

基于采样控制和输入饱和的不确定复杂网络同步研究

赵曼宇 叶 军

南京邮电大学理学院 南京 210023

(1040321777@qq.com)

摘 要 在实际网络系统中,广泛存在外部的干扰、参数波动等不确定现象,会导致系统无法实现同步,甚至会破坏系统的稳定性。因此研究不确定复杂动态网络的同步问题具有重要的意义。针对一类非线性不确定复杂动态网络,文中研究其在采样控制和输入饱和的条件下实现同步的问题。首先,建立非线性不确定复杂动态网络模型,其次通过引入一个领导者,设计了包含输入饱和的采样控制协议。然后构造合适的时间依赖 Lyapunov 函数,通过运用稳定性理论、积分不等式方法和线性矩阵不等式方法,证明了非线性不确定复杂动态网络在一定条件下可以实现同步,即每个跟随者最终都能追踪到领导者,并给出了实现同步的充分判据。最后,通过数值仿真验证了所得理论结果的正确性和有效性。

关键词: 不确定复杂网络;采样控制;输入饱和;李雅普诺夫函数;同步

中图法分类号 TP13

Synchronization of Uncertain Complex Networks with Sampled-data and Input Saturation

ZHAO Man-yu and YE Jun

School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China

Abstract In actual network systems, there are widespread external interference and parameter mutations and other uncertain phenomena, which will cause the system to fail to achieve synchronization, and even destroy the stability of the system. Therefore, it is important to study uncertain complex networks. This paper discusses the synchronization problem of nonlinear uncertain complex dynamical networks with sampled-data and input saturation. Firstly, we establish a nonlinear and uncertain complex network model. Secondly, a leader is introduced to design a sampled-data control protocol with input saturation. By constructing an appropriate time-dependent Lyapunov functional and applying the stability theory, integral inequality method and the linear matrix inequality method, it is proved that the nonlinear uncertain complex dynamical networks can achieve synchronization under certain conditions, that is every follower can track the leader, and the sufficient criteria for achieving synchronization of nonlinear uncertain complex networks is derived. Finally, simulation examples are provided to verify the effectiveness and validity of the theoretical results.

Keywords Uncertain complex networks, Sampled-data control, Input saturation, Lyapunov function, Synchronization

1 引言

小世界模型^[1]提出后,复杂网络由于其应用广泛而成为当今的研究热点,如交通网络、电力网络、通信网络等都可以用复杂网络模型来表示。网络同步是复杂网络动力学的典型特征。在研究复杂网络同步问题过程中,由于网络的复杂性,仅依赖网络自身的耦合实现同步是很困难的,因此为了实现同步提出了多种控制方法,如脉冲控制^[2]、牵制控制^[3]、采样控制^[4]等。采样控制由于其精确性、减少信号传输、降低通信成本等特点被广泛应用于实际系统中。

在控制系统中,经常会遇到输入饱和现象,它可能会导致系统不稳定以及性能下降。因此,具有输入饱和的控制系统受到了广泛关注。文献[5]研究了异质复杂网络在具有输入饱和的采样控制下实现拟同步的问题。文献[6]研究了具有

量化和执行器饱和的采样控制系统的控制优化问题。文献[7]研究了具有输入饱和及时滞的线性系统的全局稳定性问题。

在实际网络系统中,由于难以准确把握控制对象的特性,系统的内部参数可能随时会随着环境和外界条件的变化而变化,是无法进行预测的。而这些外部干扰、参数波动等不确定现象,可能会导致网络无法实现同步,甚至会破坏网络的稳定性。因此,研究不确定复杂网络具有重要意义。文献[8]研究了含时变时滞的不确定 T-S 模糊系统在记忆采样控制下实现同步的问题。基于自适应脉冲控制协议,文献[9]研究了一类具有不确定性和外部扰动的复杂网络的同步问题。文献[10]研究了分数阶不确定时滞复杂网络的同步问题,分别给出了系统在自适应控制下局部渐近同步和在自适应牵制控制下全局渐近同步的充分条件。

基金项目:国家自然科学基金(61971234);南京邮电大学校内基金(NY220209)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61971234) and Nanjing University of Posts and Telecommunications Foundation(NY220209).

