计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.201200140

基于公理化模糊集合的模糊推理方法

康　波　　潘小东　　王　虎
西南交通大学数学学院　成都 611756

摘　要　以公理化模糊集合理论作为基础,把模糊推理看成两个模糊隶属空间之间的映射,利用输入模糊集合在模糊隶属空间中的构成方式,给出了模糊推理输出结果的3种基本形式。对于强否定算子、t-模算子、t-余模算子,利用Minkowski积分形式的距离讨论了这些算子在模糊隶属空间中的扰动性,并在此基础之上分析所提模糊推理方法的连续性。

关键词:公理化模糊集合;模糊推理;模糊隶属空间;扰动性;连续性
中图法分类号　TP273

Fuzzy Reasoning Method Based on Axiomatic Fuzzy Sets

KANG Bo,PAN Xiao-dong and WANG Hu
School of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China

Abstract　Based on the axiomatic fuzzy set theory,this paper regards fuzzy reasoning as the mapping between two fuzzy membership spaces,and gives three basic forms of fuzzy reasoning output results by using the composition of input fuzzy sets in fuzzy membership spaces. For strongly negative operators,t-modulus operators and t-comodule operators,the perturbation of these operators in fuzzy membership space is discussed by using Minkowski integral distance,and the continuity of fuzzy reasoning method proposed in this paper is analyzed on this basis.

Keywords　Axiomatic fuzzy sets,Fuzzy reasoning,Fuzzy membership space,Perturbation,Continuity

1　引言

1973年,模糊集合的创始人Zadeh教授[1-2]首次提出模糊推理的基本理论框架——CRI方法。次年,该方法被用于工业自动控制,引起了大量学者的关注[3-5]。但是,CRI方法缺少严格的逻辑基础,且不具备还原性。为了弥补这些不足,王国俊教授在1999年从逻辑的严格性角度出发提出了模糊推理的全蕴涵三I方法[6]。2002年,宋士吉[7]又从模糊系统的设计等角度改进了全蕴涵三I方法,提出反向三I方法。从模糊推理方法的性质上分析,尤其在还原性方面,邹祥福认为以上方法并不满足无条件还原性。因此,2010年邹祥福、裴道武[8]从无条件还原性等角度提出了SIS算法。2013年,郑慕聪等[9]针对剩余型直觉蕴涵算子,提出直觉模糊推理IFMP问题的三I方法和分解方法,并给出两种方法的求解公式。2018年,唐益明等[10]将模糊推理与模糊系统相结合,提出了由三I算法推广得到的对称蕴涵算法,它不仅有三I算法的许多优势,且具有更好的实用性与逻辑意义。同年,唐家寅[11]从直觉模糊集出发,针对剩余型直觉模糊蕴涵算子,给出了直觉模糊推理的反向三I算法、反向a-三I算法、反向三I约束算法的求解公式。2019年,他又以区间值直觉模糊剩余型伴随对,给出了区间值直觉模糊推理的全蕴涵算法[12]。

然而,现有的这些模糊推理方法都具有一个共同的特点,就是认为模糊推理的大前提$A\rightarrow B$包含了整个论域上关于推理的全部信息,从而试图通过将小前提A^*与大前提$A\rightarrow B$以某种方式结合而得到推理结果B^*。不同的结合方式就产生了不同的模糊推理方法。举例来说,关于汽车的模糊控制系统,大前提是模糊控制规则“若汽车的速度‘慢’,则施加给油门的力‘大’”,而小前提是“汽车的速度‘快’”。在这种情况下,无论我们采用什么样的模糊推理方法,都很难得到一个合理的推理结果。原因在于,大前提描述的仅仅是汽车在速度论域上的局部信息(慢),而小前提所给出的也仅仅是关于汽车速度的局部信息(快),并且这个局部信息与大前提所描述的局部信息关系很弱,在这种情况之下,如果没有更多的补充信息,要根据大前提和小前提的信息去获得推理结果在逻辑上是非常牵强的。

2018年,潘小东等[14]从模糊现象的本质出发提出了模糊集合的公理化定义,从整体或全局的观点给出关于模糊概念的新认识。公理化模糊集合是对Zadeh意义下的模糊集的严格化、明确化、清晰化。在公理化模糊集合的框架下,模糊集合产生于某个已知的模糊划分,基于模糊划分就可以给出公理化模糊集合的严格定义。

令论域$U=[a,b]\subset R$,$x\in U$,U上的一个模糊划分为$\widetilde{U}=\{u_{A_1}(x),\cdots,u_{A_n}(x)\}$,$n\in N^+$,其中函数$u_i:U\rightarrow[0,1](i=1,\cdots,n)$定义为$x$隶属于类$A_i$的程度,并且满足以下条件:

(1) $\forall x\in U$,至少存在一个$i\in\bar{n}$使得$u_i(x)>0$;

(2) $\forall i\in\bar{n}$,函数$u_i(x)$在U上连续;

基金项目:国家自然科学基金(61673320)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61673320).
通信作者:康波(970269861@qq.com)

(3) $\forall i\in\bar{n}$，至少存在点 $x_0\in U$ 使得 $u_i(x_0)=1$；

(4) $\forall i\in\bar{n}$，如果在点 $x_0\in U$ 处满足 $u_i(x_0)=1$，那么 $u_{A_i}(x)$ 在 $[a,x_0]$ 上不减，在 $[x_0,b]$ 上不增；

