

基于小波变换的多方向小波变换

徐华楠 彭国华 刘哲

(西北工业大学理学院 西安 710072)

摘要 方向小波变换(SAWT)是小波变换(WT)的多方向扩展,它的基是各向异性的,具有多尺度、多方向的图像表示特性。SAWT不能恒保持多分辨率尺度关系,不能较好地表示图像中的平滑区域,因此利用WT和SAWT构造了一种新的多尺度、多方向且能保持多分辨率尺度关系的小波方向波变换。为了验证该变换的有效性,利用其进行了图像去噪实验。实验结果表明,所提方法能够很好地表示图像中的平滑区域和细节信息,并且能获得更高的峰值信噪比和结构相似性。

关键词 小波变换,方向小波变换,小波方向波变换,图像去噪

中图分类号 TP391 **文献标识码** A

New Wavelet Based Directional Transform

XU Hua-nan PENG Guo-hua LIU Zhe

(School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract The directionlet transform is a multidirectional and anisotropic transform for image processing which expands the direction of the wavelet transform. However, not as the wavelet transform, the directionlet don't retain the resolution-scalability, which leads to weak expressions on the smooth regions in images. To overcome the drawback, wavelet and directionlet transform were combined to construct a multiscale and multidirectional transform called wavelet based directionlet transform. Numerical experiments were performed to assess the applicability of the proposed method. The obtained results show that the proposed method can well express both smooth regions and details in images, and obtain higher PSNR and SSIM than the compared methods.

Keywords Wavelet transform, Directionlet transform, Wavelet based directionlet transform, Image denoising

1 引言

图像是一种常用的信息载体,图像中的大量信息往往存在于边缘和纹理等高维几何特征中,边缘及其方向信息是对图像进行分析处理时的关键特征。图像信息的有效表示是许多图像处理课题(去噪、压缩、特征提取等)的关键问题。常用的二维小波变换(2D-WT)只有水平、垂直和对角线等3个方向,方向表达能力有限,使得WT无法为图像提供最优的稀疏表示^[1]。为了弥补WT的缺陷,寻求高效的图像表示法,众多学者提出了一些具有更好的方向性和各向异性的图像多尺度几何分析方法^[2-10]。与WT相比,多尺度几何分析方法能够将图像的方向性信息捕捉到具有不同尺度和频率特征子带中,从而提供图像的稀疏表示。

目前提出来的多尺度几何分析方法虽然弥补了WT应用于图像处理时的不足,却是以高计算复杂度为代价的,而且在一些方法中(如Curvelet^[3]),相关的滤波器是在连续域中设计的,对数字图像来说实现起来较困难;有的方法所用到的二维滤波器组的设计非常困难(如Contourlet^[5,6]、CT)。为了

保持WT复杂度低和设计简单的优良特性,并使其具有多方向性,Vladan Velisavljevic等^[7]提出了一种基于整数格的完全重构和临界采样的多方向各向异性变换——方向小波(Directionlets,SAWT)。鉴于SAWT的诸多优点,其目前已经被应用于图像融合^[11]、超分辨重构^[12]、SAR图像去噪^[13-15]等领域,并显示了优势和发展潜力。

然而SAWT不能像WT那样恒保持分辨率尺度关系;当整数格的生成矩阵的行列式的绝对值不等于1时,SAWT的低频子带就不能看作原始图像的低分辨率图像,导致其不能较好地对图像中的平滑区域进行表示。本文借鉴前人的方法^[1,16,17],尝试在WT之后再级联SAWT,提出了小波方向波变换(wavelet based directionlets transform,WT-SAWT)。该变换综合了WT和SAWT对图像的多分辨率、多方向表达能力,同时保持了WT的多分辨尺度关系。为了验证该变换的有效性,我们进行了图像去噪实验。结果表明,所提出的方法能够获得比WT、SAWT等方法更好的去噪效果。

