计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.200800074

基于多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的最优粒度选择方法

薛占熬　孙冰心　侯昊东　荆萌萌
河南师范大学计算机与信息工程学院　河南 新乡 453007
“智慧商务与物联网技术”河南省工程实验室　河南 新乡 453007

摘　要　为了对含有多属性的直觉犹豫模糊决策信息系统进行约简,获取最优粒度,运用多粒度粗糙集处理直觉犹豫模糊决策信息系统中的不确定信息,并对多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的最优粒度选择方法进行了研究。首先,在直觉犹豫模糊集的基础上引入属性信息,给出粗糙直觉犹豫模糊集的概念,提出乐观、悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下、上近似这4种模型,且研讨了它们的性质。其次,主要定义了基于悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集下近似的粒度质量相似度和内、外粒度重要度的计算公式,设计了其最优粒度选择算法。最后,通过葡萄酒测评的案例,分别基于乐观、悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下、上近似这4种情况,计算出最优粒度并进行了分析,验证了该算法在直觉犹豫模糊决策信息系统中的约简是有效的。

关键词:直觉犹豫模糊集;多粒度;粗糙集;粒度重要度;最优粒度选择
中图法分类号　TP181

Optimal Granulation Selection Method Based on Multi-granulation Rough Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets

XUE Zhan-ao,SUN Bing-xin,HOU Hao-dong and JING Meng-meng
College of Computer and Information Engineering,Henan Normal University,Xinxiang,Henan 453007,China
Engineering Lab of Henan Province for Intelligence Business & Internet of Things,Xinxiang,Henan 453007,China

Abstract　In order to obtain the optimal granulations after reduction from the intuitionistic hesitant fuzzy decision information system with multiple attributes,this paper deals with the uncertain information in this system from the perspective of multi-granulation rough sets,and studies optimal granulation selection method based on multi-granulation rough intuitionistic hesitant fuzzy sets. Firstly,on the basis of intuitionistic hesitant fuzzy sets,attribute information is introduced,and the concept of rough intuitionistic hesitant fuzzy sets is given. Then four upper and lower approximation models of optimistic and pessimistic multi-granulation rough intuitionistic hesitant fuzzy sets are proposed,and the related properties are discussed. Secondly,mainly based on the lower approximation of the pessimistic multi-granulation rough intuitionistic hesitant fuzzy set,this paper defines the granu-lation quality similarity degree and internal/external granulation importance degree,and the related algorithm of optimal granulation selection is designed. Finally,through the wine evaluation case,optimal granularities are calculated based on the four cases of optimistic and pessimistic multi-granulation rough intuitionistic hesitant fuzzy set's upper and lower approximation,then analyzes results. It is verified that algorithms are effective for the reduction of intuitionistic hesitant fuzzy decision information system.

Keywords　Intuitionistic hesitant fuzzy sets,Multi-granulation,Rough sets,Granulation importance degree,Optimal granulation selection

1　引言

作为一种处理不精确、不确定性知识的数学方法,Pawlak[1]提出的粗糙集理论利用上近似、下近似逼近的方法描述一个知识。由于经典粗糙集和大部分拓展粗糙集[2-6]是单粒度的,即只有一种二元关系,这并不足以处理生活中的各种多源信息系统或高维数据。Qian等[7-8]提出多粒度粗糙集(Multi-granulation Rough Sets,MRSs),每个对象采用多个等价关系对目标对象近似逼近,称基于“求同存异”决策策略的多粒度粗糙集模型为乐观多粒度粗糙集,另一种基于“求同排异”决策策略的多粒度粗糙集模型为悲观多粒度粗糙集。许多学者对其进行研究并提出了多种多粒度粗糙集的推广模

到稿日期:2020-08-12　返修日期:2020-10-22
基金项目:国家自然科学基金(62076089,61772176);河南省科技攻关项目(182102210078,182102210362)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(62076089,61772176) and Scientific and Technological Project of Henan Province of China(182102210078,182102210362).
通信作者:薛占熬(xuezhanao@163.com)

型[9-17]，来处理复杂的不确定信息。Wu 等[9]将传统信息系统中的每个粒度划分出相同个数的尺度，提出基于多粒度标记粗糙集的数据分析方法，并在此基础上进一步提出最优尺度选择方法[10]。Qian 等[11]基于决策理论粗糙集，构造多粒度决策理论粗糙集模型，结合多粒度粗糙集和决策粗糙集理论，讨论了 3 种形式的多粒度决策粗糙集理论之间的关系。Lin 等[12]建立基于邻域的多粒度粗糙集，来处理混合属性信息。Xue 等[13]提出优势关系上的多粒度程度粗糙直觉模糊集。Li 等[14]考虑到形式概念分析与粗糙集在一定程度上有互通性，对形式概念分析下的多粒度标记理论进行了改进。这些研究拓展了多粒度粗糙集的应用范围，为处理多粒空间中的不确定数据提供了理论方法。

对于处理不确定性信息，还可应用直觉模糊集等理论。直觉模糊集（Intuitionistic Fuzzy Sets，IFS）是由 Atanassov[18-19]提出的，该理论与传统模糊集相比，同时考虑了隶属、非隶属度与不确定度这 3 方面的信息，能更加灵活地描述某一对象的模糊程度，而在实际中元素的隶属度难以确定。Torra 等[20-21]提出的犹豫模糊集（Hesitant Fuzzy Sets，HFSs）用多个隶属度表示不确定信息。随后一些学者对其进行研究，如 Zhu 等[22]用多个可能隶属度和多个可能非隶属度表示对象的模糊程度，提出了对偶犹豫模糊集。但是对偶犹豫模糊集要求任意隶属度和任意非隶属度之和不大于 1，实际应用中会有所限制，因此 Peng 等[23]在多个隶属度和非隶属度的基础上，要求对于任意隶属度，存在一个非隶属度与之相加的和不大于 1，进而提出直觉犹豫模糊集（Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets，IHFSs），放松了对隶属度和非隶属度之间关系的要求，使直觉犹豫模糊集有更强的表达不确定性的能力。目前，运用直觉模糊集和犹豫模糊集进行属性约简的研究逐渐受到很多学者的关注，Sang 等[24]研究了直觉模糊有序决策表中相对知识粒度的属性约简方法，Singh 等[25]将直觉模糊量词引入粗糙集，提出一种基于直觉模糊量化粗糙集的信息系统属性约简新方法。Huang 等[26]在多尺度直觉模糊信息表中提出两种基于多粒度决策理论粗糙集的最优尺度选择算法。Zhang 等[27]基于多粒度犹豫模糊粗糙集提出一种近似约简方法来消除冗余粒度。基于犹豫模糊有序信息系统，Tan[28]定义了新的优势关系，解决了犹豫模糊有序信息系统中的属性约简问题。知识粒度的属性约简从一种新的视角简化特征集，保持决策信息不变，删除冗余属性。多粒度粗糙集能从多粒度的角度处理不确定性问题，本文将其引入含有多属性的直觉犹豫模糊决策信息系统中，构造多粒度粗糙直觉犹豫模糊集，并基于此研究了直觉犹豫模糊决策信息系统的属性约简，丰富了多粒度粗糙集的应用，为属性约简提供了新的方法。

本文针对直觉犹豫模糊决策信息系统的最优粒度选择问题，在直觉犹豫模糊集和多粒度粗糙集理论的基础上，首先给出粗糙直觉犹豫模糊集的概念，提出了多粒度粗糙直觉犹豫模糊集中的 4 种近似模型并讨论它们的性质。然后定义了直觉犹豫模糊决策信息系统中的粒度质量相似度和内、外粒度重要度的计算公式，获得最优粒度的约简算法。最后通过实例分析验证了该算法的有效性。