(5) $\forall x\in U$，满足 $0<u_{A_1}(x)+\cdots+u_{A_n}(x)\leqslant 1$。

本文考虑到模糊推理的一般形式：

$$
\begin{array}{ll}
\text{大前提：} & A_1\to B_1 \\
 & \cdots \\
 & A_n\to B_n \\
\text{小前提：} & A^* \\
\text{结论：} & B^*
\end{array}
\tag{1}
$$

其中，$A_1,\cdots,A_n$ 和 $B_1,\cdots,B_n$ 分别来自于论域 U 和 V 上的某个模糊划分。

文献[6]一般采用先聚合后推理(FATI)或者先推理后聚合(FITA)的方法来求解，这两种方法都是通过最基本的FMP规则相关方法，利用聚合间接求模糊推理的一般形式，聚合的方法多种多样，导致推理结果也各不相同，因而很难判断推理方法的合理性。而基于模糊公理化定义下的模糊推理直接考虑模糊推理的一般形式，把模糊推理看成两个模糊隶属空间之间的映射。

对于模糊推理方法性质的研究也是必不可少，例如还原性、连续性和鲁棒性等，其中模糊推理的连续性经常被讨论[15-19]。而与本文的连续性有所区别，我们将在第5节重点阐述。

2 预备知识

本节主要介绍后面所用到的一些概念、结论和符号。

定义 1[20] 设 X 为论域，对 $\lambda\in\mathbf{R}^+$，定义映射：

$H^{(\lambda)}:F(X)\to F(Y)$

$A\mapsto H^{(\lambda)}(A),H^{(\lambda)}(A)(x)\triangleq(A(x))^{\lambda}$

称 $H^{(\lambda)}$ 为语气算子；当 $\lambda>0$ 时，称 $H^{(\lambda)}$ 为集中化算子；当 $\lambda<0$ 时，称 $H^{(\lambda)}$ 为弱化算子。

λ 可以用 r 表示，后面只需要满足 $\lambda\in Q^+$，Q^+ 为正有理数。

下面是一些常用的语气算子：

[很]$=H^{(2)}$，[极]$=H^{(4)}$，[相当]$=H^{(1.25)}$，[比较]$=H^{(0.75)}$，[有点]$=H^{(0.5)}=$[略]，[稍微有点]$=H^{(0.25)}$。

定义 2[12] 设 $(X,\leqslant)$ 为偏序集，映射 $N:X\to X$ 且 $\forall a,b\in X$，满足：

(1) $a\leqslant b\Rightarrow N(b)\leqslant N(a)$（逆序对应）；

(2) $N(N(a))=a$（对合律或复原律）。

称 N 为 X 上的伪补或逆序对合算子。逆序对合算子也叫强否定算子。

例 1 (1) 设 $N:[0,1]\to[0,1]$，且 $\forall a\in[0,1]$，$N(a)=1-a$，则称 N 为 $[0,1]$ 上的伪补。记这个算子为 N_1。

(2) 设 $N:[0,1]\to[0,1]$，且 $\forall a\in[0,1]$，$N(a)=\dfrac{1-a}{1+\lambda a}$，$\lambda\in(-1,+\infty)$，则 N 为 $[0,1]$ 上的伪补。记这个算子为 N_2。特别地，当 $\lambda=0$ 时，有 $N_1=N_2$。

下面给出一些常见的 t-模算子和 t-余模算子，如表1和表2所列。

表 1 常见的 t-模算子

Table 1 Common t-module operators

Name	Symbol	$a\otimes b$
Minimum	$\otimes_M$	$\min(x,y)$
Product	$\otimes_P$	xy
Lukasiewicz	$\otimes_L$	$\max(x+y-1,0)$
Drastic product	$\otimes_D$	$\begin{cases}\min(x,y), & \text{if } x=1 \text{ or } y=1\\ 0, & \text{other}\end{cases}$

表 2 常见的 t-余模算子

Table 2 Common t-comodule operators

Name	Symbol	$a\oplus b$
Maximum	$\oplus_M$	$\max(x,y)$
Probabilistic sum	$\oplus_P$	$x+y-xy$
Lukasiewicz	$\oplus_L$	$\min(x+y,1)$
Drasticsum	$\oplus_D$	$\begin{cases}\max(x,y), & \text{if } x=0 \text{ or } y=0\\ 1, & \text{other}\end{cases}$

注意，这里 $\otimes_D\leqslant\otimes_L\leqslant\otimes_P\leqslant\otimes_M\leqslant\oplus_M\leqslant\oplus_P\leqslant\oplus_L\leqslant\oplus_D$。

本文以公理化模糊集合理论作为基础，研究模糊推理方法。下面将给出模糊集合的公理化定义。

定义 3[14] 设 $U=[a,b]\subset R$，$\tilde{U}=\{u_{A_1}(x),\cdots,u_{A_n}(x)\}$，$n\in\mathrm{N}^+$，是 U 上的一个模糊划分。定义集合 $F(\tilde{U})$ 如下：

(1) 若存在 $i\in\bar{n}$ 使得 $u_A(x)=u_i(x)$ 对所有的 $x\in U$ 都成立，则 $A=\{(x,u_A(x))\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$；