2 方向小波变换

WT以其优良的时频特性被广泛应用于信号、图像等信

到稿日期:2013-05-23 返修日期:2013-07-30 本文受国家自然科学基金项目(61070233)资助。

徐华楠(1983—),男,博士生,主要研究方向为图像处理、图像多尺度分析方法,E-mail:47173791@qq.com;彭国华(1962—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形图像处理;刘哲(1970—),女,博士,教授,主要研究方向为图像处理、信息融合、计算智能。

息处理领域。根据多尺度分析理论,一幅图像 f 经 WT 后可写为如下形式:

$$f = v + \sum_j w_j, j \in Z \quad (1)$$

式中, v 为 f 的逼近部分,也可看作 f 的低分辨率图像, w_j 为 j 尺度下的细节部分。WT 通常是沿图像的水平 and 垂直两个方向分别独立地应用 1D-WT 来实现的,导致了在 j 尺度下, w_j 只有水平、垂直和对角线 3 个方向的细节信息,并且基是各向同性的,因此不能最优地对图像进行稀疏表示。

SAWT 以 1D-WT 理论为基础,保持了 WT 复杂度低和设计简单的优良特性,弥补了 WT 方向性缺失和基的各向同性的缺点。它采用基于整数格的多方向各向异性基函数,滤波器设计源于 2D-WT,具有可分离滤波和临界采样结构。它的非线性逼近能力可达 $O(N^{-1.55})^{[7]}$,是有效的图像处理工具。

下面介绍 SAWT 的实现过程,讨论其如何对 WT 进行多方向扩展,并弥补基的各向同性的缺陷。

2.1 多方向扩展

若图像中一组像素点 $A(x, y) \in R^2$ 的行和列的坐标满足式(2),那么这组像素点就属于一条斜率为 r 、截距为 d 的直线。

$$y = rx + d \quad (2)$$

这组像素点可以组成一条数字化线段 $L(r, d)$ 。对于给定的斜率 r ,每一个像素点只属于一条数字化线段。当指定斜率 r 时,一族数字化线段 $\{L(r, d), d \in R\}$ 就可以分割整个图像平面。利用数字化方向能够很好地抓住图像的方向特性。

然而沿着数字化方向对图像进行采样时,会出现方向交叉的现象。基于整数格的变换可以避免这一问题。任意给定的整数格 Δ 都是整数 Z^2 平面中的一个子集,即 $\Delta \subset Z^2$ 。一个整数格可由一个不唯一的生成矩阵 M_Δ 来表示,即:

$$M_\Delta = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \end{bmatrix}, a_1, a_2, b_1, b_2 \in Z \quad (3)$$

式中, \vec{d}_1 为变换方向, \vec{d}_2 为队列方向。整数平面 Z^2 可由格 Δ 分成 $|\det(M_\Delta)|$ 个陪集。

当沿着生成矩阵 M_Δ 确定的变换方向 \vec{d}_1 对图像进行 1D-WT(包括滤波和采样操作)时,采样后的图像中原来沿队列方向 \vec{d}_2 的像素点还保持它们的方向不变,并且此时所有的像素点都属于格 Δ 的子格 Δ' ,其生成矩阵为:

$$M_{\Delta'} = D_s \cdot M_\Delta = \begin{bmatrix} 2\vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, $D_s = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为水平采样算子。由格 Δ 划分的陪集是相互独立的,在每个陪集上沿一个方向采样后,图像中的像素点还能保持它们的另外一个方向不变,从而避免了方向交叉,迭代过程就可以有效地进行下去。

2.2 各向异性小波变换

WT 的基的各向同性源于结构上的各向同性,即在每一尺度上,滤波和采样操作在水平和垂直方向上的次数是一样的。正是基于这些分析,Vladan Velisavljevic 等人提出了用一维滤波器和采样来构造具有各向异性的小波变换方法。

首先,Vladan Velisavljevic 等人定义了一个完全可分离小波变换(Fully Separable Wavelet Transform, FSWT),