2 基础知识

2.1 直觉模糊集

定义 1[18-19] 设 U 是一个非空有限集合，在 U 上的直觉模糊集可表示为：

$$I=\{\langle x,\mu_I(x),\nu_I(x)\rangle \mid x\in U\}$$

其中，函数 $\mu_I(x):U\to[0,1]$ 和函数 $v_I(x):U\to[0,1]$ 分别表示 U 中元素属于 I 的隶属度和非隶属度，且满足条件 $0\leqslant\mu_I(x)+v_I(x)\leqslant 1$。$\forall x\in U$，元素 x 在 U 上关于直觉模糊集 I 的不确定度为 $\pi_I(x)=1-\mu_I(x)-\nu_I(x)$。由直觉模糊集导出的有序对 (μ_I,ν_I) 常被称为直觉模糊数[29]。

2.2 犹豫模糊集

定义 2[20-21] 设 U 为一个非空集合，U 上的一个犹豫模糊集是一个 x 作用于 U 时映射到 $[0,1]$ 子集的函数，表示为：

$$F=\{\langle x,h_F(x)\rangle \mid x\in U\}$$

其中，$h_F(x)$ 为区间 $[0,1]$ 上的数的集合，表示元素 $x\in U$ 对集合 F 可能的隶属度。为了方便，Xu 等[30]称 $h=h_F(x)$ 为犹豫模糊元素（Hesitant Fuzzy Element，HFE）。

设论域 U 上的所有犹豫模糊集的集合为 $HFS(U)$，对于 $\forall F,G\in HFS(U)$ 有如下定义和定理：

定义 3[20] 设 U 为一个非空论域，对于 $\forall x\in U$，$h_F(x)$ 和 $h_G(x)$ 为 HFE，则有如下运算。

（1）$h_{\neg F}(x)=\{1-\gamma \mid \forall\gamma\in h_F(x)\}$。

（2）给定一个犹豫模糊元素 h，下界 $h^-(x)$ 和上界 $h^+(x)$ 可定义为 $h^-(x)=\min h(x)$ 和 $h^+(x)=\max h(x)$。

（3）F 和 G 的并集 $F\underline{\cup}G$ 和交集 $F\bar{\cap}G$ 分别表示如下：

$$h_{F\underline{\cup}G}(x)=h_F(x)\underline{\vee}h_G(x)=\{\gamma\in(h_F(x)\cup h_G(x)) \mid \gamma\geqslant\max(h_F^-,h_G^-)\}$$

$$h_{F\bar{\cap}G}(x)=h_F(x)\bar{\wedge}h_G(x)=\{\gamma\in(h_F(x)\cup h_G(x)) \mid \gamma\leqslant\min(h_F^+,h_G^+)\}$$

定义 4[31] 设 U 为一个非空有限论域，$F,G\in HFS(U)$，假设对于 $\forall x\in U$，$h_F(x)\preceq h_G(x)$，即：

$$h_F(x)\preceq h_G(x) \text{ iff } h_F^-(x)\leqslant h_G^-(x),h_F^+(x)\leqslant h_G^+(x)$$

则称 F 为 G 的犹豫模糊子集，记为 $F\subseteq G$。如果 $F\subseteq G$ 且 $\exists x\in U$，使得 $h_F^-(x)<h_G^-(x)$ 或 $h_F^+(x)<h_G^+(x)$，则 F 是 G 的犹豫模糊真子集，记为 $F\subset G$。

定理 1[31] 设 U 为一个非空有限论域，$h_F(x)$ 和 $h_G(x)$ 为两个犹豫模糊元素，$\forall x,y\in U$，满足：

$$h_F(x)\bar{\wedge}h_G(y)\preceq h_F(x),h_F(x)\bar{\wedge}h_G(y)\preceq h_G(y)$$

$$h_F(x)\underline{\vee}h_G(y)\succeq h_G(y),h_F(x)\underline{\vee}h_G(y)\succeq h_F(x)$$

2.3 直觉犹豫模糊集

定义 5[23] 设 U 为一个非空论域，U 上的一个直觉犹豫模糊集 E 定义为：

$$E=\{\langle x,\Gamma_E(x),\Psi_E(x)\rangle \mid x\in U\}$$

其中，$\Gamma_E(x)$ 和 $\Psi_E(x)$ 为区间 $[0,1]$ 上的两个非空有限集合，分别表示 x 对于 E 的可能隶属度和可能非隶属度的集合。它们满足：对于每个 $x\in U$，$\forall\mu_E(x)\in\Gamma_E(x)$，$\exists v_E(x)\in\Psi_E(x)$，有 $0\leqslant\mu_E(x)+v_E(x)\leqslant 1$；且 $\forall v_E(x)\in\Psi_E(x)$，$\exists\mu_E(x)\in\Gamma_E(x)$，有 $0\leqslant\mu_E(x)+v_E(x)\leqslant 1$。

关于直觉犹豫模糊集有如下规定：

(1)$\Gamma^{+}(x)=\max\Gamma(x)$，$\Gamma^{-}(x)=\min\Gamma(x)$；$\Psi^{+}(x)=\max\Psi(x)$，$\Psi^{-}(x)=\min\Psi(x)$。

(2)$IHFS(U)$表示U上所有直觉犹豫模糊集的集合，如果U仅有一个元素x，则$\langle x,\Gamma_E(x),\Psi_E(x)\rangle$被称为直觉犹豫模糊数（Intuitionistic Hesitant Fuzzy Number，IHFN）。为了方便，将$IHFN$表示为$e=\langle\Gamma_e,\Psi_e\rangle$，其中$\Gamma_e$表示直觉犹豫模糊数$e$的隶属度集合，$\Psi_e$表示$e$的非隶属度集合，以下相同。

定义 6[23] 假设$e=\langle\Gamma_e,\Psi_e\rangle$，$e_1=\langle\Gamma_{e_1},\Psi_{e_1}\rangle$和$e_2=\langle\Gamma_{e_2},\Psi_{e_2}\rangle$为3个直觉犹豫模糊数，$\lambda>0$，则定义如下运算：

(1)$\lambda e=\langle\bigcup_{\mu_e\in\Gamma_e}\{1-(1-\mu_e)^{\lambda}\},\bigcup_{v_e\in\Psi_e}\{v_e^{\lambda}\}\rangle$；

(2)$e^{\lambda}=\langle\bigcup_{\mu_e\in\Gamma_e}\{\mu_e^{\lambda}\},\bigcup_{v_e\in\Psi_e}\{1-(1-v_e)^{\lambda}\}\rangle$；

(3)$e_1\oplus e_2=\langle\bigcup_{\mu_{e_1}\in\Gamma_{e_1},\mu_{e_2}\in\Gamma_{e_2}}\{\mu_{e_1}+\mu_{e_2}-\mu_{e_1}\cdot\mu_{e_2}\}\bigcup_{v_{e_1}\in\Psi_{e_1},v_{e_2}\in\Psi_{e_2}}\{v_{e_1}\cdot v_{e_2}\}\rangle$；

(4)$e_1\otimes e_2=\langle\bigcup_{\mu_{e_1}\in\Gamma_{e_1},\mu_{e_2}\in\Gamma_{e_2}}\{\mu_{e_1}\cdot\mu_{e_2}\}\bigcup_{v_{e_1}\in\Psi_{e_1},v_{e_2}\in\Psi_{e_2}}\{v_{e_1}+v_{e_2}-v_{e_1}\cdot v_{e_2}\}\rangle$。

定义 7 设U为非空有限论域，两个U上的直觉犹豫模糊集$E=\{\langle x,\Gamma_E(x),\Psi_E(x)\rangle\mid x\in U\}$，和$F=\{\langle x,\Gamma_F(x),\Psi_F(x)\rangle\mid x\in U\}$，对于$\forall x\in U$，若$E\leq F$，即：

$E\leq F$ iff $\Gamma_E(x)\leq\Gamma_F(x),\Psi_E(x)\geq\Psi_F(x)$

则称E为F的直觉犹豫模糊子集，记为$E\subseteq F$。如果$E\subseteq F$且$\exists x\in U$使得$\Gamma_E^{-}(x)<\Gamma_F^{-}(x)$，或$\Gamma_E^{+}(x)<\Gamma_F^{+}(x)$，或$\Psi_E^{-}(x)>\Psi_F^{-}(x)$，或$\Psi_E^{+}(x)>\Psi_F^{+}(x)$，则$E$是$F$的直觉犹豫模糊真子集，记为$E\subset F$。