通信作者:叶军(yj8422092@163.com)

受到以上文献的启发,本文考虑不确定复杂动态网络在具有输入饱和的采样控制协议下实现同步的问题。通过建立含不确定因素的非线性复杂网络模型,引入一个领导者,设计了含输入饱和的采样控制协议,利用 Lyapunov 稳定性理论及线性矩阵不等式方法给出系统实现同步的充分条件,并通过数值仿真验证了理论结果的有效性。

2 预备知识和模型描述

2.1 模型描述

本文研究由 N 个跟随者和 1 个领导者构成的不确定复杂动态网络, N 个跟随者的动力学模型如下:

$$\dot{x}_i(t) = (A + \Delta A(t))x_i(t) + (B + \Delta B(t))f(x_i(t)) + u_i(t), i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中, $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 是第 i 个节点的状态变量; $f(x_i(t)) \in \mathbb{R}^n$ 为描述节点动力学特征的非线性向量函数; A 和 B 是常数矩阵; $\Delta A(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 为系统的范数有界不确定性矩阵, 满足 $[\Delta A(t) \Delta B(t)] = GF(t)[E_1 \ E_2]$, 其中 G, E_1, E_2 分别为已知的具有适当维数的常量矩阵, $F(t)$ 为未知的包含不确定性的时变矩阵且满足 $F(t)^T F(t) \leq I, I$ 为具有合适维数的单位矩阵; $u_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 是待设计的控制协议, 假设每个节点的输入受限制如下:

$$|u_i^{(p)}| \leq \bar{u}_i^{(p)}, \bar{u}_i^{(p)} > 0, p=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

领导者的动力学模型如下:

$$\dot{x}_0(t) = (A + \Delta A(t))x_0(t) + (B + \Delta B(t))f(x_0(t)) \quad (3)$$

其中, $x_0(0) \in \mathbb{R}^n$ 是领导者的状态初值。

2.2 定义与假设

假设 1 每个跟随者与领导者之间至少存在一条有向路径。

定义 1^[5] 非线性函数 $f(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足利普希茨条件: 如果存在 $\alpha_{ij} \geq 0 (i, j=1, 2, \dots, n), \forall y, z \in \mathbb{R}^n$ 使得 $|f_i(y, t) - f_i(z, t)| \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} |y_j - z_j|$ 成立。

注: 假设 1 是网络系统实现领导者-跟随者同步的必要条件, 假设 1 表明领导者可以通过有向路径把信息传递给每一个跟随者。定义 1 是常用的利普希茨条件, 适用于许多非线性系统。

本文设计含输入饱和(2)的采样控制协议为:

$$u_i(t) = \text{sat}_{\bar{u}_i}(K_i \xi_i(t_k)), i=1, 2, \dots, N$$

$$\xi_i(t_k) = -\sum_{j=1}^N a_{ij} [x_j(t_k) - x_i(t_k)] - d_i [x_i(t_k) - x_0(t_k)] \quad (4)$$

根据图理论知识可知, 式中 $\bar{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 指的是加权邻接矩阵, 如果节点 i 可以收到节点 j 的信息, 那么 $a_{ij} > 0$ 否则 $a_{ij} = 0$ 。拉普拉斯矩阵 $L = l_{ij} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 定义为: 当 $i \neq j$ 时, $l_{ij} = -a_{ij} \leq 0, l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \geq 0$ 。领导者的判断矩阵为: $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 当且仅当第 i 个节点与领导者相连时 $d_i > 0$, 否则 $d_i = 0$ 。令 $H = L + D$, 式中采样时刻 t_k 满足 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$, K_i 是控制反馈增益矩阵, 设 $t_{k+1} - t_k = h$, 且 $h > 0$ 是采样间隔。给定一个向量 $\bar{s} = [\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_k]^T$, 其中 $\bar{s}_i > 0, i=1, \dots, k$ 。对于任意的 $z = [z_1, \dots, z_k]^T$, 用 $\text{sat}(z, \bar{s})$ 来表示坐标向量 $\text{sign}(z_i) \min(|z_i|, \bar{s}_i)$ 。