FSWT 也被称为张量小波。FSWT 提供各向异性基函数,这些基函数可以很好地适应各向异性的对象。然而,若图像包含一条曲线(或者非直线的不连续点),那么随着变换尺度的增加,非零系数的数目将会呈指数增长,这个时候 FSWT 就会失效^[7,9,10]。这是因为,与图像中的各向异性对象相比,FSWT 的基函数拉伸度过大,导致其不能提供一个紧凑的图像表示。为此,Vladan Velisavljevic 等人提出了一种各向异性小波变换(Anisotropic Wavelet Transform, AWT),它应用于更广泛的图像类型时性能更好。

在 AWT 中,沿着水平和垂直方向上应用 1D-WT 的数目是不一定相同的,即在同一尺度上,设水平方向的变换数为 n_1 ,垂直方向的为 n_2 ,则 n_1 并不一定要和 n_2 相等。迭代过程与 WT 一样,在低频部分重复进行。这样的变换可记为 $AWT(n_1, n_2)$ 。WT 和 FSWT 都可以用 $AWT(n_1, n_2)$ 来表示,WT 可用 $AWT(1, 1)$ 来表示,FSWT 则要复杂些^[7]。

在整数格上应用 $AWT(n_1, n_2)$,即对给定的整数格,利用其生成矩阵 M_Δ 将图像分成若干陪集,然后在这些陪集上沿变换方向和队列方向进行 AWT,即为斜小波变换(Skewed Anisotropic Wavelet Transform, SAWT),它的基称为方向小波。当 $|\det(M_\Delta)| = 1$ 时,SAWT 保持了分辨率尺度关系,即 SAWT 的低频子带可以看作原始图像的低分辨率图像^[18];但是当 n_1, n_2 不相等时,低频子带的长宽比和原始图像的长宽比是不一致的(见图 1(c))。

3 基于小波变换的多方向小波变换

SAWT 通过整数格对图像进行陪集划分,达到了对 WT 进行多方向扩展的目的;沿变换方向和队列方向进行不同次数的 1D-WT,使得 SAWT 的基具有各向异性,从而弥补了 WT 方向性缺失、基是各向同性的缺陷。同时,由于 SAWT 是由 1D-WT 构建的,保持了 WT 复杂度低和设计简单的优良特性。图像经 SAWT 后,类似于式(1)可写为:

$$f = \hat{v} + \sum_j \hat{w}_j, j \in Z \quad (5)$$

但是 SAWT 破坏了 WT 的分辨率尺度关系,只有在 $|\det(M_\Delta)| = 1$ 且 n_1, n_2 相等时, \hat{v} 才可看作原始图像的低分辨率图像, \hat{v} 的长宽比与原始图像的长宽比保持一致。当 $|\det(M_\Delta)| \neq 1$ 时,SAWT 对平滑区域的表示能力尚不及 WT。然而当在不同的尺度选择不同的生成矩阵时, \hat{w}_j 比式(1)中的 w_j 有更多的方向细节。类比式(1)和式(5),综合上面的分析,借鉴前人的方法,考虑在 WT 之后级联 SAWT,即在每个尺度,先对图像进行 WT,然后对得到的每个高频子带进行 SAWT,如此在低频子带迭代进行,即为 WT-SAWT。WT-SAWT 不仅能保持 WT 的分辨率尺度关系,而且还具有灵活多变的方向,基也是各向异性的。而且由于 WT-SAWT 是用 1D-WT 构造的,避免了文献[16]小波轮廓波中方向滤波器设计困难的问题。值得注意的是,WT-SAWT、SAWT 与 WT 的计算复杂度是同阶的。图 1 给出了对 Lena 图像分别进行 WT、SAWT 和 WT-SAWT 后的子带系数图像。3 种变换中所使用的滤波器均为“9/7”滤波器,分解层数均为 2 层。SAWT 和 WT-SAWT 中的 SAWT 所采用的整数格生成矩阵为 $[1, 1; 0, 1]$,沿水平和垂直方向进行 1D-WT 分解的次数分别为 2 和 1。从图中可看出,大小为 512×512 的图像经

SAWT 以上述参数分解后,得到的低频子带的大小只有 128×32 ,并且经过了 2 次剪切变换(此时生成矩阵的行列式的值为 1,相当于剪切变换);而 WT 和 WT-SAWT 得到的低频子带可看作原始图像的低分辨率图像,保持了多分辨率尺度关系。