定义 8 设U为非空有限集，对于$\forall E,F\in IHFS(U)$，E和F的并和交运算如下：

$E\underline{\bigcup}F=\{\langle x,\Gamma_E\underline{\vee}\Gamma_F,\Psi_E\bar{\wedge}\Psi_F\rangle\mid x\in U\}$

$E\bar{\bigcap}F=\{\langle x,\Gamma_E\bar{\wedge}\Gamma_F,\Psi_E\underline{\vee}\Psi_F\rangle\mid x\in U\}$

定义 9 设四元组$IS=(U,AT=A\cup E,V,f)$为直觉犹豫模糊决策信息系统，其中：

(1)$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，U是对象x_i的非空有限集合。

(2)$AT=\{A_1,A_2,\cdots,A_m,E\}$，$A_i$和$E$分别为条件属性和决策属性。

(3)$V=\bigcup_{A_i\in A}V_{A_i}\cup V_E$，$V_{A_i}$是属性$A_i$的值域，$V_E$是属性$E$的直觉犹豫模糊值域。

(4)$f:U\times AT\rightarrow V$，表示为每个对象的每个属性赋予一个信息值，即$\forall x\in U$，$\forall A_i\in A$，有$f(x,A_i)\in V_{A_i}$；对于$E$，有$f(x,E)=\langle\Gamma_E(x),\Psi_E(x)\rangle\in V_E$。其中，$f$是信息函数。

3 多粒度粗糙直觉犹豫模糊集模型

本节首先回顾多粒度粗糙集的概念；然后结合粗糙集与直觉犹豫模糊集，在一个等价关系的基础上提出粗糙直觉犹豫模糊集的定义，并将其拓展到多粒度情况，即基于多个等价关系提出多粒度粗糙直觉犹豫模糊集，并讨论它们的性质。

3.1 多粒度粗糙集

定义 10[7-8] 设信息系统$IS=\langle U,AT,V,f\rangle$，$AT=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$包含$m$个属性子集。$\forall X\subseteq U$，$X$关于$A$的乐观多粒度粗糙集的下、上近似分别定义为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)=\{x\in U\mid[x]_{A_1}\subseteq X\vee[x]_{A_2}\subseteq X\vee\cdots\vee[x]_{A_m}\subseteq X\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)=\neg(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(\neg X))$$

其中，$[x]_{A_i}(i=1,2,\cdots,m)$是等价关系$R_{A_i}$的等价类，$\neg X$是$X$的补集。若$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)\neq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X)$，则$(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X),\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{O}(X))$被称为$X$的乐观多粒度粗糙集。

定义 11[7-8] 设信息系统$IS=\langle U,AT,V,f\rangle$，$AT=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$包含$m$个属性子集。$\forall X\subseteq U$，$X$关于$A$的悲观多粒度粗糙集的下、上近似分别定义为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X)=\{x\in U\mid[x]_{A_1}\subseteq X\wedge[x]_{A_2}\subseteq X\wedge\cdots\wedge[x]_{A_m}\subseteq X\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X)=\neg(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(\neg X))$$

其中，$[x]_{A_i}(i=1,2,\cdots,m)$是等价关系$R_{A_i}$的等价类，$\neg X$是$X$的补集。若$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X)\neq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X)$，则$(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X),\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i}^{I}(X))$被称为关于$X$的悲观多粒度粗糙集。

3.2 粗糙直觉犹豫模糊集

定义 12 设U为非空有限论域，R是U上的一个等价关系，$[x]_R$为x所在等价类。$\forall E\in IHFS(U)$，基于R的粗糙直觉犹豫模糊集的下近似$\underline{R}(E)$和上近似$\overline{R}(E)$分别定义为：

$\underline{R}(E)=\{\langle x,\Gamma_{\underline{R}(E)}(x),\Psi_{\underline{R}(E)}(x)\rangle\mid x\in U\}$

$\overline{R}(E)=\{\langle x,\Gamma_{\overline{R}(E)}(x),\Psi_{\overline{R}(E)}(x)\rangle\mid x\in U\}$

其中，

$$\Gamma_{\underline{R}(E)}(x)=\bar{\bigwedge}_{y_i\in[x]_R}\Gamma_E(y_i),\Psi_{\underline{R}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{y_i\in[x]_R}\Psi_E(y_i)$$

$$\Gamma_{\overline{R}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{y_i\in[x]_R}\Gamma_E(y_i),\Psi_{\overline{R}(E)}(x)=\bar{\bigwedge}_{y_i\in[x]_R}\Psi_E(y_i)$$

如果$\underline{R}(E)=\overline{R}(E)$，则$E$是可定义的；否则，$E$是不可定义的，则称$(\underline{R}(E),\overline{R}(E))$是$E$基于$R$的粗糙直觉犹豫模糊集。

粗糙直觉犹豫模糊集的全集和空集分别定义为：$U=\{\langle x,\{1,1,\cdots,1\},\{0,0,\cdots,0\}\rangle\mid x\in U\}$和$\emptyset=\{\langle x,\{0,0,\cdots,0\},\{1,1,\cdots,1\}\rangle\mid x\in U\}$，以下相同。

定理 2 设U为非空有限论域，R是U上的一个等价关系，$[x]_R$为x所在等价类，$|[x]_{R_{A_i}}|$为$[x]_{R_{A_i}}$的基数。$U,\emptyset\in IHFS(U)$，$\forall E,F\in IHFS(U)$，基于R的粗糙直觉犹豫模糊集的下近似和上近似满足下列性质：

(1)$\underline{R}(U)=\overline{R}(U)=U$；

(2)$\underline{R}(\emptyset)=\overline{R}(\emptyset)=\emptyset$；

(3)$\underline{R}(E)\subseteq E\subseteq\overline{R}(E)$；

(4)如果$E\subseteq F$，则$\underline{R}(E)\subseteq\underline{R}(F)$，且$\overline{R}(E)\subseteq\overline{R}(F)$。

证明：

(1)$\forall x\in U$，$\forall\mu_U(x)\in\Gamma_U(x)$，$\forall v_U(x)\in\Psi_U(x)$，$\mu_U(x)=1$，$v_U(x)=0$，并且根据定义12，得$\overline{R}(U)=\{\langle x,\{1,1,\cdots,1\},\{0,0,\cdots,0\}\rangle\mid x\in U\}=\underline{R}(U)$。因此，$\underline{R}(U)=\overline{R}(U)=U$。

(2)证明过程与(1)类似。

(3)根据定义12得，$\forall x\in U$，

$$\Gamma_{\underline{R}(E)}(x)=\bar{\bigwedge}_{y_i\in[x]_R}\Gamma_E(y_i)$$

$$\Psi_{\underline{R}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{y_i\in[x]_R}\Psi_E(y_i)$$

可根据定理1得，$\Gamma_{\underline{R}(E)}(x)\leq\Gamma_E(x)$，$\Psi_{\underline{R}(E)}(x)\geq\Psi_E(x)$，又根据定义7得$\underline{R}(E)\subseteq E$。同理，$E\subseteq\overline{R}(E)$。因此，$\underline{R}(E)\subseteq E\subseteq\overline{R}(E)$。