(2) 若 $u_A(x)=\bar{u}(x)=1$ 对所有的 $x\in U$ 都成立，则 $A=\{(x,u_A(x))\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$；

(3) 若 $u_A(x)=\underline{u}(x)=0$ 对所有的 $x\in U$ 都成立，则 $A=\{(x,u_A(x))\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$；

(4) 若 $A=\{(x,u_A(x))\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$ 且 $r\in\mathrm{Q}^+$，则 $A^r=\{(x,u_A(x)^r)\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$；

(5) 若 $A=\{(x,u_A(x))\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$，且 N 是定义在 $[0,1]$ 上的强否定，则 $A^N=\{(x,u_A(x)^N)\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$；

(6) 若 $A=\{(x,u_A(x))\mid x\in U\}$，$B=\{(x,u_B(x))\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$，且 $\otimes$ 是一个三角模，则 $A\cap_{\otimes}B=\{(x,u_A(x)\otimes u_B(x))\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$；

(7) 若 $A=\{(x,u_A(x))\mid x\in U\}$，$B=\{(x,u_B(x))\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$，且 $\oplus$ 是一个三角余模，则 $A\,U_{\oplus}B=\{(x,u_A(x)\oplus u_B(x))\mid x\in U\}\in F(\tilde{U})$；

(8) $F(\tilde{U})$ 不再包括其它元素。

$F(\tilde{U})$ 称为由 $\tilde{U}$ 生成的模糊隶属空间，$F(\tilde{U})$ 中的元素称为定义在 U 上且关于模糊划分 $\tilde{U}$ 的模糊集合。

为了方便，后面用符号 $A(x)$ 代替 $u_A(x)$ 表示 x 隶属于 A 的程度。这里的强否定运算形式 a^N 与定义2中的 $N(a)$ 是一样的。

3 基于公理化模糊集的模糊推理方法

设论域 X 和 Y 的模糊划分分别为 $\tilde{X}=\{A_1(x),A_2(x),\cdots,A_n(x)\}$，$\tilde{Y}=\{B_1(y),B_2(y),\cdots,B_m(y)\}$ $(m,n\in\mathrm{N}^+)$，在 X 和 Y 上的模糊集之集分别为 $F(\tilde{X})$ 和 $F(\tilde{Y})$。模糊推理的一般形式变为：

大前提:$A_1(x) \to B_{s_1}(y)$

$A_2(x) \to B_{s_2}(y)$

$\cdots$

$A_n(x) \to B_{s_n}(y)$　(2)

小前提:$A^*(x)$

结论:$B^*(y)$

其中,$A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x), A^*(x) \in F(\widetilde{X})$,$B_1(y)$,$B_2(y), \cdots, B_m(y), B^*(y) \in F(\widetilde{Y})$,$s_1, s_2, \cdots, s_n \in \mathrm{N}^+$ 且 $1 \leqslant s_1, s_2, \cdots, s_n \leqslant m$。我们可以把$A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)$和$B_1(y), B_2(y), \cdots, B_m(y)$分别看作模糊隶属空间 $F(\widetilde{X})$和 $F(\widetilde{Y})$的一组基。因此,给出的A^*一定由$A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)$通过 r,N,$\otimes$和$\oplus$运算生成。若A^*由$A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)$通过 r,$\otimes$和$\oplus$运算生成,则我们认为$B^*(y)$是由$A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)$的像$B_{s_1}(y), B_{s_2}(y), \cdots, B_{s_n}(y)$通过 r,$\otimes$和$\oplus$运算得到的。

注意:论域 X 和 Y 上的模糊划分中类$A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)$和$B_1(y), B_2(y), \cdots, B_m(y)$的个数可以不相等,即 m 与 n 可以不相等。

例如,设 X 为“汽车速度状态”,Y 为“踩油门的程度”,X 和 Y 的模糊划分分别为$\widetilde{X}=\{$快,中,慢$\}$和$\widetilde{Y}=\{$轻,适中,重$\}$。于是,考虑下面的推理规则:

若汽车的速度快,则踩油门的程度轻;

若汽车的速度中,则踩油门的程度适中;

若汽车的速度慢,则踩油门的程度重。

如果给出汽车的速度状态不在上述规则的前件中,那么一定可以由上述规则的前件{快,中,慢}通过一定的组合得到,相应的“踩油门的程度”也可以由上述规则的后件{轻,适中,重}通过一定的组合得到。而这个组合就是语气运算 r、交运算$\cap_{\otimes}$和并运算$\cup_{\oplus}$。如“汽车的速度‘有点快’”是由“汽车速度的‘快’”通过语气运算“有点”得到的,则“踩油门的程度”由“轻”的程度通过语气运算得到。

从模糊逻辑的角度,对模糊推理形式(2),我们根据小前提A^*在模糊隶属空间中的构成方式给出结论$B^*(y)$的 3 种基本形式。

(1)若$A^*(x)=A_i^r(x)$,则$B^*(y)=B_{s_i}^{f(r)}(y)$,满足 $r=f(r)=1$。其中 $1 \leqslant i \leqslant n$,$1 \leqslant s_i \leqslant m$。这里的 f 关于 r 是连续且单调的。