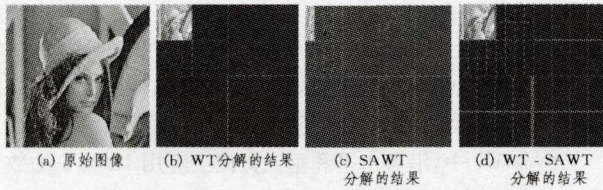


图 1 对 Lena 图像进行 3 种变换得到的系数子带图像

对大小都为 512×512 的 Barbara 图像和 Truck 图像进行非线性逼近,以观察 WT-SAWT 对图像的表达能力,并与 WT 和 SAWT 比较。这 3 种变换中所使用的滤波器均为“9/7”滤波器,WT 分解的层数为 4,SAWT 分解层数为 3,WT-SAWT 中 WT 分解的层数为 4;SAWT 和 WT-SAWT 中的 SAWT 所采用的整数格生成矩阵为 $[1, 1; 0, 1]$,沿水平和垂直方向进行 1D-WT 分解的次数分别为 2 和 3。图 2 和图 3 分别为对 Barbara 和 Truck 图像使用 4096 个绝对值最大的系数进行非线性逼近的结果。表 1 列出了 3 种变换方法非线性逼近的峰值信噪比(PSNR)。



图 2 对 Barbara 图像进行非线性逼近的结果

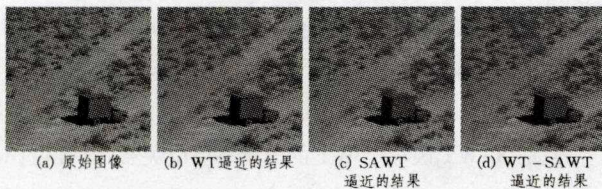


图 3 对 Truck 图像进行非线性逼近的结果

表 1 用 3 种变换方法进行非线性逼近的峰值信噪比

Methods	PSNR/dB	
	Barbara	Truck
WT	23.94	26.71
SAWT	24.33	25.68
WT-SAWT	24.84	27.60

由表 1 及图中的细节可以看出,WT 可以很好地表示图像中的平滑区域,但是对细节信息的保持不是很好;SAWT 可以很好地表示图像中的细节信息,但是对平滑区域的处理效果不是很好;而 WT-SAWT 对平滑区域和细节信息都能进行很好的表示。

4 仿真实验及结果分析

基于变换域的图像去噪利用噪声和图像信息在变换域的能量存在差异这一特点,通过设定适当的阈值,达到信噪分离的目的,从而提高图像的质量。对于 WT,常用的硬阈值算法可以表示为:

$$\hat{c} = \begin{cases} c, & |c| \geq th \\ 0, & |c| < th \end{cases} \quad (6)$$

式中, c 表示对图像进行 WT 分解后的子带系数, th 为所选定的阈值, \hat{c} 为去噪后的系数。对 \hat{c} 进行小波逆变换即可得到去噪图像。经典的阈值选取为 $th = 3\sigma$,其中 σ 为噪声的方差。