(4)因为$E\subseteq F$，对于$\forall x\in U$，由定义7得$\Gamma_E(x)\leq\Gamma_F(x)$，$\Psi_E(x)\geq\Psi_F(x)$，再根据定义12得：

$$\begin{aligned}\Gamma_{\underline{R}(E)}(x)&=\bar{\bigwedge}_{y_i\in[x]_R}\Gamma_E(y_i)\\&=\Gamma_E(y_1)\bar{\wedge}\Gamma_E(y_2)\bar{\wedge}\cdots\bar{\wedge}\Gamma_E(y_{|[x]_R|})\\&\leq\Gamma_F(y_1)\bar{\wedge}\Gamma_F(y_2)\bar{\wedge}\cdots\bar{\wedge}\Gamma_F(y_{|[x]_R|})\\&=\bar{\bigwedge}_{y_i\in[x]_R}\Gamma_F(y_i)=\Gamma_{\underline{R}(F)}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{\underline{R}(E)}(x)&=\underline{\bigvee}_{y_i\in[x]_R}\Psi_E(y_i)\\&=\Psi_E(y_1)\underline{\vee}\Psi_E(y_2)\underline{\vee}\cdots\underline{\vee}\Psi_E((y_{|[x]_R|})\\&\geq\Psi_F(y_1)\underline{\vee}\Psi_F(y_2)\underline{\vee}\cdots\underline{\vee}\Psi_F((y_{|[x]_R|})\\&=\underline{\bigvee}_{y_i\in[x]_R}\Psi_F(y_i)=\Psi_{\underline{R}(F)}(x)\end{aligned}$$

因此，$\underline{R}(E)\subseteq\underline{R}(F)$。同理，$\overline{R}(E)\subseteq\overline{R}(F)$。

3.3 多粒度粗糙直觉犹豫模糊集

定义13 设$IS=(U,AT=A\cup E,V,f)$为一个直觉犹豫模糊决策信息系统，U是非空有限论域，非空属性集合$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$包含m个属性，R_{A_i}是关于属性A_i的等价关系，$[x]_{R_{A_i}}$是x在关系R_{A_i}上的等价类。$\forall E\in IHFS(U)$，其关于A_i的乐观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下近似和上近似分别定义为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)=\{\langle x,\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x),\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)\rangle|x\in U\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)=\{\langle x,\Gamma_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x),\Psi_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)\rangle|x\in U\}$$

其中，

$$\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\bar{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j)$$

$$\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\bar{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_E(y_j)$$

$$\Gamma_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\bar{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j)$$

$$\Psi_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\bar{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_E(y_j)$$

若$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)\neq\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)$，则称$(\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E),\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E))$为乐观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集。

定义14 设$IS=(U,AT=A\cup E,V,f)$为一个直觉犹豫模糊信息系统，U是非空有限论域，非空属性集合$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$包含m个属性，R_{A_i}是关于属性A_i的等价关系，$[x]_{R_{A_i}}$是x在关系R_{A_i}上的等价类。$\forall E\in IHFS(U)$，其关于A_i的悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下近似和上近似分别定义为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)=\{\langle x,\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x),\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)\rangle|x\in U\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)=\{\langle x,\Gamma_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x),\Psi_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)\rangle|x\in U\}$$

其中，

$$\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)=\bar{\bigwedge}_{i=1}^{m}\bar{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j)$$

$$\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_E(y_j)$$

$$\Gamma_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j)$$

$$\Psi_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)=\bar{\bigwedge}_{i=1}^{m}\bar{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_E(y_j)$$

若$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)\neq\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)$，则称$(\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E),\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E))$为悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集。

由定义13、定义14可知，当$R_{A_i}=R(i=1,2,\cdots,m)$时，多粒度粗糙直觉犹豫模糊集退化为粗糙直觉犹豫模糊集。

$|\Gamma_E(x)|=|\Psi_E(x)|=1$，即对任一$x$的隶属度和非隶属度满足$0\leqslant\mu(x)+v(x)\leqslant1$时，多粒度粗糙直觉犹豫模糊集退化为多粒度粗糙直觉模糊集。在此基础上，任一x的隶属度和非隶属度满足$\mu(x)+v(x)=1$时，多粒度粗糙直觉犹豫模糊集退化为多粒度粗糙模糊集。

定理3 设$IS=(U,AT=A\cup E,V,f)$为一个直觉犹豫模糊决策信息系统，U是非空有限论域，非空属性集合$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$包含m个属性，R_{A_i}是关于属性A_i的等价关系，$[x]_{R_{A_i}}$是x在R_{A_i}中的等价类。$\forall E\in IHFS(U)$，其关于A_i的多粒度粗糙直觉犹豫模糊集有如下性质：

(1)$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)=\bigcup_{i=1}^{m}\underline{R_{A_i}}(E)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)=\bigcap_{i=1}^{m}\overline{R_{A_i}}(E)$；

(2)$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)=\bigcap_{i=1}^{m}\underline{R_{A_i}}(E)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)=\bigcap_{i=1}^{m}\overline{R_{A_i}}(E)$；

(3)$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(X)=X$，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(\emptyset)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(\emptyset)=\emptyset$；

(4)$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(X)=X$，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(\emptyset)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(\emptyset)=\emptyset$；

(5)$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1\bar{\cap}E_2)=\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1)\bar{\cap}\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_2)$，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1\bar{\cap}E_2)=\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1)\bar{\cap}\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_2)$；

(6)$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1\underline{\cup}E_2)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1)\underline{\cup}\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_2)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1\underline{\cup}E_2)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1)\underline{\cup}\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_2)$；

(7)$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1\underline{\cup}E_2)=\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1)\underline{\cup}\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_2)$，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1\underline{\cup}E_2)=\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1)\underline{\cup}\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_2)$；

(8)$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1\bar{\cap}E_2)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1)\bar{\cap}\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_2)$，

$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1\bar{\cap}E_2)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1)\bar{\cap}\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_2)$；

(9) $\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)\subseteq E\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)$。

证明：

(1)根据定义 13，得：

$$\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j)$$

$$\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\overline{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_E(y_j)$$

$$\Gamma_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\overline{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_i\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j)$$

$$\Psi_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_i\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_E(y_j)$$

再根据定义 8 得，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)=\bigcup_{i=1}^{m}\underline{R_{A_i}}(E)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)=\bigcap_{i=1}^{m}\overline{R_{A_i}}(E)$成立。

(2)类似(1)的证明，略。

(3)根据定义 13 易证，略。

(4)根据定义 14 易证，略。

(5)根据定义 8 和定义 13，得：

$$\begin{aligned}
&\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1\cap E_2)\\
&=\{\langle x,\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1\cap E_2)}(x),\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1\cap E_2)}(x)\rangle\mid x\in U\}\\
&=\{\langle x,\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_{(E_1\cap E_2)}(y_j),\overline{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_{(E_1\cap E_2)}(y_j)\rangle\mid x\in U\}\\
&=\{\langle x,(\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_{E_1}(y_j))\bar{\wedge}(\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_{E_2}(y_j)),\\
&\quad(\overline{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_{E_1}(y_j))\underline{\vee}(\overline{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_{E_2}(y_j))\rangle\mid x\in U\}\\
&=\{\langle x,\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_{E_1}(y_j),\overline{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_{E_1}(y_j)\rangle\mid x\in U\}\cap\\
&\quad\{\langle x,\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_{E_2}(y_j),\overline{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Psi_{E_2}(y_j)\rangle\mid x\in U\}\\
&=\{\langle x,\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1)}(x),\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1)}(x)\rangle\mid x\in U\}\cap\{\langle x,\\
&\quad\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_2)}(x),\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_2)}(x)\rangle\mid x\in U\}\\
&=\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_1)\cap\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E_2)
\end{aligned}$$

同理，根据定义 14，得$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1\cap E_2)=\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_1)\cap\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E_2)$。

定理 3 的(6)，(7)和(8)，根据定义 8、定义 13 和定义 14，类似(5)的证明，略。

(9) $\forall x\in U$，根据定义 13 得：

$$\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j)$$

$$\Gamma_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)=\overline{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j)$$

由定义 4 和定理 1 得：

$$\min(\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j))\leqslant\Gamma_E^-(x)$$

$$\max(\overline{\bigwedge}_{y_j[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j))\leqslant\Gamma_E^+(x)$$

$$\min(\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j))\geqslant\Gamma_E^-(x)$$

$$\max(\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j))\geqslant\Gamma_E^+(x)$$

