



# 计算机科学

COMPUTER SCIENCE

## 去除离群点的改进椭圆拟合算法

郭斯羽, 吴延冬

引用本文

郭斯羽, 吴延冬. [去除离群点的改进椭圆拟合算法](#)[J]. 计算机科学, 2022, 49(4): 188-194.

GUO Si-yu, WU Yan-dong. [Improved Ellipse Fitting Algorithm with Outlier Removal](#)[J]. Computer Science, 2022, 49(4): 188-194.

---

## 相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

### [基于椭圆拟合的热带气旋中心定位研究](#)

Study of Positioning Tropical Cyclone Center Based on Ellipse Fitting

计算机科学, 2015, 42(5): 67-71. <https://doi.org/10.11896/j.issn.1002-137X.2015.05.014>

### [基于代数距离的椭圆拟合的优化及应用研究](#)

Optimization and Research on Ellipse Fitting and Application Based on Algebraic Distance

计算机科学, 2014, 41(Z11): 88-90.

### [一种基于双椭圆模型的视频人数统计方法](#)

Method of Video People Counting Based on Double\_ellipse Model

计算机科学, 2012, 39(Z6): 499-502.

### [三维视觉测量中圆中心投影误差分析方法](#)

Analysis Method for the Projection Error of Circle Center in 3D Vision Measurement

计算机科学, 2010, 37(12): 247-249.

# 去除离群点的改进椭圆拟合算法

郭斯羽 吴延冬

湖南大学电气与信息工程学院 长沙 410082

**摘要** 离群点可显著影响椭圆拟合的结果。针对这一问题,提出了一种基于截断最小二乘法和两种基于双点移除法的改进椭圆拟合算法。截断最小二乘法由随机采样开始,在每次迭代中选择当前拟合残差最小的数据点作为下一次迭代时的被拟合点集,并最终收敛于占据点集主体的非离群点的拟合结果;双点移除法则从完整的待拟合点集开始,每次移除拟合残差为正负最大值的一对数据点,直至剩余点的数量不超过给定比例。在实际零件的图像集上,对所提的3种算法及现有的对比算法进行了实验。结果表明,当所保留的椭圆点数较少时,两种基于双点移除法的算法的拟合精度最佳,但运行时间比基于截断最小二乘法的拟合方法长;就算法的最优性能而言,基于截断最小二乘法的改进椭圆拟合算法具有最佳的拟合精度与时间性能,其形状-位置匹配精度可达0.62像素,朝向角匹配精度可达 $0.6^\circ$ ,平均运行时间为6.5ms。此外,所提3种算法均具有参数少、意义直观、算法性能对参数不敏感的优点。实验结果表明了所提改进椭圆拟合算法特别是基于截断最小二乘法的算法的有效性。

**关键词** 椭圆拟合;椭圆检测;截断最小二乘;双点移除法;视觉测量

中图分类号 TP391

## Improved Ellipse Fitting Algorithm with Outlier Removal

GUO Si-yu and WU Yan-dong

College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China

**Abstract** The results of ellipse fitting can be considerably distorted by outliers in the fitted point set. To tackle this problem, three improved ellipse fitting algorithms, one of which is based on least trimmed square, and the other two on dual point removal, are proposed. The least trimmed square algorithm starts from a random sample of the original complete fitted set, and then in each iteration, new fitted set is formed by points with the least residual errors, till the process converges to an ellipse fitting a subset whose members are mostly non-outliers. Dual point removal algorithms, on the other hand, starts from the whole fitted set, removes the two points respectively with the maximal positive and the minimal negative residual errors, and halts when the number of points in the remaining set does not exceeds a user-defined threshold. The two proposed algorithms and existing methods are compared on an image base of actual accessories. Experimental results show that when the number of reserved ellipse points is relatively small, the dual removal-based algorithms present the best fitting accuracies, but are slower than the least trimmed square fitting algorithm. When the best performance with parameter tuning is concerned, however, the least trimmed square algorithm achieves a shape-location matching accuracy of 0.62 pixels and an orientation matching accuracy of  $0.6^\circ$ , at an average execution time of 6.5 ms, outperforming other algorithms. Other advantages of the proposed algorithms include the small number of algorithm parameters, the intuitiveness of the parameters, and the insensitivity of the algorithm performance to the parameters. These experimental results provide solid evidences for the effectiveness of the proposed algorithms, especially the least trimmed square algorithm.