为了比较 WT-SAWT 在图像去噪中的应用效果,我们对两幅大小为 512×512 的图像分别加入不同噪声水平的高斯白噪声,依次使用 WT、SAWT、CT 和 WT-SAWT 对含噪图像进行去噪实验。变换中所使用的小波滤波器均为“9/7”滤波器,小波分解的层数为 4,SAWT 分解层数为 3,WT-SAWT 中 WT 分解的层数为 4;SAWT 和 WT-SAWT 中的 SAWT 所采用的整数格生成矩阵为 $[1, 2; -1, 1]$,沿水平和垂直方向进行一维小波分解的次数分别为 2 和 3;CT 也进行 4 层分解,各层方向数分别为 4、8、8、16。之所以 SAWT 分解的层数选择为 3,是因为一幅大小为 512×512 的图像采用上述参数变换后的低频部分的大小仅为 8×1 ,不能再进行变换。阈值均取 $th = 3\sigma$ 。以 PSNR 值和结构相似性(SSIM)^[19,20] 作为去噪结果的客观评价标准。表 2、表 3 分别给出了含噪图像及采用 4 种变换进行硬阈值去噪后图像的 PSNR 值和 SSIM 结果,可以看出,本文所提出的 WT-SAWT 方法得到的 PSNR 值和 SSIM 结果要优于其他 3 种方法。对于 Barbara 图像,SAWT 方法得到的 PSNR 值比 WT 的高,比 CT 的低。对于 Truck 图像,SAWT 方法得到的 PSNR 值没有 WT 方法高的原因是由于选取的变换方向和队列方向与 Truck 图像中边缘的方向不匹配。而对于 SSIM,SAWT 方法得到的均低于 WT 和 CT。本文提出的方法能在 SAWT 表现不好的时候仍旧得到较好的结果,也从侧面验证了所提出方法的有效性。图 4、图 5 给出了两幅图像加入噪声方差为 30 时的局部含噪图像以及使用 4 种方法去噪后的局部图像。从图中可以看出,对图像中的平滑区域 WT 方法去噪的效果比较好,但是 WT 方法对图像中的纹理、边缘等细节的保持不好,并且在这些区域会产生视觉误差。SAWT 方法能很好地保留图像细节,但是对平滑区域的处理效果不是很理想,出现了干扰纹。而 WT-SAWT 方法不仅能够很好地保留图像中的纹理、边缘等细节信息,并且对平滑区域的处理效果也比较好。

表 2 对 2 幅图像去噪的 PSNR 结果

图像	噪声方差	PSNR/dB				
		含噪图像	WT	SAWT	CT	WT-SAWT
Barbara	10	28.08	29.63	29.77	28.12	29.89
	20	22.09	25.45	25.65	25.99	26.03
	30	18.56	22.97	23.14	23.57	23.93
Truck	10	24.55	28.47	27.71	28.48	29.01
	20	18.51	24.31	24.23	24.36	24.82
	30	15.03	21.98	21.62	22.25	22.63

表 3 对图像去噪的 SSIM 结果

图像	噪声方差	SSIM				
		含噪图像	WT	SAWT	CT	WT-SAWT
Barbara	10	0.71	0.86	0.79	0.85	0.88
	20	0.48	0.74	0.63	0.73	0.77
	30	0.34	0.64	0.50	0.63	0.69
Truck	10	0.59	0.81	0.79	0.85	0.87
	20	0.32	0.78	0.61	0.74	0.68
	30	0.20	0.65	0.48	0.60	0.71



图4 对 Barbara 图像去噪的局部结果



图5 对 Truck 图像去噪的局部结果

结束语 WT 是沿图像的水平 and 垂直两个方向分别独立地进行数目相等的 1D-WT, 导致 WT 的方向性不足, 基是各向同性的。SAWT 是建立在整数格上的各向异性小波变换, 是 WT 的多方向扩展, 它的基是各向异性的, 保持了 WT 复杂度低和设计简单的优点。但是 SAWT 破坏了 WT 的分辨率尺度关系。从实验中也可看到 SAWT 对图像中的平滑区域的表示能力尚不及 WT。本文应用 WT 和 SAWT 构造了 WT-SAWT, 不仅保持了图像的多分辨率尺度关系和 WT 复杂度低、设计简单的优点, 还弥补了 SAWT 的缺点。使用 WT-SAWT 对图像进行去噪实验的结果表明, 所提出的方法提高了图像的 PSNR 值和 SSIM 值, 能很好地处理图像中的平滑区域和纹理、边缘等细节信息, 且能在 SAWT 表现不好的时候仍旧得到较好的结果, 验证了 WT-SAWT 的有效性。

参 考 文 献

[1] 刘哲. 基于非下采样轮廓小波变换的图像去噪[J]. 光电子·激光, 2009, 20(7): 954-958

[2] Candès E J. Ridgelets: Theory and Applications [D]. USA: Department of Statistics, Stanford University, 1998

[3] Candès E J, Donoho D L. Curvelets and curvilinear integrals [R]. Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA, 1999