因此有：

$$\begin{aligned}
\Gamma^{+}_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)&=\max(\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j))\leqslant\Gamma_E^+(x)\\
&\leqslant\max(\overline{\bigwedge}_{i=1}^{m}\underline{\bigvee}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j))\\
&=\Gamma^{+}_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)\\
\Gamma^{-}_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)&=\min(\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}_{y_j\in[x]_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j))\leqslant\Gamma_E^-(x)\\
&\leqslant\min(\underline{\bigvee}_{i=1}^{m}\overline{\bigwedge}^{i=1}_{y_j\in[x]^{m}_{R_{A_i}}}\Gamma_E(y_j))\\
&=\Gamma^{-}_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)
\end{aligned}$$

则$\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)\leq\Gamma_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)$。又由定理 1 得，$\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)\leq\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)\leq\Gamma_E(x)\leq\Gamma_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)\leq\Gamma_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)$。

同理得，$\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)\geq\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)\geq\Psi_E(x)\geq\Psi_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)}(x)\geq\Psi_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)$。则由定义 7 得，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)\subseteq E\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{O}(E)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)$。

4 基于多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的最优粒度选择

本节基于多粒度粗糙直觉犹豫模糊集，讨论最优粒度的选择。首先，根据直觉犹豫模糊集的每个对象含有多个隶属度和非隶属度的特点，分别定义 4 种情况的粒度质量相似度和内、外部重要度，用阈值 α 排除不必要属性，筛选出必要属性；然后给出其相应的最优粒度选择算法；最后用实例进行模拟计算，得到最优粒度。

为了方便起见，粒度质量相似度和内、外重要度主要基于悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集下近似来定义。其他情况可以类似地定义，不再讨论。

定义 15 设 $IS=(U,AT=A\cup E,V,f)$为一个直觉犹豫模糊决策信息系统，其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$是非空有限论域，$|U|=s$，$|U|$为 U 的基数。非空属性集合 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$，$A_1',A_2'\subseteq A$，$t_1=|A_1'|$，$t_2=|A_2'|$分别为 A_1',A_2'中的属性个数，R_{A_i} 是关于属性 A_i 的等价关系，$E\in IHFS(U)$。A_1'和 A_2'关于 E 的悲观下近似粒度质量相似度为：

$$\rho_{\text{lower}}^{I}(A_1', A_2', E)=\frac{1}{s}\Big[\sum_{j=1}^{s}\Big|\operatorname{ave}\big(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t_1}R_{A_1'}}^{I}(E)}(x_j)\big)-\operatorname{ave}\big(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t_2}R_{A_2'}}^{I}(E)}(x_j)\big)\Big|+\sum_{j=1}^{s}\Big|\operatorname{ave}\big(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t_1}R_{A_1'}}^{I}(E)}(x_j)\big)-\operatorname{ave}\big(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t_2}R_{A_2'}}^{I}(E)}(x_j)\big)\Big|\Big]$$

其中,$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)=\{\langle x,\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x),\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)\rangle\mid x\in U\}$ 为 E 关于 A_i 的悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下近似,且 $\operatorname{ave}(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t_1}R_{A_1'}}^{I}(E)}(x))$,$\operatorname{ave}(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t_2}R_{A_2'}}^{I}(E)}(x))$,$\operatorname{ave}(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t_1}R_{A_1'}}^{I}(E)}(x))$ 和 $\operatorname{ave}(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t_2}R_{A_2'}}^{I}(E)}(x))$ 分别表示 $\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t_1}R_{A_1'}}^{I}(E)}(x)$,$\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t_2}R_{A_2'}}^{I}(E)}(x)$,$\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t_1}R_{A_1'}}^{I}(E)}(x)$ 和 $\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t_2}R_{A_2'}}^{I}(E)}(x)$ 中元素的平均值。

定义 16 设 $IS=(U,AT=A\cup E,V,f)$ 为一个直觉犹豫模糊决策信息系统,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 是非空有限论域,非空属性集合 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 包含 m 个属性,$A'\subseteq A$,$t=|A'|$ 为 A' 中的属性个数,R_{A_i} 是关于属性 A_i 的等价关系,$E\in IHFS(U)$。$\forall A_i\in A'$,定义在粒度集 A' 上,A_i 关于 E 的悲观下近似内部重要度为:

$$\begin{aligned}\operatorname{sig}_{\text{in}}^{II}(A_i,A',E)&=\rho_{\text{lower}}^{I}(A',A'-A_i,E)\\&=\frac{1}{s}\Big[\sum_{j=1}^{s}\Big|\operatorname{ave}\big(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j)\big)-\operatorname{ave}\big(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t-1}R_{A'-A_i}}^{I}(E)}(x_j)\big)\Big|\Big]+\sum_{j=1}^{s}\Big|\operatorname{ave}\big(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j)\big)-\operatorname{ave}\big(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t-1}R_{A'-A_i}}^{I}(E)}(x_j)\big)\Big|\Big]\end{aligned}$$

其中,$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)=\{\langle x,\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x),\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)\rangle\mid x\in U\}$ 为 E 关于 A_i 的悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下近似,且 $\operatorname{ave}(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j))$,$\operatorname{ave}(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t-1}R_{A'-A_i}}^{I}(E)}(x_j))$,$\operatorname{ave}(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j))$ 和 $\operatorname{ave}(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t-1}R_{A'-A_i}}^{I}(E)}(x_j))$ 分别代表 $\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j)$,$\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t-1}R_{A'-A_i}}^{I}(E)}(x_j)$,$\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j)$ 和 $\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t-1}R_{A'-A_i}}^{I}(E)}(x_j)$ 中元素的平均值。

定义 17 设 $IS=(U,AT=A\cup E,V,f)$ 为一个直觉犹豫模糊决策信息系统,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ 是非空有限论域,非空属性集合 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 包含 m 个属性,$A'\subseteq A$,$t=|A'|$ 为 A' 中属性个数,R_{A_i} 是关于属性 A_i 的等价关系,$E\in IHFS(U)$。$\forall A_i\in A-A'$,定义在粒度集 A' 上,A_i 关于 E 的悲观下近似外部重要度为:

$$\begin{aligned}\operatorname{sig}_{\text{out}}^{II}(A_i,A',E)&=\rho_{\text{lower}}^{I}(A'\cup A_i,A',E)\\&=\frac{1}{s}\Big[\sum_{j=1}^{s}\Big|\operatorname{ave}\big(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t+1}R_{A'\cup A_i}}^{I}(E)}(x_j)\big)-\operatorname{ave}\big(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j)\big)\Big|+\sum_{j=1}^{s}\Big|\operatorname{ave}\big(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t+1}R_{A'\cup A_i}}^{I}(E)}(x_j)\big)-\operatorname{ave}\big(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j)\big)\Big|\Big]\end{aligned}$$

其中,$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)=\{\langle x,\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x),\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}}^{I}(E)}(x)\rangle\mid x\in U\}$ 为 E 关于 A_i 的悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下近似。$\operatorname{ave}(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t+1}R_{A'\cup A_i}}^{I}(E)}(x_j))$,$\operatorname{ave}(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j))$,$\operatorname{ave}(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t+1}R_{A'\cup A_i}}^{I}(E)}(x_j))$ 和 $\operatorname{ave}(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j))$ 分别代表 $\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t+1}R_{A'\cup A_i}}^{I}(E)}(x_j)$,$\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j)$,$\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t+1}R_{A'\cup A_i}}^{I}(E)}(x_j)$ 和 $\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{t}R_{A'}}^{I}(E)}(x_j)$ 中元素的平均值。

根据上述定义可以看出,$\operatorname{sig}_{\text{in}}(A_i,A',E)\geqslant 0$,$\operatorname{sig}_{\text{out}}(A_i,A',E)\geqslant 0$。同时,有如下规定:

(1)若 $\operatorname{sig}_{\text{in}}(A_i,A',E)>\alpha$,则粒度 A_i 在粒度集 A' 上是重要的,当 $\operatorname{sig}_{\text{in}}(A_i,A',E)\leqslant\alpha$ 时,A_i 为 A' 上的 α 不必要属性。其中,α 越小,表示 A' 和 $A'-A_i$ 粒度质量越接近,才能使 A_i 成为 A' 上的 α 不必要属性。