**Keywords** Ellipse fitting, Ellipse detection, Least trimmed square, Dual point removal, Vision-based measurement

### 1 引言

椭圆是图像分析与理解中的一类常见目标,在圆形/椭圆形人造或自然目标的检测<sup>[1-4]</sup>以及信号处理<sup>[5-6]</sup>等应用场景中,常常会面临椭圆检测或拟合的需求。

椭圆拟合的经典方法由文献<sup>[7]</sup>提出。该方法使用二次

平面曲线的一般方程作为拟合模型,然后通过带约束条件的线性最小二乘拟合得到拟合曲线,并确保该曲线为椭圆;拟合使用的误差或距离度量是点到二次曲线的代数距离。由于代数距离与平面点到曲线的几何距离并不等价,因此文献<sup>[7]</sup>给出的拟合椭圆与视觉感知到的椭圆之间存在一定差别。直接基于几何距离的最小二乘椭圆拟合在文献<sup>[8]</sup>中给出。不过

到稿日期:2021-02-04 返修日期:2021-05-14

基金项目:国家自然科学基金(61471167)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61471167).

通信作者:郭斯羽(syguo75@163.com)

此时的椭圆拟合问题成为了一个非线性拟合问题,不仅计算复杂度明显提高,而且算法的收敛性问题也没有得到彻底解决。其后的改进方法包括使用 Sampson 距离<sup>[9]</sup>、点到椭圆两焦点的距离和与长轴长度的均方误差<sup>[10]</sup>、最大相关熵<sup>[11]</sup>、最小平均绝对误差<sup>[12]</sup>、点到椭圆的  $p$ -范数代数距离<sup>[13]</sup>、变形组合后的椭圆参数<sup>[14-15]</sup>等不同的误差或距离度量,或使不同的求解方法如 Majorization-Minimization 框架<sup>[16]</sup>、遗传算法<sup>[17]</sup>或更加稳定的数值算法<sup>[18-19]</sup>。

离群点对最小二乘一类的拟合算法有显著的影响,因此很多椭圆拟合的工作针对拟合点集中存在相当比例的离群点的情况而展开。一种较直接的思路是通过  $3\sigma$  法则来发现并排除离群点<sup>[20-21]</sup>。不过由于离群点对于拟合结果的影响较为显著,因此  $3\sigma$  法则难以充分发现和排除离群点。随机采样也是一种有效抑制离群点影响的途径,如文献[22]采用了 RANSAC 技术将椭圆拟合控制在非离群点集之上;文献[11, 23]使用对离群点不太敏感的误差度量,来作为拟合椭圆的目标函数;文献[24]采用了一种两阶段的离群点排除策略,分别通过基于接近度和基于模型的检测算法来发现数据集中的离群点;文献[25]则将非离群点的选择方式作为待优化参数加入拟合的最小化问题之中,使算法能够选择“质量较好”的点来进行椭圆拟合。总体而言,上述方法具有以下问题:计算开销较大,部分算法采用了聚类算法或图割算法等;算法可调参数较多,且部分参数物理意义不够直观,不易设置,如对点到椭圆的代数距离设置阈值等;部分随机性算法由于采样点数量偏少,导致所得的拟合椭圆的精度虽然有所提高,但仍显不足。

椭圆检测与椭圆拟合问题有着密切的联系。对于存在离群点的椭圆拟合问题而言,其目标也可以视为在点集中检测真实椭圆;在椭圆检测过程中,椭圆拟合是用来获取候选椭圆参数的常用方法;或者在检测得到椭圆之后,再进一步利用椭圆拟合方法提高检测结果的精度以达到亚像素的级别。Hough 变换是常用的椭圆检测方法之一,但由于椭圆参数较多,因此常常需要使用随机 Hough 变换等多对一的方法,配合关于椭圆几何性质的先验知识来获得精度和速度均较为理想的算法,如三点确定椭圆的随机 Hough 变换方法<sup>[26]</sup>和利用特征弦约束筛选随机采样的随机 Hough 变换方法<sup>[27]</sup>;或者通过其他方式来增强 Hough 变换,如使用 Jaya 优化算法的 IHTJ 算法<sup>[28]</sup>。而将单个像素聚集为弧段,再以弧段为基本单元检测和构建椭圆的方法,也是常见的减少计算量、提高检测精度的途径<sup>[29-32]</sup>。

针对拟合点集中存在离群点的情况,本文给出了一种基于截断最小二乘和两种基于双点移除方法的可去除离群点的改进椭圆拟合算法,并对这 3 种算法进行了比较,将效果最好的基于截断最小二乘的椭圆拟合算法与现有的若干椭圆拟合和检测算法进行了比较。实验结果表明,基于截断最小二乘的改进椭圆拟合算法可有效克服点集中离群点的影响,提高椭圆拟合精度,且运算速度快,是一种有效的椭圆拟合方法。

## 2 基于代数距离的椭圆拟合

为叙述完整,本节简要介绍文献[7]中的椭圆拟合方法。

一般二次曲线的代数方程为:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

平面上某点  $(x_q, y_q)$  代入式(1)左侧所得的值为:

$$d_a(x_q, y_q; \mathbf{p}) = Ax_q^2 + Bx_qy_q + Cy_q^2 + Dx_q + Ey_q + F \quad (2)$$