2.3 误差系统

定义:

$$\eta(K_i \xi_i(t_k)) \triangleq K_i \xi_i(t_k) - \text{sat}_{\bar{u}_i}(K_i \xi_i(t_k)) \quad (5)$$

误差向量:

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - x_0(t)$$

$$\tilde{f}_i(\tilde{x}_i(t)) = f(x_i(t)) - f(x_0(t))$$

$$\tilde{x}(t) = [\tilde{x}_1^T(t), \tilde{x}_2^T(t), \dots, \tilde{x}_N^T(t)]^T$$

$$\tilde{f}(\tilde{x}(t)) = [\tilde{f}_1^T(\tilde{x}_1(t)), \tilde{f}_2^T(\tilde{x}_2(t)), \dots, \tilde{f}_N^T(\tilde{x}_N(t))]^T$$

$$\xi(t_k) = [\xi_1^T(t_k), \xi_2^T(t_k), \dots, \xi_N^T(t_k)]^T$$

$$\eta(\bar{K}\xi(t_k)) = [\eta^T(K_1 \xi_1(t_k)), \dots, \eta^T(K_N \xi_N(t_k))]^T$$

$$\bar{K} = \text{diag}\{K_i\}_N, \bar{H} = H \otimes I_n$$

因此误差系统为:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A \tilde{x}(t) + B \tilde{f}(\tilde{x}(t)) - \bar{K} \bar{H} \tilde{x}(t_k) - \eta(\bar{K}\xi(t_k)) + Gp(t)$$

$$p(t) = F(t)q(t)$$

$$q(t) = E_1 \tilde{x}(t) + E_2 \tilde{f}(\tilde{x}(t)) \quad (6)$$

为了处理函数 $\eta(\bar{K}\xi(t_k))$ 的非线性特性, 引入引理 1。

引理 1^[12] 对任意的正定分块对角矩阵 $\bar{U} = \text{diag}\{U_i\}_N$ 和 $\bar{Z} = \text{diag}\{Z_i\}_N$ 其中 $U_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, Z_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \bar{u}_i \in \mathbb{R}^n$, 定义 $\bar{u} = \{\bar{u}_1^T, \bar{u}_2^T, \dots, \bar{u}_N^T\}^T$ 和集合 $\bar{\omega} = \{\xi \in \mathbb{R}^{Nn} \mid (K^{(\rho)} - \bar{Z}^{(\rho)})\xi \leq \bar{u}^{(\rho)}, p=1, \dots, Nn\}$, 如果 $\xi \in \bar{\omega}$, 那么下式成立:

$$\eta^T(\bar{K}\xi(t_k)) \bar{U} [\eta(\bar{K}\xi(t_k)) - \bar{Z}\xi(t_k)] \leq 0$$

3 主要结果

在这一部分将给出跟随者网络(1)与领导者网络(3)在采样控制(4)下实现同步的充分条件。为了简化矩阵和向量的表示, 将 $e_i \in \mathbb{R}^{6n \times n} (i=1, 2, \dots, 6)$ 定义为块输入矩阵(如: $e_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I \ 0]^T$), 其他符号定义为:

$$\Omega(t) = [\dot{\tilde{x}}(t), \tilde{x}^T(t), \tilde{x}^T(t_k), \eta^T(\bar{K}\xi(t_k)), \tilde{f}^T(\tilde{x}(t)), p^T(t)]^T$$

$$\Xi_1 = e_2 P e_1^T + e_1 P e_2^T + 2a e_2 P e_2^T - 2a [e_2 - e_3] \times W [e_2 - e_3]^T + e_2 (I_N \otimes \Gamma \Theta \Gamma) e_2^T - e_5 (I_N \otimes \Theta) e_5^T - \Pi \Pi^T - \Pi N + [e_2 Y + \sigma e_1 Y] \Phi + \Phi^T [e_2 Y + \sigma e_1 Y]^T - 2e_4 \bar{U} e_4^T - e_4 (\bar{U} \bar{Z} \bar{H}) e_3^T - e_3 (\bar{U} \bar{Z} \bar{H})^T e_4^T + \Psi$$