(2)$\operatorname{sig}_{\text{out}}(A_i,A',E)$ 越大,说明在粒度集 A' 的条件下,粒度 A_i 越重要。当 $\operatorname{sig}_{\text{out}}(A_i,A',E)\leqslant\alpha$ 时,A_i 为 A' 条件下的 α 不必要属性。其中,α 越小,表示 A' 和 $A'\cup A_i$ 粒度质量越接近,才能使 A_i 成为 A' 条件下的 α 不必要属性。

定义 18 设 $IS=(U,AT=A\cup E,V,f)$ 为一个直觉犹豫模糊决策信息系统,粒度集 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 的核 $Core(A)$ 定义为:

$$Core(A)=\{A_i\in A\mid \operatorname{sig}_{\text{in}}(A_i,A,E)>\alpha\}$$

其中,$\operatorname{sig}_{\text{in}}(A_i,A,E)$ 为粒度 A_i 在粒度集 A 上关于 E 的内部重要度。

根据上述定义,设计算法 1,计算基于悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集下近似的最优粒度选择结果。

算法 1 基于悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集下近似的最优粒度选择算法

输入:直觉犹豫模糊决策信息系统 $\mathrm{IS}=(\mathrm{U},\mathrm{AT}=\mathrm{A}\cup\mathrm{E},\mathrm{V},\mathrm{f})$,$\mathrm{A}=\{\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_m\}$,粒度重要度阈值 α

输出:最优粒度集 $\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}$

1. 初始化:$\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}\leftarrow\varnothing$,$\mathrm{Core}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}(\mathrm{A})\leftarrow\varnothing$;
2. 对于 $\forall\mathrm{A}_i\in\mathrm{A}$,计算 A_i 关于 A 的悲观下近似内部重要度 $\operatorname{sig}_{\text{in}}^{\mathrm{II}}(\mathrm{A}_i,\mathrm{A},\mathrm{E})$;
3. 若 $\operatorname{sig}_{\text{in}}^{\mathrm{II}}(\mathrm{A}_i,\mathrm{A},\mathrm{E})>\alpha$,则 $\mathrm{Core}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}(\mathrm{A})\leftarrow\{\mathrm{A}_i\}\cup\mathrm{Core}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}(\mathrm{A})$;
4. $\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}\leftarrow\mathrm{Core}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}(\mathrm{A})$,若 $\rho(\mathrm{A})-\rho(\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}})>\alpha$,则 $\mathrm{A}-\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}\leftarrow\{\mathrm{A}_1',\mathrm{A}_2',\cdots,\mathrm{A}'_{|\mathrm{A}-\mathrm{B}|}\}$,其中,$\operatorname{sig}_{\text{out}}^{\mathrm{II}}(\mathrm{A}_i',\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}},\mathrm{E})\geqslant\operatorname{sig}_{\text{out}}^{\mathrm{II}}(\mathrm{A}'_{i+1},\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}},\mathrm{E})$,否则转步骤 7;
5. For i←1 to $|\mathrm{A}-\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}|$

   If $\rho(\mathrm{A})-\rho(\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}})>\alpha$ Then

   $\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}\leftarrow\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}\cup\{\mathrm{A}'_i\}$;

   Endif

   Endfor
6. $\mathrm{S}\leftarrow\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}-\mathrm{Core}(\mathrm{A})$,其中,$\mathrm{S}=\{\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2,\cdots,\mathrm{S}_{|\mathrm{B}-\mathrm{Core}(\mathrm{A})|}\}$,$\mathrm{B}'\leftarrow\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}$,若 $\operatorname{sig}_{\text{in}}^{\mathrm{II}}=(\mathrm{S}_i,\mathrm{B}',\mathrm{E})\leqslant\alpha$,则 $\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}\leftarrow\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}-\{\mathrm{S}_i\}$;
7. 输出 $\mathrm{B}_{\text{lower}}^{\mathrm{I}}$。

算法 1 中,步骤 1 对 B_{lower}^{I} 和 $Core_{\text{lower}}^{I}(A)$ 初始化,时间复杂度为 O(1);步骤 2 需要先计算每个对象的悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下近似,再计算各个粒度在 A 上的内部重要度,时间复杂度为 $O(|U|\cdot|A|^2)$;步骤 3 比较每个粒度内部重要度和 α 的大小,得到 $Core_{\text{lower}}^{I}(A)$,其时间复杂度为 $O(|U|)$;步骤 4 到步骤 6 类似步骤 2,时间复杂度都为 $O(|U|\cdot|A|^2)$;步骤 7 输出 B_{lower}^{I},时间复杂度为 O(1)。因

此,算法1的时间复杂度为 $O(|U|\cdot|A|^2)$。类似地,可以给出其他3种模型的相应算法,这里不再赘述。

5 实例分析

前面给出了多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的概念,并给出了算法1来计算最优粒度。本节通过对葡萄酒评估的案例进行分析,来论证本文算法的有效性。

本例中,葡萄酒的直觉犹豫模糊决策信息系统中的评估数据如表1所列。$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$ 为7种葡萄酒,$A=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ 为评价葡萄酒的5种属性,由5位品酒员分别给出属性的等价划分。其中,A_i 中相同的数字表示这些数字对应的葡萄酒在 A_i 中属于同一等价类。E 为专家给出的评价结果。根据表1,关于属性集 $A=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ 的5种等价关系为:

$$U/R_{A_1}=\{\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{x_5,x_7\},\{x_6\}\}$$
$$U/R_{A_2}=\{\{x_1\},\{x_2,x_3,x_5,x_7\},\{x_4,x_6\}\}$$
$$U/R_{A_3}=\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4,x_5\},\{x_6,x_7\}\}$$
$$U/R_{A_4}=\{\{x_1,x_2,x_7\},\{x_3,x_5\},\{x_4,x_6\}\}$$
$$U/R_{A_5}=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_4,x_7\},\{x_5\},\{x_6\}\}$$

表1 关于葡萄酒的直觉犹豫模糊决策信息系统

Table 1 Intuitionistic hesitation fuzzy decision information system about wine

U	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	E
x_1	1	1	1	1	1	$\langle x_1,\{0.8,0.9\},\{0.1,0.2\}\rangle$
x_2	1	2	1	1	1	$\langle x_2,\{0.7,0.8\},\{0.2\}\rangle$
x_3	1	2	2	2	1	$\langle x_3,\{0.61,0.72,0.83\},\{0.13,0.22,0.31\}\rangle$
x_4	1	3	2	3	2	$\langle x_4,\{0.28,0.39,0.5\},\{0.51,0.58\}\rangle$
x_5	2	2	2	2	3	$\langle x_5,\{0.3,0.4\},\{0.6\}\rangle$
x_6	3	3	3	3	4	$\langle x_6,\{0.23,0.35\},\{0.6,0.7\}\rangle$
x_7	2	2	3	1	2	$\langle x_7,\{0.5,0.6\},\{0.3,0.4\}\rangle$

U 上的直觉犹豫模糊集 E 为:

$$E=\{\langle x_1,\{0.8,0.9\},\{0.1,0.2\}\rangle,\langle x_2,\{0.7,0.8\},\{0.2\}\rangle,\langle x_3,\{0.61,0.72,0.83\},\{0.13,0.22,0.31\}\rangle,\langle x_4,\{0.28,0.39,0.5\},\{0.51,0.58\}\rangle,\langle x_5,\{0.3,0.4\},\{0.6\}\rangle,\langle x_6,\{0.23,0.35\},\{0.6,0.7\}\rangle,\langle x_7,\{0.5,0.6\},\{0.3,0.4\}\rangle\}$$