(2)若$A^*(x)=A_i(x) \otimes_1 A_j(x)$,则$B^*(y)=B_{s_i}(y) \otimes_2 B_{s_j}(y)$,其中 $1 \leqslant i, j \leqslant n$,$1 \leqslant s_i, s_j \leqslant m$。

(3)若$A^*(x)=A_i(x) \oplus_1 A_j(x)$,则$B^*(y)=B_{s_i}(y) \oplus_2 B_{s_j}(y)$,其中 $1 \leqslant i, j \leqslant n$,$1 \leqslant s_i, s_j \leqslant m$。

注 1:若给出的$A^*(x)$可以由某些规则的前件多次运算生成,则$B^*(y)$是由这些前件的像通过相应的运算次数生成。在这里我们只需要考虑上述 3 种最基本的形式,多次的运算可以通过以上方式合成。

注 2:结论B^*的 3 种基本形式有严格的逻辑基础。这是因为,在模糊逻辑中,若公式$A_i(x) \to B_{s_i}(y)$和$A_j(x) \to B_{s_j}(y)$都为真时,则有$A_i(x) \otimes A_j(x) \to B_{s_i}(y) \otimes B_{s_j}(y)$也为真;$A_i^r(x) \to B_{s_i}^{f(r)}(y)$和$A_i(x) \oplus A_j(x) \to B_{s_i}(y) \oplus B_{s_j}(y)$也可以有类似的解释。

此外,还需要说明的是,当给出的小前提A^*是大前提某条规则的前件时,输出结果B^*就是这条规则的后件。即当$A^*(x)=A_i(x)$时,总有$B^*(y)=B_{s_i}(y)$,其中 $1 \leqslant i \leqslant n$。于是,基于公理化模糊集的模糊推理方法是具有还原性的。

4　模糊联结词扰动性分析

模糊联结词的扰动性是探究模糊推理性质的一个重要内容,它的讨论往往与模糊集之间的距离有关。本节根据取不同的强否定算子、语气算子、t-模算子和 t-余模算子,利用 Minkowski 积分形式距离来讨论这些算子在模糊隶属空间中的扰动性。

定义 4　设 $X=[a,b]$,$\widetilde{X}$为 X 的模糊划分,$A, B \in F(\widetilde{X})$,令:

$$d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A,B)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |A(x)-B(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\ p \geqslant 1$$

称$d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A,B)$是 $F(\widetilde{X})$上 A 与 B 的 Minkowski 距离。

特别地,当 $p=1$ 时,$d_{\mathrm{H}}(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b |A(x)-B(x)| \mathrm{d}x$,$d_H(A,B)$称为 Hamming 距离;当 $p=2$ 时,$d_{\mathrm{E}}(A,B)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |A(x)-B(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$,$d_{\mathrm{E}}(A,B)$称为 Euclid 距离。

引理 1[21]　若 f 和 g 是有界的,且在 X 上是实值函数,有:

$$\left|\sup_{x\in X} f(x)-\sup_{x\in X} g(x)\right| \leqslant \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|$$

$$\left|\inf_{x\in X} f(x)-\inf_{x\in X} g(x)\right| \leqslant \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|$$

引理 2[22](Minkowski 不等式)　设 $p \geqslant 1$,$f, g \in L^p[a,b]$,则有

$$\left(\int_a^b |f+g|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

基于 Minkowski 距离,令 $\varepsilon \in [0,1]$,于是有以下结论。

引理 3　设 $A, A' \in F(\widetilde{X}))$,$p \geqslant 1$。若$d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A,A')<\varepsilon$,则有:(1)$d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A^{N_1},A'^{N_1})<\varepsilon$;(2)$d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A^{N_2},A'^{N_2})<(1+\lambda)\varepsilon$。

证明:由定义 4 和引理 1,有:

$$(1)\ d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A^{N_1},A'^{N_1})=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |1-A(x)-(1-A'(x))|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |A(x)-A'(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A,A')<\varepsilon。$$

$$(2)\ d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A^{N_2},A'^{N_2})=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\frac{1-A(x)}{1+\lambda A(x)}-\frac{1-A'(x)}{1+\lambda A'(x)}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\frac{(1+\lambda)(A(x)-A'(x))}{(1+\lambda A(x))(1+\lambda A'(x))}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

又 $0 \leqslant A(x), A'(x) \leqslant 1$,所以 $d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A^*, A^{*\prime}) \leqslant \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |(1+\lambda)(A(x)-A'(x))|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<(1+\lambda)\varepsilon$。

引理 4　设$A_i, A_j, A_i', A_j' \in F(\widetilde{X}))$,$A^*=A_i \circ A_j$,$A^{*\prime}=A_i' \circ A_j'$,$p \geqslant 1$。若$d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A_i,A_i')<\varepsilon_1$,$d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A_j,A_j')<\varepsilon_2$,则有$d_{\mathrm{M}}^{(p)}(A^*,A^{*\prime})<\varepsilon_1+\varepsilon_2$,其中$\circ \in (\otimes_{\mathrm{P}}, \oplus_{\mathrm{P}}, \otimes_{\mathrm{L}}, \oplus_{\mathrm{L}})$。

