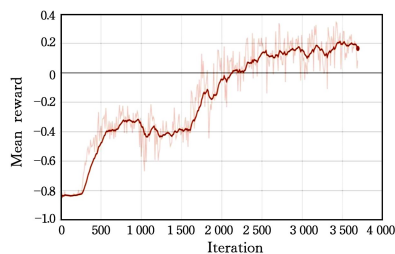


图 1 多智能体系统鲁棒性分析

Fig. 1 Robustness analysis of multi-agent system

图 2 给出了多智能体系统一致性分析图,由图可知,当迭代次数达到 1000 左右时,智能体边状态趋于平衡。由此可知,多智能体系统经过一定次数的迭代训练后是局部利普希茨连续^[34-35]的,具有优越的一致性。

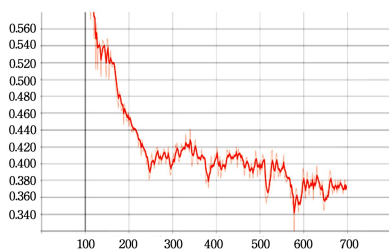


图 2 多智能体系统一致性

Fig. 2 Consistency of multi-agent system

结束语 本文建立了分布式作战环境下多智能体系统内部的博弈交互模型,求解出了多智能系统中基于性能指标的加权矩阵为半正定的指控方-参与方博弈问题。针对此问题,首先在指控方优化中获得最优决策 (μ, ω) ,其中控制 μ, ω 的大小获取 J_L 的最优值,由于其具有半正定的性质,且 μ 中存在任意项,经过矩阵变换,将之前求得的任意项转化为 J_F 中的待求解项,进一步优化 J_F 。综合上述优化过程,在正则假设下求解了 Riccati 方程并且给出了多主多从 Stackelberg 博弈模型的闭环解。同时基于图论的拉普拉斯矩阵相关理论知识对多智能体进行系统建模,分析其系统内部点状态与边状态之间的关系,通过构建多智能体系统并对其收益函数与边状态函数进行分析,证明了局部利普希茨连续,以此说明多智能体系统优越的一致性与鲁棒性。本文的研究工作不仅拓宽了当前分布式指挥控制领域的学术理论深度,并且建立了分布式多智能体系统内的交互博弈模型机制,为智能化作战奠定了理论基础。

参考文献

[1] WANG F Y, CC 5. 0: Intelligent Command and Control Systems in the Parallel Age[J]. Journal of Command and Control, 2015, 1(1): 107-120.

[2] CHEN L, SHEN Y. Stochastic Stackelberg differential reinsurance games under time-inconsistent mean-variance framework [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2019, 88(4): 409-444.

[3] ZHANG M Y, WANG M Y, WANG X D, et al. Research on Real-Time Task Allocation of UAV Group Collaboration Based on Improved Contract Network [J]. Aero Weaponry, 2019, 26(4): 38-46.

[4] LI X Q. Research on the Control of Hybrid H_2/H_∞ Based on Stackelberg Game Method [D]. Jinan: Shandong University, 2019.

[5] GALARZA-JIMENEZ F, TELLEZ-CASTRO D, SOFRONY J, et al. Cooperative Output Regulation for Multi-Agent Systems with EDMD Leader Approximation[J]. IFAC Papers OnLine, 2019, 52(20): 91-96.

[6] PIVOVARCHIKV. On multiplicity of eigenvalues in quantum graph theory[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 480(2): 977-986.

[7] FAN Y Z, WANG Y, BAO Y H, et al. Eigenvectors of Laplacian or signless Laplacian of hypergraphs associated with zero eigenvalue[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2019, 579(6): 244-261.

[8] OKANO T, NODA I. Adaptation Method of the Exploration Ratio Based on the Orientation of Equilibrium in Multi-Agent Reinforcement Learning Under Non-Stationary Environments [J]. Journal of Advanced Computational Intelligence & Intelligent Informatics, 2017, 21(5): 939-947.

[9] WU L L, JING Z X, WU Q H, et al. Equilibrium Interaction Strategy of Integrated Energy System Based on Stackelberg Game Model[J]. Automation of Electric Power Systems, 2018, 42(4): 142-150, 207.

[10] ZACKSENHOUSE M, NEMETS S, LEBEDEV M A, et al. Robust satisficing linear regression: Performance/robustness trade-off and consistency criterion[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 23(6): 1954-1964.

[11] CRETTEZ B. On Hobbes's state of nature and game theory [J]. Theory and Decision, 2017, 83(4): 499-511.