即该点至二次曲线(1)的代数距离,其中,  $\mathbf{p} = (A, B, C, D, E, F)^T$  在此称为椭圆的“代数参数”。

给定待拟合的点集  $\{(x_i, y_i), i=1, \dots, N\}$ , 基于代数距离的最小二乘椭圆拟合实际上是求解最小化问题:

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^N d_a^2(x_i, y_i; \mathbf{p}) \quad (3)$$

注意:式(1)是一般二次曲线的方程。若要确保曲线为椭圆,需要满足  $B^2 - 4AC < 0$ 。由于在式(1)的等号两侧同时乘以不为 0 的常数仍然可以得出相同的曲线,可以等价地将上述椭圆约束表达为  $B^2 - 4AC = -1$  或  $4AC - B^2 = 1$ 。为保证拟合所得的曲线为椭圆,应该用如下的有约束的最小化问题代替无约束最小化问题(3):

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^N d_a^2(x_i, y_i; \mathbf{p}) \quad (4)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{p}^T \mathbf{S} \mathbf{p} = 1$$

其中:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

椭圆拟合所需的式(4)的最小二乘解可通过求解广义特征值问题而得:

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{p} = \lambda \mathbf{S} \mathbf{p} \quad (5)$$

其中:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N^2 & x_N y_N & y_N^2 & x_N & y_N & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

文献[7]中证明了广义特征值问题(5)仅有一个正的广义特征值,该广义特征值所对应的广义特征矢量就是所需的  $\mathbf{p}^*$ 。

椭圆的代数参数与椭圆中心坐标  $(x_c, y_c)$ 、半长轴长度  $a$ 、半短轴长度  $b$  及长轴朝向角  $\theta$  这 5 个“几何参数”之间的转换关系如下。

如果要求  $A, C > 0$ , 则:

$$x_c = \frac{2CD - BE}{4J}, y_c = \frac{2AE - BD}{4J} \quad (7)$$

$$a = \sqrt{\frac{-\xi}{(A+C) - \delta}}, b = \sqrt{\frac{-\xi}{(A+C) + \delta}} \quad (8)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{B}{A-C} - \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

其中:

$$J = \frac{1}{4} B^2 - AC \quad (10)$$

$$\xi = \frac{1}{2J} (AE^2 + CD^2 - BDE + 4FJ) \quad (11)$$

$$\delta = \sqrt{(A-C)^2 + B^2} \quad (12)$$

## 3 去离群点的最小二乘改进椭圆拟合

与一般的最小二乘问题类似,当待拟合点集中存在明显

的离群点时,这些离群点可能会显著影响拟合结果。如果希望通过最小二乘拟合来精确测量椭圆形对象的几何参数,离群点将显著降低测量精度。因此需要通过某种方式将离群点排除在进行拟合的点集之外,以保证拟合结果的准确性。

### 3.1 基于 Fast-LTS 的改进椭圆拟合

Fast-LTS 是一种可排除离群点的截断最小二乘法<sup>[33-34]</sup>。该方法采用类似贪婪算法的方式试图找到一个大小固定为  $h$  的待拟合点集的子集(称为  $h$ -子集),使得该  $h$ -子集的拟合误差最小。这一拟合误差用  $h$ -子集中各点拟合残差的平方和来表征。

利用 Fast-LTS 进行的改进椭圆拟合的具体步骤如算法 1 所示。

#### 算法 1 Fast-LTS 改进椭圆拟合

输入:待拟合点集  $P = \{(x_i, y_i)\}, i = 1, \dots, N$ ;  $h$ -子集的大小  $h$ ; 重复次数  $N_T$

输出:拟合椭圆的代数参数  $p$

1. 根据式(6)构造  $Z$  矩阵;记录各轮拟合结果的集合  $R = \emptyset$ ;
2. 从  $P$  中随机取  $h$  个点构成初始  $h$ -子集;
3. 通过求解广义特征值问题(5)得到当前  $h$ -子集的拟合椭圆代数参数  $P_C$ ;
4. 求取  $P$  中各点的拟合残差  $\boldsymbol{\varepsilon} = Z\boldsymbol{p}_C$ ;
5. 将各点的拟合残差绝对值从小到大排序,即  $|\varepsilon_{i_1}| \leq |\varepsilon_{i_2}| \leq \dots \leq |\varepsilon_{i_n}|$ ;构造新的  $h$ -子集为  $\{(x_j, y_j), j = 1, \dots, h\}$ ,相应的总拟合误差为  $E_F = \sum_{j=1}^h |\varepsilon_j|$ ;
6. 若新  $h$ -子集的总拟合误差比旧  $h$ -子集小,则转至第 3 步;否则执行第 7 步;
7. 将最后一次拟合得到的椭圆代数参数  $\boldsymbol{p}_C$  以及对应的总拟合误差  $E_F$  保存到集合  $R$  中,即  $R \leftarrow R \cup \{(\boldsymbol{p}_C, E_F)\}$ ;
8. 将第 2 步至第 7 步重复  $N_T$  次,重复完后转至第 9 步;
9. 在  $R$  中找到使总拟合误差  $E_F$  为最小的椭圆代数参数作为输出  $\boldsymbol{p}$ 。