$$\Xi_2 = e_1 W e_1^T$$

$$\Xi_3 = e_3 M_{11} e_3^T + e_4 M_{12}^T e_3^T + e_3 M_{12} e_4^T + e_4 M_{22} e_4^T$$

$$\bar{\Xi}_3 = -\Xi_3 + N [1 - 2ah]^{-1} W^{-1} N^T$$

$$\Phi = [-I \ A \ -\bar{K} \ H \ -I \ B \ G]$$

$$N = [0 \ N_1^T \ N_2^T \ N_3^T \ 0 \ 0]^T$$

$$\Pi = [0 \ I \ -I \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\Psi = \beta (e_2 E_1^T E_1 e_2^T + e_2 E_1^T E_2 e_5^T + e_5 E_2^T E_1 e_2^T + e_5 E_2^T E_2 e_5^T - e_6 e_6^T)$$

定理 1 在假设 1 成立的条件下, 对于给定的正常数 $h,$

$$\alpha, \beta, \sigma, \text{ 如果存在矩阵 } P > 0, W > 0, M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} > 0, \Theta >$$

$0, \bar{U} > 0$, 矩阵 N , 一个实矩阵 \bar{Z} 和 $Y = \text{diag}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ 满足条件式(7)一式(9), 则误差系统(6)的任意从集合出发的解:

$$\varepsilon_0 = \left\{ \tilde{x}(t_0) \in \mathbb{R}^{Nn} \mid \tilde{x}^T(t_0) P \tilde{x}(t_0) \leq \frac{1}{2\lambda_{\max}(H^T H)} \right\}$$

最终都会指数收敛到零。

$$2ah^2 \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_1 + h(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) < 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 - h\mathcal{E}_3 & hN \\ * & -h(1-2ah)W \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} |\bar{u}^{(p)}|^2 & \bar{K}^{(p)} - \bar{Z}^{(p)} \\ * & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9)$$

证明:构造下面的李雅普诺夫函数:

$$V(t) = \sum_{i=1}^3 V_i(t), t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (10)$$

其中:

$$V_1(t) = \tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t),$$

$$V_2(t) = (t_{k+1} - t) \int_{t_k}^t \tilde{x}^T(s) W \dot{\tilde{x}}(s) ds$$

$$V_3(t) = (t_{k+1} - t)(t - t_k) \begin{bmatrix} \tilde{x}(t_k) \\ \eta(\bar{K}\xi(t_k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{x}(t_k) \\ \eta(\bar{K}\xi(t_k)) \end{bmatrix}$$

对 $V(t)$ 沿误差式(6)对李雅普诺夫函数关于 t 求导,因此有:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &\triangleq \dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \\ &= 2\tilde{x}^T(t) P \dot{\tilde{x}}(t) + (t_{k+1} - t) \dot{\tilde{x}}^T(t) W \dot{\tilde{x}}(t) - \int_{t_k}^t \dot{\tilde{x}}^T(s) \\ &W \dot{\tilde{x}}(s) ds + 2\tilde{\alpha} \tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t) - (t - t_k) \begin{bmatrix} \tilde{x}(t_k) \\ \eta(\bar{K}\xi(t_k)) \end{bmatrix}^T \\ &\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t_k) \\ \eta(\bar{K}\xi(t_k)) \end{bmatrix} + (t_{k+1} - t) \\ &\begin{bmatrix} \tilde{x}(t_k) \\ \eta(\bar{K}\xi(t_k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t_k) \\ \eta(\bar{K}\xi(t_k)) \end{bmatrix} + \\ &2\alpha(t_{k+1} - t)(t - t_k) \begin{bmatrix} \tilde{x}(t_k) \\ \eta(\bar{K}\xi(t_k)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \times \\ &\begin{bmatrix} \tilde{x}(t_k) \\ \eta(\bar{K}\xi(t_k)) \end{bmatrix} + 2\alpha(t_{k+1} - t) \int_{t_k}^t \dot{\tilde{x}}^T(s) W \dot{\tilde{x}}(s) ds \quad (11) \end{aligned}$$

引入下面的不等式来处理式(11)中的积分项:

$$2\Omega^T(t) N \int_{t_k}^t \dot{\tilde{x}}(s) ds \leq (t - t_k) \Omega^T(t) N W^{-1} N^T \Omega(t) + \int_{t_k}^t \dot{\tilde{x}}^T(s) W \dot{\tilde{x}}(s) ds$$