[12] WU Q, WANG F, ZHOU L G, et al. Method of Multiple Attribute Group Decision Making Based on 2-Dimension Interval Type-2 Fuzzy Aggregation Operators with Multi-granularity Linguistic Information[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(6): 1880-1903.

[13] SOLMEYER N, DIXON R, BALU R. Characterizing the Nash equilibria of a three-player Bayesian quantum game[J]. Quantum Information Processing, 2017, 16(6): 146.

[14] GREINER D, PERIAUX J, EMPERADOR M J, et al. Game Theory Based Evolutionary Algorithms: A Review with Nash Applications in Structural Engineering Optimization Problems [J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2017, 24(4): 703-750.

[15] HOLMBERG E, THORE C J, KLARBRING A. Game theory approach to robust topology optimization with uncertain loading [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2017, 55(4): 1383-1397.

[16] LIU X K,GE Y Y,LI Y. Stackelberg games for model-free continuous-time stochastic systems based on adaptive dynamic programming[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 363;301-306.

[17] CHUGH T,SINDHYA K,HAKANEN J,et al. Handling computationally expensive multiobjective optimization problems with evolutionary algorithms; A survey[J]. Soft Computing, 2019, 23(9) ;3137-3166.

[18] ZENG X L. Research on Aircraft Route Planning Method Based on Multi-Agent Co-Evolution [D]. Harbin; Harbin Engineering University, 2014.

[19] YAGER R R. Multi-Criteria Decision Making with Interval Criteria Satisfactions Using the Golden Rule Representative Value [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(2) ;1023-1031.

[20] CONWAY T J. More indefinite integrals from Riccati equations [J]. Integral Transforms and Special Functions, 2019, 30(12) ; 33-44.

[21] AZAD M,BABIĆ J,MISTRY M. Effects of the weighting matrix on dynamic manipulability of robots[J]. Autonomous Robots, 2019, 43(7) ;1867-1879.

[22] ZHANG H,LI L,XU J, et al. Linear quadratic regulation and stabilization of discrete-time systems with delay and multiplicative noise[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10) ;2599-2613.

[23] REN Y. Research on First-Order Multi - Agent System with Variable Parameter Quantizer[D]. Harbin; Harbin Industrial University, 2013.

[24] KONG F Q,WANG D D,SHEN Q. Robust target tracking of l_1-l_2 norm combined constraint [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2016, 37(3) ;690-697.

[25] MARCO A,MARTÍNEZ J J,VIAÑA R. Least squares problems involving generalized Kronecker products and application to bivariate polynomial regression [J]. Numerical Algorithms, 2019, 82(1) ;21-39.

[26] ZHANG H. Structural Characteristics of Strongly Connected K Quasi-Transitive Directed Graphs [D]. Taiyuan; Shanxi University, 2017.

[27] LUO W,SONG C N,XU Q X. Perturbation estimation for the parallel sum of Hermitian positive semi-definite matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2019, 67(10) ;1971-1984.

[28] REN W,BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynam-ically changing interaction topologies [J]. Automatic Control, IEEE Transactionson, 2005, 50(5) ;655-661.

[29] LI C Y,QU Z H,QI D L, et al. Distributed finite-time estimation of the bounds on algebraic connectivity for directed graphs [J]. Automatica, 2019, 107;289-295.

[30] STEGAGNO P, YUAN C Z. Distributed cooperative adaptive state estimation and system identification for multi-agent systems[J]. Control Theory & Applications, IET, 2019, 13(6) ; 815-822.

[31] ZHOU B,XU X T,LIU J G,et al. Information interaction model for the mobile communication networks[J]. Physica A:Statistical Mechanics and its Applications, 2019, 525;1170-1176.

[32] MA Y M. Research on Feedback Mechanism of Online Learning Based on Metacognition[D]. Chendu; Sichuan Normal University, 2016.

[33] ZHANG J,WANG G,SONG Y F, et al. Optimization of Air-Defense Resource Deployment Based on Adaptive SGD-Multiagent [J]. Systems Engineering and Electronic Technology, 2019, 41(7) ;1536-1543.

[34] WANG G,LI W M, HE J. Research on Resource Management of Distributed Air Defense Battlefield Based on Multi-Agent[J]. Fire Control & Command Control, 2003, 65(2) ;32-34.

[35] SU J H. The Existence And Uniqueness of Solutions to Stochastic Differential Equations with Non-Lipschitz Coefficients[D]. Hefei; University of Science and Technology of China, 2017.



ZHANG Jie, born in 1995, postgraduate. His main research interests include combat multi-agent based on deep learning, tactical air defense & guidance command and control system.



YUE Shao-hua, born in 1968, master, professor. Her main research interests include machine learning, command information system and intelligent command & control.