证明:只考虑$\circ=\otimes_{\mathrm{P}}$的情况。由定义 4、引理 1 和引理 2,有:

$$\begin{aligned}
&d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})\\
&=d_M^{(p)}(A_i\circ A_j,A_i'\circ A_j')\\
&=(\frac{1}{b-a}\int_a^b|A_i(x)A_j(x)-A_i'(x)A_j'(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\\
&=(\frac{1}{b-a}\int_a^b|A_i(x)A_j(x)-A_i'(x)A_j(x)+A_i'(x)A_j(x)+A_i'(x)A_j'(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant(\frac{1}{b-a}\int_a^b(A_j(x)|A_i(x)-A_i'(x)|+A_i'(x)|A_j(x)-A_j'(x)|)^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant(\frac{1}{b-a}\int_a^b(|A_i(x)-A_i'(x)|+|A_j(x)-A_j'(x)|)^p\\
&\leqslant(\frac{1}{b-a}\int_a^b(|A_i(x)-A_i'(x)|)^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}+(\frac{1}{b-a}\int_a^b(A_j(x)-A_j'(x)|)^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant d_M^{(p)}(A_i,A_i')+d_M^{(p)}(A_j,A_j')<\varepsilon_1+\varepsilon_2
\end{aligned}$$

引理 5 设$A_i,A_j,A_i',A_j'\in F(\widetilde{X})$，$A^*=A_i\circ A_j$，$A^{*\prime}=A_i'\circ A_j'$，$p\geqslant 1$。若$d_M^{(p)}(A_i,A_i')<\varepsilon_1$，$d_M^{(p)}(A_j,A_j')<\varepsilon_2$，则有$d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})<\varepsilon_1\vee\varepsilon_2$，其中$\circ\in(\otimes_M,\oplus_M)$。

证明：只考虑$\circ=\otimes_M$的情况。由定义 4、引理 1 和引理 2，有：

$$\begin{aligned}
d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})&=d_M^{(p)}(A_i\circ A_j,A_i'\circ A_j')\\
&=(\frac{1}{b-a}\int_a^b|A_i(x)\wedge A_j(x)-A_i'(x)\wedge A_j'(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

当$A_i(x)\geqslant A_j(x)$，$A_i'(x)\geqslant A_j'(x)$时，有：

$$\begin{aligned}
d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})&=(\frac{1}{b-a}\int_a^b|A_j(x)-A_j'(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\\
&=d_M^{(p)}(A_j,A_j')<\varepsilon_2
\end{aligned}$$

当$A_i(x)\geqslant A_j(x)$，$A_i'(x)\leqslant A_j'(x)$时，有：

$$d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})=(\frac{1}{b-a}\int_a^b|A_j(x)-A_i'(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$$

①若$A_j(x)\geqslant A_i'(x)$时

$$\begin{aligned}
d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})&\leqslant(\frac{1}{b-a}\int_a^b|A_i(x)-A_i'(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\\
&=d_M^{(p)}(A_i,A_i')<\varepsilon_1
\end{aligned}$$

②若$A_j(x)\leqslant A_i'(x)$时

$$\begin{aligned}
d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})&\leqslant(\frac{1}{b-a}\int_a^b|A_j'(x)-A_j(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\\
&=d_M^{(p)}(A_j,A_j')<\varepsilon_2
\end{aligned}$$

因此，$d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})<\varepsilon_1\vee\varepsilon_2$。

当$A_i(x)\leqslant A_j(x)$，$A_i'(x)\geqslant A_j'(x)$时，同理有$d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})<\varepsilon_1\vee\varepsilon_2$。

当$A_i(x)\leqslant A_j(x)$，$A_i'(x)\leqslant A_j'(x)$时，有：

$$\begin{aligned}
d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})&=(\frac{1}{b-a}\int_a^b|A_i(x)-A_i'(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\\
&=d_M^{(p)}(A_i,A_i')<\varepsilon_1
\end{aligned}$$

综上所述，$d_M^{(p)}(A^*,A^{*\prime})<\varepsilon_1\vee\varepsilon_2$。

基于上面的结论，下面讨论本文所提出的模糊推理方法的连续性。

5 模糊推理的连续性

在模糊隶属空间$F(\widetilde{X})$上定义 Minkowski 距离$d_M^{(p)}$之后，$(F(\widetilde{X}),d_M^{(p)})$就成为了一个模糊距离空间。不难发现，我们可以在模糊距离空间$(F(\widetilde{X}),d_M^{(p)})$中找到一点$A_0$，使得在$A_0$的邻域中，有$A$无限地趋近于$A_0$。例如$A\in F(\widetilde{X})$，能找到$A^r\to A^{r_0}(r\to r_0)$，其中$r$是语气算子。

在下文中，设f是模糊隶属空间$F(\widetilde{X})$到模糊隶属空间$F(\widetilde{Y})$的映射，我们称f为模糊推理映射。类似于数学分析中点连续的概念，给出模糊推理映射在模糊距离空间中点连续的定义。

定义 5 设$(F(\widetilde{X}),d_M^{(p)})$和$(F(\widetilde{Y}),d_M^{(p)})$是两个模糊距离空间，$f$为模糊推理映射，$A_0\in F(\widetilde{X})$，若$f(A)$在点$A_0$的某个邻域中有定义，且$f(A)\to f(A_0)(A\to A_0)$，则称模糊推理映射$f$在$A_0$处连续。