应用上式及詹森不等式有下面式子成立:

$$\begin{aligned} & - \int_{t_k}^t \dot{\tilde{x}}^T(s) W \dot{\tilde{x}}(s) ds + 2\alpha(t_{k+1} - t) \int_{t_k}^t \dot{\tilde{x}}^T(s) W \dot{\tilde{x}}(s) ds \\ &= -[1 - 2\alpha(t_{k+1} - t_k)] \int_{t_k}^t \dot{\tilde{x}}^T(s) W \dot{\tilde{x}}(s) ds - 2\alpha(t - t_k) \\ &\int_{t_k}^t \dot{\tilde{x}}^T(s) W \dot{\tilde{x}}(s) ds \\ &\leq (t - t_k) \Omega^T(t) N [1 - 2\alpha(t_{k+1} - t_k)]^{-1} \times W^{-1} N^T \Omega(t) - \\ &2\Omega^T(t) N \int_{t_k}^t \dot{\tilde{x}}(s) ds - 2\alpha(\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_k))^T W (\tilde{x}(t) - \\ &\tilde{x}(t_k)) \quad (12) \end{aligned}$$

由定义可得, $f(x_i(t))$ 满足利普希茨条件:

$$\| \tilde{f}_i(\tilde{x}_i(t)) \| \leq \| \Gamma \tilde{x}_i(t) \|, i=1, \dots, N, \Gamma = [\alpha_{ij}]_{N \times n} \quad (13)$$

给定一个对角正定矩阵 Θ 有下式成立:

$$\tilde{x}(t)^T (I_N \otimes \Gamma^T \Theta \Gamma) \tilde{x}(t) - \tilde{f}^T(\tilde{x}(t)) (I_N \otimes \Theta) \tilde{f}(\tilde{x}(t)) \geq 0 \quad (14)$$

给定矩阵 Y 和标量 σ 可得:

$$2[\tilde{x}^T(t) Y + \sigma \tilde{x}^T(t) Y] [-\dot{\tilde{x}}(t) + A \tilde{x}(t) + B \tilde{f}(\tilde{x}(t)) - \bar{K} \bar{H} \tilde{x}(t_k) - \eta(\bar{K} \xi(t_k)) + G p(t)] = 0 \quad (15)$$

下面我们分两步来证明,首先证明对于任意的 $t \in [t_0, \infty)$, 如果 $\tilde{x}(t_0) \in \varepsilon_0$, 那么 $\tilde{x}(t) \in \varepsilon_0$, 并且 $\xi(t) \in \bar{\omega}$ 成立。如果 $\tilde{x}(t_0) \in \varepsilon_0$, 那么有:

$$\begin{aligned} \xi^T(t_0) P \xi(t_0) &= \xi^T(t_0) (I_N \otimes \bar{P}) \xi(t_0) \\ &= \tilde{x}^T(t_0) (H^T H \otimes \bar{P}) \tilde{x}(t_0) \\ &\leq 2\lambda_{\max}(H^T H) [\tilde{x}^T(t_0) (I_N \otimes \bar{P}) \tilde{x}(t_0)] \\ &\leq 2\lambda_{\max}(H^T H) \frac{1}{2\lambda_{\max}(H^T H)} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

条件式(9)等价于对 $p=1, 2, \dots, Nn$ 有:

$$\begin{aligned} 1 \geq \xi^T(t_0) P \xi(t_0) &\geq |\bar{u}^{(p)}|^{-2} \xi^T(t_0) (\bar{K}^{(p)} - \bar{Z}^{(p)})^T \times \\ &(\bar{K}^{(p)} - \bar{Z}^{(p)}) \xi(t_0) \\ &= |\bar{u}^{(p)}|^{-2} |(\bar{K}^{(p)} - \bar{Z}^{(p)}) \xi(t_0)|^2 \end{aligned}$$