[4] Candès E J, Donoho D L. Curvelets; a surprisingly effective non-adaptive representation for objects with edges [D]. Saint-Malo: Vanderbilt University Press, 1999

[5] Do M N, Vetterli M. Contourlets [A] // Stoeckler J, Welland G V, eds., Beyond Wavelets [C]. Academic Press, 2002: 1-27

[6] Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation [J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2005, 14(12): 2091-2106

[7] Velisavljevic V, Beferull-Lozano B, Vetterli M, et al. Directionlets; Anisotropic multidirectional representation with separable filtering [J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2006, 25(7): 1916-1933

[8] Velisavljevic V, Dragotti P L, Vetterli M. Directional wavelet transforms and frames [C] // IEEE international conference on image processing (ICIP). Rochester: IEEE Press, 2002, 3: 589-592

[9] 闫敬文, 屈小波. 超小波分析及应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2008

[10] 焦李成, 侯彪, 王爽, 等. 图像多尺度几何分析理论与应用 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008

[11] 林玉池, 刘启海, 陶力, 等. 一种基于 Directionlet 变换的图像融合算法 [J]. 纳米技术与精密工程, 2010, 8(6): 565-568

[12] Reji A P, Thomas T. A Learning Based Single Image Super Resolution Method Using Directionlets [C] // 2010 International Conference on Advances in Computer Engineering, 2010: 69-73

[13] 王贞俭, 曲长文. 方向小波域的选择性阈值 SAR 图像去噪 [J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(1): 65-70

[14] Ma Ning, Zhou Ze-ming, Zhang Peng, et al. SAR Image Despeckling using Directionlet Transform and Gaussian Scale Mixtures Model [C] // 2010 2nd International Conference on Future Computer and Communication, 2010, 2: 636-640

[15] Hou B, Guan H, Jiang J G, et al. SAR Image Despeckling Based on Improved Directionlet Domain Gaussian Mixtures Model [C] // Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2011 IEEE International, 2011: 3795-3798

[16] Eslami R, Radha H. Wavelet based contourlet transform and its application to image coding [C] // 2004 International Conference on Image Processing (ICIP), 2004, 5: 3189-3192

[17] 徐华楠, 刘哲, 刘灿. 多孔小波和非下采样滤波器组去除遥感图像的多种噪声 [J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(2): 233-238

[18] Velisavljevic V, Beferull-Lozano B, Vetterli M. Space-Frequency Quantization for Image Compression With Directionlets [J]. IEEE Transactions on image processing, 2007, 16(7): 1761-1773

[19] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Simoncelli. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612

[20] <http://www.cns.nyu.edu/lcv/ssim/>

[21] 王贞俭, 曲长文. Directionlet: 一种新的多尺度几何分析方法 [J]. 海军航空工程学院学报, 2007, 22(2): 233-236

(上接第 257 页)

[2] 张玉存, 邢婷婷. 一种复杂系统多源信息分析建模新方法 [J]. 电子学报, 2009, 37(11): 2427-2431

[3] Sen Zen-kai. Rapid visual earthquake hazard evaluation of existing buildings by fuzzy logic modeling [J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(8): 5653-5660

[4] Ajayi A O, Aderounmu G A. An adaptive fuzzy information retrieval model to improve response time perceived by e-commerce clients [J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(1): 82-91

[5] Azimirad E, Pariz N. A novel fuzzy model and control of single intersection at urban traffic network [J]. IEEE Systems Jour-

nal, 2010, 4(1): 107-110

[6] Mokeev A V. Description of the digital filter by the state space method [C] // 2009 International Siberian Conference on Control and Communications, 2009: 128-132

[7] 刘政怡, 吴建国, 李炜. 基于整句输入法的状态空间模型 [J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(30): 153-156

[8] 涂序彦, 王枫, 郭慧. 大系统控制论 [M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2005: 5-6

[9] 李德毅. 网络时代人工智能研究与发展 [J]. 智能系统学报, 2009, 4(1): 1-6

[10] 李德毅, 杜鹤. 不确定性人工智能 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005