“f在A_0处连续”可以改成以下的符号表述：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$d_M^p(A,A_0)<\delta$时，有$d_M^p(f(A),f(A_0))<\varepsilon$。

定义 6 若$f(A)$在点A_0的某个邻域中有定义，称映射f在A_0处L-连续，当且仅当存在正常数L，使得$A_0\in F(\widetilde{X})$，有$d_M^{(p)}(f(A),f(A_0))\leqslant Ld_M^{(p)}(A,A_0)$。

定义中的条件类似于数学分析中的 Lipschitz 条件，只不过这里是在点处连续。显然，当$d_M^p(A,A_0)<\delta$且$L=\frac{\varepsilon}{\delta}$时，若模糊推理映射$f$在$A_0$处$L$-连续，则在$A_0$处也一定连续。为了方便，我们记$f(A)$和$f(A_0)$分别为$B$和$B_0$。于是，我们有以下结论。

定理 1 若模糊推理映射f在A_0处L-连续，则它也在${A_0}^{N_1}$处L-连续。

证明：由定义 5 和引理 3 中的(1)，存在正常数L，使得$A_0\in F(\widetilde{X})$，有

$$d_M^{(p)}(B,B_0)\leqslant Ld_M^{(p)}(A,A_0)$$

根据引理 3 中的(1)，有$d_M^{(p)}(B,B_0)=d_M^{(p)}(B^{N_1},{B_0}^{N_1})$，$d_M^{(p)}(A,A_0)=d_M^{(p)}(A^{N_1},{A_0}^{N_1})$。所以，$d_M^{(p)}(B^{N_1},B_0^{N_1})\leqslant Ld_M^{(p)}(A^{N_1},{A_0}^{N_1})$。因此，$f$在${A_0}^N$处$L$-连续。

推论 1 若模糊推理映射f在A_0处L-连续，则它在$A_0^{N_2}$处连续。

证明：由定义 6，存在正常数L，使得$A_0\in F(\widetilde{X})$且$d_M^p(A,A_0)<\delta$时，有

$$d_M^{(p)}(B,B_0)\leqslant Ld_M^{(p)}(A,A_0)$$

取$\delta=\frac{\varepsilon}{(1+\lambda)L}$时，有$d_M^{(p)}(B_i,B_0)<\frac{\varepsilon}{1+\lambda}<\varepsilon$。根据引理 3 中(2)，有$d_M^{(p)}(A^{N_2},A_0^{N_2})<\frac{\varepsilon}{L}$和$d_M^{(p)}(B^{N_2},B_0^{N_2})<\varepsilon$。因此，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1=\frac{\varepsilon}{L}>0$使得当$d_M^{(p)}(A^{N_2},A_0^{N_2})<\delta_1$时，有$d_M^{(p)}(B^{N_2},B_0^{N_2})<\varepsilon$。于是，$f$在$A_0^{N_2}$处连续。

定理 2 若模糊推理映射f在A_0和A_0'处L-连续，则它在$A_0\circ A_0'$处连续。其中$\circ\in(\otimes_P,\oplus_P,\otimes_L,\oplus_L)$。

证明：我们只证$\circ=\otimes_P$的情况，其它情况证明类似。

由定义 6，存在正常数L_1，L_2，使得A_0，$A_0'\in F(\widetilde{X})$且

$d_M^{\wp}(A,A_0)<\delta_1, d_M^{\wp}(A',A_0')<\delta_2$时,有

$d_M^{(p)}(B,B_0)\leqslant L_1 d_M^{(p)}(A,A_0)$

$d_M^{(p)}(B',B_0')\leqslant L_2 d_M^{(p)}(A',A_0')$

取$\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{2L_1}, \delta_2=\dfrac{\varepsilon}{2L_2}$时,有

$d_M^{(p)}(B,B_0)\leqslant L_1 d_M^{(p)}(A,A_0)<\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

$d_M^{(p)}(B',B_0')\leqslant L_1 d_M^{(p)}(A',A_0')<\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

根据引理4,有

$d_M^{(p)}(A\otimes_P A', A_0\otimes_P A_0')<\delta_1+\delta_2, d_M^{(p)}(B\otimes_P B', B_0\otimes_p B_0')<\varepsilon$;

因此,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_3=\delta_1+\delta_2>0$,使得当$d_M^{(p)}(A\otimes_P A', A_0\otimes_P A_0')<\delta_3$时,有$d_M^{(p)}(B_i\otimes_P B', B_0\otimes_P B_0')<\varepsilon$。于是,$f$在$A_0\otimes_P A_0'$处连续。

定理3　若模糊推理映射f在A_0和A_0'处L-连续,则它在$A_0\circ A_0'$处连续。其中$\circ\in(\otimes_M,\oplus_M)$。

证明:只证$\circ=\otimes_M$的情况,另一种情况证明类似。

由定义6,存在正常数L_1,L_2,使得$A_0,A_0'\in F(\widetilde{X})$且$d_M^{\wp}(A,A_0)<\delta_1, d_M^{\wp}(A',A_0')<\delta_2$时,有