也就是说,由 $\xi^T(t_0) P \xi(t_0) \leq 1$ 可推出 $\xi(t_0) \in \bar{\omega}$, 结合引理可得:

$$-2[\eta^T(\bar{K}\xi(t_0))] \bar{U} [\eta(\bar{K}\xi(t_0)) + (\bar{Z}\bar{H})\tilde{x}(t_0)] \geq 0 \quad (16)$$

把式(12)、式(14)一式(16)代入式(11)中可得:

$$\dot{\omega}(t) \triangleq \dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \leq \Omega^T(t) \Xi(t - t_0) \Omega(t)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Xi(t - t_0) &= -2\alpha(t - t_0)^2 \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_1 + h(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) + (t - t_0) \\ &[2(ah - 1)\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 + N(1 - 2ah)^{-1} W^{-1} N^T] \end{aligned}$$

根据文献[11],对于 $t \in [t_0, t_1)$, $\Xi(t - t_0) \leq 0$ 的条件是 $2ah^2 \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_1 + h(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) < 0$, $\mathcal{E}_1 + h(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) < 0$ 成立,即下面两个式子成立。

$$2ah^2 \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_1 + h(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) < 0 \quad (17)$$

$$\mathcal{E}_1 - h\mathcal{E}_3 + h[N(1 - 2ah)^{-1} W^{-1} N^T] < 0 \quad (18)$$

根据 Schur 引理可知定理中的式(8)等价于式(18)。因此,当 $t \in [t_0, t_1)$ 时,有:

$$\dot{\omega}(t) = \dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \leq 0 \quad (19)$$

在式(19)两边同乘 $e^{2\alpha(t-t_0)}$ 然后对其从 t_0 到 t 积分可得:

$$V(t) \leq e^{-2\alpha(t-t_0)} V(t_0)$$

从 $V(t)$ 的定义可知 $\tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t) \leq V(t)$, 此外,由李雅普诺夫函数可知 $V(t_0) = \tilde{x}^T(t_0) P \tilde{x}(t_0)$, 因此可得:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t) &\leq e^{-2\alpha(t-t_0)} \tilde{x}^T(t_0) P \tilde{x}(t_0) \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_{\max}(H^T H)} \end{aligned}$$

因此,对于 $t \in [t_0, t_1)$, 有 $\tilde{x}(t) \in \varepsilon_0$ 且 $\xi(t) \in \bar{\omega}$ 。同理可证对于任意的 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 都有 $\tilde{x}(t) \in \varepsilon_0$ 且 $\xi(t) \in \bar{\omega}$ 。

因此,对于任意时刻 t_k 都有下式成立:

$$-2[\eta^T(\bar{K}\xi(t_k))] \bar{U} [\eta(\bar{K}\xi(t_k)) + (\bar{Z}\bar{H})\tilde{x}(t_k)] \geq 0 \quad (20)$$

当 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 结合式(12)、式(15)和式(20)有:

$$\dot{\omega}(t) \triangleq \dot{V}(t) + 2\alpha V(t) \leq \Omega^T(t) \Xi(t - t_k) \Omega(t)$$

其中:

$$\Xi(t-t_k) = -2\alpha(t-t_k)^2 \Xi_3 + \Xi_1 + h(\Xi_2 + \Xi_3) + (t-t_k)[2(\alpha h - 1)\Xi_3 - \Xi_2 + N(1-2\alpha h)^{-1}W^{-1}N^T]$$

同上,根据文献[11]和 Schur 引理可知,对于 $t \in [t_k, t_{k+1})$,由式(7)和式(8)可得出 $\Xi(t-t_k) \leq 0$ 。

因此:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}^T(t)P\tilde{x}(t) = 0 \quad (21)$$

证明结束。

4 数值仿真

考虑网络包含 1 个领导者和 3 个跟随者,领导者为根节点,节点间的信息交流如图 1 所示。

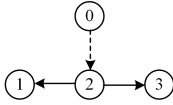


图 1 网络拓扑结构图

Fig. 1 Topology of the network

取 $f(x_i(t)) = \sin(x_i)$, $F(t) = \cos(t)$, $\alpha = 15$, $\bar{u}_i = 1$, $\Gamma = 1$, $\beta = 2$, $h = 0.01$, $A = \text{diag}\{-3\}_3$, $B = \text{diag}\{-0.06\}_3$, $G = \text{diag}\{1\}_3$, $E_1 = \text{diag}\{0.2\}_3$, $E_2 = \text{diag}\{0.5\}_3$, $H = 0.2 \times$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 。基于定理 1 解得: $K = \text{diag}\{7.8871\}_3$, $P =$