根据定义13,计算 E 关于 A_i 的乐观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下近似和上近似为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{5}R_{A_i}}^{O}(E)=\{\langle x_1,\{0.8,0.9\},\{0.1,0.2\}\rangle,\langle x_2,\{0.7,0.72,0.8\},\{0.2\}\rangle,\langle x_3,\{0.61,0.7,0.72,0.8\},\{0.2,0.22,0.31\}\rangle,\langle x_4,\{0.28,0.3,0.35,0.39,0.4,0.5\},\{0.51,0.58\}\rangle,\langle x_5,\{0.3,0.39,0.4\},\{0.6\}\rangle,\langle x_6,\{0.23,0.28,0.35\},\{0.6,0.7\}\rangle,\langle x_7,\{0.5,0.6\},\{0.3,0.4\}\rangle\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{5}R_{A_i}}^{O}(E)=\{\langle x_1,\{0.8,0.83,0.9\},\{0.13,0.2\}\rangle,\langle x_2,\{0.7,0.72,0.8,0.83\},\{0.13,0.2\}\rangle,\langle x_3,\{0.61,0.7,0.72,0.8,0.83\},\{0.13,0.2,0.22,0.31\}\rangle,\langle x_4,\{0.28,0.35,0.39,0.5\},\{0.5,0.5\}\rangle,\langle x_5,\{0.3,0.4\},\{0.6\}\rangle,\langle x_6,\{0.23,0.28,0.35\},\{0.6,0.7\}\rangle,\langle x_7,\{0.5,0.6\},\{0.3,0.4\}\rangle\}$$

根据定义14,E 关于 A_i 的悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的下、上近似为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{5}R_{A_i}}^{I}(E)=\{\langle x_1,\{0.28,0.39,0.5\},\{0.51,0.58\}\rangle,\langle x_2,\{0.28,0.3,0.39,0.4\},\{0.6\}\rangle,\langle x_3,\{0.28,0.3,0.39,0.4\},\{0.6\}\rangle,\langle x_4,\{0.23,0.28,0.3,0.35\},\{0.6,0.7\}\rangle,\langle x_5,\{0.28,0.3,0.39,0.4\},\{0.6\}\rangle,\langle x_6,\{0.23,0.28,0.35\},\{0.6,0.7\}\rangle,\langle x_7,\{0.23,0.28,0.3,0.35\},\{0.6,0.7\}\rangle\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{5}R_{A_i}}^{I}(E)=\{\langle x_1,\{0.8,0.83,0.9\},\{0.1,0.13,0.2\}\rangle\ \langle x_2,\{0.8,0.83,0.9\},\{0.1,0.13,0.2\}\rangle,\langle x_3,\{0.8,0.83,0.9\},\{0.1,0.13,0.2\}\rangle,\langle x_4,\{0.8,0.83,0.9\},\{0.1,0.13,0.2\}\rangle,\langle x_5,\{0.7,0.72,0.8,0.83\},\{0.13,0.2\}\rangle,\langle x_6,\{0.5,0.6\},\{0.3,0.4\}\rangle,\langle x_7,\{0.8,0.83,0.9\},\{0.1,0.13,0.2\}\rangle\}$$

根据算法1进行模拟计算,设粒度重要度阈值 $\alpha=0.015$,则有如下筛选葡萄酒最优属性的步骤。

步骤1 令 $B^{I}_{\rm lower}=\varnothing$,$Core^{I}_{\rm lower}(A)=\varnothing$。

步骤2 根据定义16,计算每个粒度 A_i 在粒度集 A 上关于 E 的悲观下近似内部重要度:

$$\begin{aligned}\mathrm{sig}^{II}_{\rm in}(A_1,A,E)&=\rho^{I}_{\rm lower}(A_1,A-A_1,E)\\&=\frac{1}{s}\Big(\sum_{j=1}^{s}\Big|\mathrm{ave}\big(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{l}R_A}^{I}(E)}(x)\big)-\mathrm{ave}\big(\Gamma_{\underline{\sum_{i=1}^{l-1}R_{A-A_1}}^{I}(E)}(x)\big)\Big|+\sum_{j=1}^{s}\Big|\mathrm{ave}\big(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{l}R_A}^{I}(E)}(x)\big)-\mathrm{ave}\big(\Psi_{\underline{\sum_{i=1}^{l-1}R_{A-A_1}}^{I}(E)}(x)\big)\Big|\Big)\\&=\frac{1}{7}\times(0.1675+0.2083)=0.0537\end{aligned}$$

$$\mathrm{sig}^{II}_{\rm in}(A_2,A,E)=\rho^{I}_{\rm lower}(A_2,A-A_2,E)=\frac{0.0475+0.055}{7}=0.0146$$

$$\mathrm{sig}^{II}_{\rm in}(A_3,A,E)=0.0162$$

$$\mathrm{sig}^{II}_{\rm in}(A_4,A,E)=0$$

$$\mathrm{sig}^{II}_{\rm in}(A_5,A,E)=0.00047$$

步骤3 由于 $\mathrm{sig}^{II}_{\rm in}(A_1,A,E)>\alpha$,$\mathrm{sig}^{II}_{\rm in}(A_3,A,E)>\alpha$,因此 $Core^{I}_{\rm lower}(A)=\{A_1,A_3\}$。

步骤4 令 $B^{I}_{\rm lower}=Core^{I}_{\rm lower}(A)$,由于 $\rho(A)-\rho(B)^{I}_{\rm lower}=0.0302>\alpha$,计算粒度 A_2,A_4 和 A_5 在粒度集 $B^{I}_{\rm lower}$ 上关于 E 的外部重要度,并将它们由大到小排列:

$$\mathrm{sig}^{II}_{\rm out}(A_2,B^{I}_{\rm lower},E)=\rho(B^{I}_{\rm lower}\cup A_2,B^{I}_{\rm lower},E)=0.0298$$

$$\mathrm{sig}^{II}_{\rm out}(A_4,B^{I}_{\rm lower},E)=0.0151$$

$$\mathrm{sig}^{II}_{\rm out}(A_5,B^{I}_{lower},E)=0.00047$$

步骤5 令 $B^{I}_{\rm lower}=\{A_1,A_2,A_3\}$,由于计算 $\rho(A)-$

$\rho(B^{I}_{\text{lower}})=0.00047<\alpha$，因此不再添加 A_4，A_5 至 B^{I}_{lower}。

步骤 6　由于 $\text{sig}^{II}_{\text{in}}(A_2, B^{I}_{\text{lower}}, E)>\alpha$，因此 $B^{I}_{\text{lower}}=\{A_1, A_2, A_3\}$。

步骤 7　输出最优粒度选择结果：A_1，A_2，A_3。

类似地，分别基于悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集和乐观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的上、下近似，计算在不同 α 下的最优粒度。由于 4 种模型中，粒度的内部重要度范围在[0，0.0888]内，以下选择将粒度重要度阈值 α 在[0，0.55]区间以 0.005 为步长依次取值，计算出如表 2 所列的不同粒度重要度阈值下的葡萄酒最优粒度筛选结果（表 2 中，ϕ 表示该模型下所有粒度内部重要度小于 0.055，$Core(A)=\phi$，不再进行后续的约简）。

表 2　参数对基于多粒度粗糙直觉犹豫模糊集的最优粒度选择结果的影响

Table 2　Influence of parameters on optimal granularity selection results based on multi-granulation rough intuitionistic hesitation fuzzy sets