$d_M^{(p)}(B,B_0)\leqslant L_1 d_M^{(p)}(A,A_0)$

$d_M^{(p)}(B',B_0')\leqslant L_2 d_M^{(p)}(A',A_0')$

取$\delta_1=\dfrac{\varepsilon}{L_1}, \delta_2=\dfrac{\varepsilon}{L_2}$时,有

$d_M^{(p)}(B,B_0)\leqslant L_1 d_M^{(p)}(A,A_0)<\varepsilon$

$d_M^{(p)}(B',B_0')\leqslant L_1 d_M^{(p)}(A',A_0')<\varepsilon$

根据引理5,有

$d_M^{(p)}(A\otimes_M A', A_0\otimes_M A_0')<\delta_1\vee\delta_2, d_M^{(p)}(B\otimes_M B', B_0\otimes_M B_0')<\varepsilon\vee\varepsilon=\varepsilon$

因此,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_3=\delta_1\vee\delta_2>0$,使得当$d_M^{(p)}(A\otimes_M A', A_0\otimes_M A_0')<\delta_3$时,有$d_M^{(p)}(B_i\otimes_M B', B_0\otimes_M B_0')<\varepsilon$。于是,$f$在$A_0\otimes_M A_0'$处连续。

上述定理旨在说明,如果模糊推理映射f在某些点连续,那么f也在这些点通过$\otimes$,$\oplus$和N以及相关的r运算生成的点连续。其实,基于公理化模糊集合的模糊推理方法的连续性在于:"若已知$A(x)\to B(y)$和$A^*(x)$,则$B^*(y)$",按照第3节中$B^*(y)$的基本形式①,若$A^*(x)=A^r(x)$,则$B^*(y)=B^{f(r)}(y)$。当$f(r)=r$时,所谓$A^*(x)$逼近于$A(x)$,也就是$A^r(x)$中的r逼近于1的时候,$f(r)$也逼近于1,即$B^*(y)$逼近于$B(y)$。于是我们可以把模糊推理的连续性看成模糊推理映射在点的连续性。简单来说,我们在模糊隶属空间中可以找到连续的点,这些点通过模糊隶属空间中相关运算生成的点也是连续的。因此,基于公理化模糊集的模糊推理方法是连续的。这与以往讨论的连续性(已知$A^*(x)$逼近于$A(x)$去证明$B^*(y)$逼近于$B(y)$)有所区别。

结束语　本文在公理化模糊集合理论框架之下,把模糊推理看成两个模糊隶属空间之间的映射,给出了模糊推理的3种基本形式,并且结论B^*的3种基本形式有严格的逻辑基础。这是因为,在模糊逻辑中,若公式$A_i(x)\to B_{s_i}(y)$和$A_j(x)\to B_{s_j}(y)$都为真时,则有$A_i(x)\otimes A_j(x)\to B_{s_i}(y)\otimes B_{s_j}(y)$也为真,$A_i^r(x)\to B_{s_i}^{f(r)}(y)$和$A_i(x)\oplus A_j(x)\to B_{s_i}(y)\oplus B_{s_j}(y)$也可以有类似的解释。此外,基于公理化模糊集的模糊推理方法还具有还原性,并且有比较直观的说明。本文根据取不同的强否定算子、t-模算子和t-余模算子,利用Minkowski积分形式距离讨论了定义在$[a,b]$上模糊联结词的扰动性,给出了模糊推理在点处连续的定义,进而说明若在某些点L-连续,则也在这些点通过强否定算子、t-模算子和t-余模算子生成的点处连续。

在模糊推理的一般形式(2)中,给出的A^*一定由$A_1(x)$,$A_2(x),\cdots,A_n(x)$通过$r,N,\otimes$和$\oplus$运算生成。目前我们只针对取语气算子、t-模算子和t-余模算子讨论待求解$B^*(y)$的3种基本形式,后面我们将讨论A^*是通过$A_1(x),A_2(x),\cdots,A_n(x)$取强否定算子生成时,待求解$B^*(y)$的另一种形式。在$B^*(y)$的3种基本形式中,形式②和③都有逻辑依据,形式①没有,后面将完善①的逻辑系统。此外,将另文举例讨论本文方法的实际意义和与常见经典模糊推理方法的差别。

参考文献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information & Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] ZADEH L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. [J]. IEEETransactions on Systems Man and Cybernetics, 1973, 3(1): 28-44.

[3] LI H X. Interpolation mechanism of fuzzy control[J]. Science in China(Series E), 1998, 28(3): 259-267.

[4] WANG Y Y. Logic in computational science[M]. Beijing: Science Press, 1989.

[5] ANTONIOU G. Nonmonotonic reasoning[M]. Cambridge: MIT Press, 1997.

[6] WANG G J. Non-classical mathematical logic and approximate reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[7] SONG S J, WU C. Inverse triple I algorithm for fuzzy reasoning [J]. Chinese Science(Series E), 2002, 32(2): 230-135.

[8] ZOU X F, PEI D W. SIS algorithms of fuzzy reasoning[J]. Fuzzy System and Mathematics, 2010, 24(6): 1-7.

[9] ZHEN M Q, SHI Z K, LIU Y. Triple I method of intuitionistic fuzzy reasoning based on residual implicator[J]. Science in China, 2013, 43(6): 810-820.

[10] TANG Y M, ZHANG Y C, RENF J, et al. FMT- symmetric I* method for fuzzy reasoning[J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2018, 54(4): 706-713.