$\text{diag}\{8.2024\}_3$,选择领导者的初值 $x_0(0) = -0.2$,3 个跟随者的初值随机选择。从图 2 和图 3 可以看出不确定跟随者网络(1)和领导者网络(3)在含输入饱和的采样控制(4)下实现了同步。

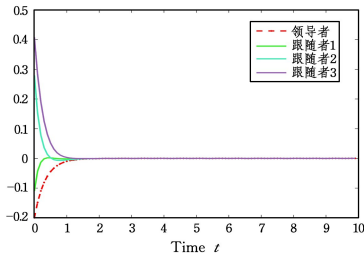


图 2 $x_0(t)$ 和 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 的轨迹图

Fig. 2 Trajectories of $x_0(t)$ and $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$

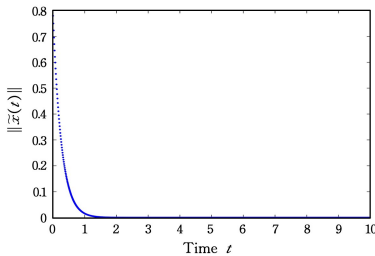


图 3 系统的误差轨迹图

Fig. 3 Error trajectory of systems

结束语 本文研究了不确定复杂网络在含输入饱和的采样控制协议下实现同步的问题。利用 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式方法得出了保证不确定复杂网络实现同步的充分条件。最后,通过一个数值仿真例子验证了理论结果的正确性。

参考文献

- [1] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective Dynamics of ‘Small-world’ Networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.
- [2] KARTHICK S A, SAKTHIVEL R, ALZHRANI F, et al. Synchronization of Semi Markov Coupled Neural Networks with Impulse Effects and Leakage Delay[J]. Neurocomputing, 2020, 386: 221-231.
- [3] HUANG Y L, WANG S X. Synchronization in an Array of Spatial Diffusion Coupled Reaction-diffusion Neural Networks via Pinning Control[J]. International Journal of Systems Science, 2018, 49(5): 1103-1118.
- [4] HUANG Y, BAO H B. Master-slave Synchronization of Complex-valued Delayed Chaotic Lur’e Systems with Sampled-data Control[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 379.
- [5] YANG H H, WANG Z X, XIAO M, et al. Quasi-synchronization of Heterogeneous Dynamical Networks with Sampled-data and Input Saturation[J]. Neurocomputing, 2019, 339: 130-138.
- [6] SHAO H, ZHAO J. Control and Optimization of Sampled-data Systems with Quantization and Actuator Saturation[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2017, 30(6): 1242-1257.
- [7] WU J, HUANG L. Global Stabilization of Linear Systems Subject to Input Saturation and Time Delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(1): 633-649.
- [8] GE C, SHI Y, PARK J H, et al. Robust H-infinity Stabilization for T-S Fuzzy Systems with Time-varying Delays and Memory Sampled-data Control[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 346: 500-512.
- [9] MENG L, YANG D, ZHAO Q. Synchronization of Uncertain Complex Dynamical Networks[J]. International Journal of Software Engineering and Knowledge Engineering, 2019, 29(7): 923-939.
- [10] LIANG S, WU R, CHEN L. Adaptive Pinning Synchronization in Fractional-order Uncertain Complex Dynamical Networks with Delay[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2016, 444: 49-62.
- [11] KIM J H. Further Improvement of Jensen Inequality and Application to Stability of Time-delayed Systems[J]. Automatica, 2016, 64: 121-125.
- [12] GOMES D A, SILVA J J M, TARBOURIECH S. Antiwindup Design with Guaranteed Regions of Stability: An LMI-based Approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(1): 106-111.



ZHAO Man-yu, born in 1994, master’s degree. Her main research interests include complex network synchronization control and multi-agent system consistency.



YE Jun, born in 1981, Ph.D, associate professor. His main research interests include pattern recognition, machine learning, and image processing.