α	lower approximation in pessimistic situation		upper approximation in pessimistic situation		lower approximation in optimistic situation		upper approximation in optimistic situation	
	$Core^{I}_{\text{lower}}(A)$	B^{I}_{lower}	$Core^{I}_{\text{upper}}(A)$	B^{I}_{upper}	$Core^{O}_{\text{lower}}(A)$	B^{O}_{lower}	$Core^{O}_{\text{upper}}(A)$	B^{O}_{upper}
0	$\{A_1,A_2,A_3,A_5\}$	$\{A_1,A_2,A_3,A_5\}$	$\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$	$\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$	$\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$	$\{A_2,A_3,A_5\}$/ $\{A_2,A_4,A_5\}$
0.005	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$	$\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$	$\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$	$\{A_2,A_3,A_5\}$/ $\{A_2,A_4,A_5\}$
0.01	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$	$\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$	$\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$	$\{A_2,A_3,A_5\}$/ $\{A_2,A_4,A_5\}$
0.015	$\{A_1,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$
0.02	$\{A_1\}$	$\{A_1,A_2\}$	$\{A_1,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_2,A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_4,A_5\}$	$\{A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$
0.025	$\{A_1\}$	$\{A_1,A_2\}$	$\{A_1,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_4,A_5\}$	$\{A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$
0.03	$\{A_1\}$	$\{A_1,A_2\}$	$\{A_1,A_3\}$	$\{A_1,A_2,A_3\}$	$\{A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_4,A_5\}$	$\{A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$
0.035	$\{A_1\}$	$\{A_1,A_2\}$	$\{A_3\}$	$\{A_1,A_3,A_4\}$	$\{A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_4,A_5\}$	$\{A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$
0.04	$\{A_1\}$	$\{A_1,A_2\}$	$\{A_3\}$	$\{A_1,A_3\}$	$\{A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_4,A_5\}$	$\{A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$
0.045	$\{A_1\}$	$\{A_1,A_2\}$	$\{A_3\}$	$\{A_1,A_3\}$	$\{A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_4,A_5\}$	$\{A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$
0.05	$\{A_1\}$	$\{A_1,A_2\}$	$\{A_3\}$	$\{A_1,A_3\}$	$\{A_4,A_5\}$	$\{A_2,A_4,A_5\}$	$\{A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$
0.055	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	$\{A_5\}$	$\{A_4,A_5\}$	$\{A_5\}$	$\{A_2,A_5\}$

由表 2 可以发现：1）因为多粒度粗糙直觉犹豫模糊集中的 4 种近似表示属性集 A 对 E 有不同影响（这 4 种近似和 E 之间的关系在定理 3 的(9)中已被证明，即悲观下近似和悲观上近似是 E 关于 A 的最小下近似和最大上近似，乐观下近似、乐观上近似是最接近 E 的下、上近似），所以不同的最优粒度选择模型在相同的 α 取值下有不同的约简结果。例如，在本例中，如果决策者选择基于悲观下近似进行粒度选择，则得出的最优粒度为对葡萄酒保守评价结果影响最大的粒度。决策者可根据对近似结果的要求选择合适的模型。2）α 的取值影响着约简过程的复杂性，α 越大，算法 1 的步骤 4 到步骤 6 越不可省略。并且随着 α 的增大，$Core(A)$ 中粒度个数越少，最优粒度个数也越少。因此，决策者可根据实际需要来选取合适的参数。

结束语　为了从直觉犹豫模糊环境中获取属性约简的最优粒度，本文首先将多粒度粗糙集理论引入直觉犹豫模糊决策信息系统，在直觉犹豫模糊集的基础上，提出粗糙直觉犹豫模糊集和多粒度粗糙直觉犹豫模糊集。然后，本文主要定义了基于悲观多粒度粗糙直觉犹豫模糊集下近似的粒度质量相似度和内、外粒度重要度的计算公式，设计了其最优粒度选择算法，并对算法的复杂度进行了分析。最后，通过葡萄酒测评的案例，验证了 4 种模型下的最优粒度选择算法在直觉犹豫模糊决策信息系统中的约简是有效的。本文提出的最优粒度选择方法可以去除系统中的冗余属性，使得最优属性集中的元素相互独立。从实例分析结果来看，粒度重要度阈值越大，则最优粒度越少；不同的粒度重要度阈值对约简效率也可能有不同的影响。但是在实际应用中，如何直接恰当地选择粒度重要度的阈值来保证约简的简便有效，需要我们进一步研究。

参 考 文 献

[1] PAWLAK Z. Rough set[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[2] THOMAS K V, NAIR L S. Rough intuitionistic fuzzy sets in a lattice[J]. International Mathematics Forum. 2011, 6(27): 1327-1335.

[3] ZHANG X Y, MO Z W, XIONG F, et al. Comparative study of variable precision rough set model and graded rough set model [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(1): 104-116.

[4] DOU H L, YANG X B, SONG X N, et al. Decision-theoretic rough set: a multicost strategy[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 71-83.

[5] XUE Z A, SI X M, XUE T Y, et al. Multi-granulation covering rough intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 32(1): 899-911.

[6] WANG Q, QIAN Y H, LIANG X Y, et al. Local neighborhood rough set[J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 153: 53-64.

[7] QIAN Y H, LIANG J Y, YAO Y Y, et al. MGRS: A Multi-granulation Rough Set[J]. Information Sciences, 2010, 180(6): 949-970.

[8] QIAN Y H, LIANG J Y, DANG C Y. Incomplete Multi-granulation Rough Set [J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics-Part A Systems and Humans, 2010, 40(2): 420-431.

[9] WU W Z, LEUNG Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables [J]. Information Sciences, 2011, 181(18): 3878-3897.

[10] WU W Z,LEUNG Y. Optimal scale selection for multi-scale decision tables [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2013,54(8):1107-1129.
[11] QIAN Y H,ZHANG H,SANG Y L,et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55(1):225-237.
[12] LIN G P,QIAN Y H,LI J J. NMGRS:Neighborhood-based multigranulation rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2012,53(7):1080-1093.
[13] XUE Z A,LV M J,HAN D J,et al. Multi-granulation graded rough intuitionistic fuzzy sets models based on dominance relation[J]. Symmetry,2018,10(10),446.
[14] LI J H,LI Y F,MI Y L,et al. Meso-granularity labeled method for multi-granularity formal concept analysis[J]. Journal of Computer Research and Development,2020,57(2):447-458.
[15] TAN A H,SHI S W,WU W Z,et al. Granularity and entropy of intuitionistic fuzzy information and their applications[J]. IEEE Transactions on Cybernetics,2020. DOI:10.1109/tcyb.2020.2973379.
[16] QIAN J,LIU C H,MIAO D Q,et al. Sequential three-way decisions via multi-granularity[J]. Information Sciences,2020,507:606-629.
[17] XUE Z A,ZHAO L P,LIN S,et al. Three-way decision models based on multigranulation support intuitionistic fuzzy rough sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2020,124:147-172.
[18] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1986,20(1):87-96.
[19] ATANASSOV K T. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1989,33(1):37-45.
[20] TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems,2010,25(6):529-539.
[21] TORRA V,NARUKAWA Y. On hesitant fuzzy sets and decision[C]// 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. IEEE,2009:1378-1382.
[22] ZHU B,XU Z S,XIA M M. Dual hesitant fuzzy sets [J]. Journal of Applied Mathematics,2012,879629:1-13.
[23] PENG J J,WANG J Q,WU X H,et al. The fuzzy cross-entropy for intuitionistic hesitant fuzzy sets and their application in multi-criteria decision-making[J]. International Journal of Systems Science,2015,46(13):2335-2350.
[24] SANG B B,ZHANG X Y,XU W H. Attribute Reduction of Relative Knowledge Granularity in Intuitionistic Fuzzy Ordered Decision Table[J]. Filomat,2018,32(5):1727-1736.
[25] SINGH S,SHREEVASTAVA S,SOM T,et al. Intuitionistic fuzzy quantifier and its application in feature selection[J]. International Journal of Fuzzy Systems,2019,21(2):441-453.
[26] HUANG B,WU W Z,YAN J,et al. Inclusion measure-based multi-granulation decision-theoretic rough sets in multi-scale intuitionistic fuzzy information tables[J]. Information Sciences,2020,507:421-448.
[27] ZHANG H D,HE Y P,MA W Y. An approximation reduction approach in multi-granulation hesitant fuzzy decision information system[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems,2019,37(1):1555-1567.
[28] TAN J. Hesitant fuzzy attribute reduction of ordered information system[D]. Chengdu:Xihua University,2019.
[29] XU Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2007,15(6):1179-1187.
[30] XU Z S,XIA M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multiattribute decision-making[J]. International Journal of Intelligent Systems,2012,27(9):799-822.
[31] YANG X B,SONG X N,QI Y S,et al. Constructive and axiomatic approaches to hesitant fuzzy rough set[J]. Soft Computing,2014,18(6):1067-1077.

XUE Zhan-ao, born in 1963, Ph.D, professor, is a senior member of China Artificial Intelligence. His main research interests include basic theory of artificial intelligence, rough sets theory, fuzzy sets, and three-way decision theory.