[11] PENG J Y. Reverse Triple I Method of Intuitionistic Fuzzy Reasoning Based on Residual Implicator[J]. PatternRecognition and Artificial Intelligence, 2018, 31(6): 525-536.

[12] PENG J Y. Full implication method of interval-valued intuitionistic fuzzy reasoning[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2019, 33(3): 35-45.

[13] PAN X D, XU Y. Redefinition of the concept of fuzzy set based on vague partition from the perspective of axiomatization[J]. Soft Computing A Fusion of Foundations Methodologies & Applications, 2018, 22: 1777-1789.

[14] PAN X D, XU Y. Correction to: Redefinition of the concept of fuzzy set based on vague partition from the perspective of axiomatization[J]. Soft Computing, 2018, 22(6): 2079-2079.

[15] MARTIN Š, ULRICH B, MARTINA D, et al. Continuity issues of the implicational interpretation of fuzzy rules[J]. Fuzzy Sets Systems, 2010, 161(14): 1959-1972.

[16] LIU H W,WANG G J,Continuity of triple I methods based on several implications[J]. Comput. Math. Appl. ,2008,56:2079-2087.
[17] JENEI S. Continuity in Zadeh's compositional rule of inference [J]. Fuzzy Sets and Systems,1999,104(2):333-339.
[18] LUO M X,YAO N. Triple I algorithms based on Schweizer-Sklar operators in fuzzy reasoning[J]Int. J. Approx. Reason. ,2013,54:640-652.
[19] DAI S S,PEI D W,WANG S M. Perturbation of fuzzy sets and fuzzy reasoning based on normalized Minkowski distance[J]. Fuzzy Sets Systems,2012,189:63-73.
[20] HU B Q. Fuzzy theoretical basis[M]. Wuhan:Wuhan University Press,2008.
[21] HONG D H,WANG S Y. A note on the value similarity of fuzzy systems variables[J]. Fuzzy Sets and Systems,1994,66(3):383-386.
[22] RUDIN W. Real and Complex Analysis[M]. Beijing:China Machine Press,2006:61-64.

KANG Bo, born in 1995, postgraduate. His main research interests include fuzzy reasoning and so on.

PAN Xiao-dong, born in 1979, associate professor. His main research interests include mathematical basic theory of fuzzy information processing and so on.

（上接第 51 页）

[10] FENG N,GUO S N,SONG C,et al. Multi-component spatial-temporal graph convolution networks for traffic flow forecasting [J]. Journal of Software,2019(3):759-769.
[11] MA X,YU H,WANG Y,et al. Large-scale transportation network congestion evolution prediction using deep learning theory [J]. PloS one,2015,10(3):e0119044.
[12] YU R,LI Y,SHAHABI C,et al. Deep learning:A generic approach for extreme condition traffic forecasting[C]// Proceedings of the 2017 SIAM international Conference on Data Mining. Society for Industrial and Applied Mathematics,2017:777-785.
[13] SUN S,HUANG R,GAO Y. Network-Scale Traffic Modeling and Forecasting with Graphical Lasso and Neural Networks[J]. Journal of Transportation Engineering,2012,138(11):1358-1367.
[14] YU H,WU Z,WANG S,et al. Spatiotemporal recurrent convolutional networks for traffic prediction in transportation networks[J]. Sensors,2017,17(7):1501.
[15] LI Y,YU R,SHAHABI C,et al. Diffusion convolutional recurrent neural network:Data-driven traffic forecasting[J]. arXiv:1707.01926,2017.
[16] YU B,YIN H,ZHU Z. Spatio-temporal graph convolutional networks:A deep learning framework for traffic forecasting[J]. arXiv:1709.04875,2017.
[17] WANG X,GIRSHICK R,GUPTA A,et al. Non-local neural networks[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018:7794-7803.
[18] HUANG Z,WANG X,HUANG L,et al. Ccnet:Criss-cross attention for semantic segmentation[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. 2019:603-612.
[19] HU J,SHEN L,SUN G. Squeeze-and-excitation networks [C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2018:7132-7141.
[20] HU J,SHEN L,ALBANIE S,et al. Gather-excite:Exploiting feature context in convolutional neural networks[C]// Advances in Neural Information Processing Systems. 2018:9401-9411.
[21] ZHAO H,ZHANG Y,LIU S,et al. Psanet:Point-wise spatial attention network for scene parsing[C]//Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV). 2018:267-283.
[22] WU Z,PAN S,LONG G,et al. Graph WaveNet for Deep Spatial-Temporal Graph Modeling[C]// Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence IJCAI-19. 2019.
[23] MISRA D,NALAMADA T,ARASANIPALAI A U,et al. Rotate to Attend:Convolutional Triplet Attention Module[J]. arXiv:2010.03045,2020.
[24] SHEN X J,ZHANG J T,HANG D J. Short-term Traffic Flow Prediction Model Based on Gradient Boosting Regression Tree [J]. Computer Science,2018,45(6):222-227,264.
[25] WOO S,PARK J,LEE J Y,et al. Cbam:Convolutional block attention module[C]//Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV). 2018:3-19.

KANG Yan, born in 1972, Ph.D, associate professor. Her main research interests include transfer learning, deep learning and integrated learning.

LI Hao, born in 1970, Ph.D, professor. His main research interests include distributed computing, grid and cloud computing.