文献[33]给出算法 1 的收敛性证明。实际上,根据总拟合误差单调递减也可以直观地认识到算法总是收敛的。

### 3.2 基于双点移除的改进椭圆拟合

双点移除算法<sup>[35]</sup>也是一种可用于去除数据集中离群点的拟合方法。双点移除法的基本思路是从整个待拟合点集开始,每次拟合之后,便将拟合残差达到正负两侧极值的一对点从点集中移除,再进行下一轮拟合,如此循环直至点集中剩余的点数达到某个预先给定的值。

若要适用双点移除算法,要求每次拟合都能确保残差有正有负。考虑最小化问题(4),引入拉格朗日乘子  $\lambda$  将问题转化为如下的无约束极值问题:

$$G(\boldsymbol{p}, \lambda) = \sum_{i=1}^N d_a^2(x_i, y_i; \boldsymbol{p}) - \lambda(\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{p} - 1)$$

该极值问题的解应满足:

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^N 2d_a \frac{\partial d_a}{\partial \boldsymbol{p}} - \lambda \frac{\partial (\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}} = 0 \quad (13)$$

由式(2)可见  $\frac{\partial d_a}{\partial \boldsymbol{p}} = 1$ , 而  $\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{p} = 4AC - B^2$ , 因此  $\frac{\partial (\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{S} \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}} =$

0。于是由式(13)得到:

$$\sum_{i=1}^N d_a(x_i, y_i; \boldsymbol{p}) = 0$$

即拟合残差的代数和为 0, 因此除所有残差均为 0 的平凡情形外,上述事实保证了残差必定有正有负,从而能够适用双点移除法。当点在椭圆内部时,代数距离为负,点在外部时则为正。

基于代数距离的双点移除(Dual Removal by Algebraic Distance, DRAD)改进椭圆拟合算法如算法 2 所示。

#### 算法 2 DRAD 改进椭圆拟合

输入:待拟合点集  $P = \{(x_i, y_i)\}, i = 1, \dots, N$ ; 移除结束时保留的点数上限  $N_R$

输出:拟合椭圆的代数参数  $\boldsymbol{p}$

1. 设置当前点集  $P_C = P$ , 当前点集中的点数  $n = N$ ;
2. 若  $n \leq N_R$ , 转至第 7 步; 否则执行第 3 步;
3. 根据式(6)构造  $P_C$  对应的  $Z$  矩阵, 记为  $Z_C$ ; 通过求解广义特征值问题(5)得到  $P_C$  的拟合椭圆代数参数  $\boldsymbol{p}_C$ ;
4. 求取  $P_C$  中各点的拟合残差  $\boldsymbol{\varepsilon} = Z_C \boldsymbol{p}_C$ ;
5. 确定待移除点的下标  $i_{\max}$  和  $i_{\min}$ , 满足  $\varepsilon_{i_{\max}} = \max_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i, \varepsilon_{i_{\min}} = \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i$ ;
6. 进行双点移除:

$$P_C \leftarrow P_C - \{(x_{i_{\max}}, y_{i_{\max}}), (x_{i_{\min}}, y_{i_{\min}})\}$$

设置  $n \leftarrow n - 2$ , 转至第 2 步;

7. 求取  $P_C$  的拟合椭圆的代数参数  $\boldsymbol{p}$  作为结果返回。

由于双点移除法每次循环中都确定地减少两个点,因此该算法也确保收敛。

使用代数距离虽然能将椭圆拟合问题转化为带线性约束的线性最小二乘问题,从而能够方便地求解,但是代数距离与视觉所感受到的几何距离,即点到椭圆之间的最短距离,两者之间存在出入。通过分析可知,相比短轴方向,代数距离将“弱化”长轴方向上的几何距离,也就是说,对于相同大小的几何距离,它在长轴方向上对应的代数距离将小于在短轴方向上对应的代数距离。为了考查代数距离与几何距离之间的这种偏差对椭圆拟合结果的影响,在此给出基于几何距离的双点移除(Dual Removal by Orthogonal Distance, DRAD)改进椭圆拟合算法。相比 DRAD 改进椭圆拟合,区别仅在于第 4 步中首先根据式(7)一式(12)将椭圆代数参数  $\boldsymbol{p}_C$  转换为几何参数,然后利用文献[8]中的方法求取  $P_C$  中各点到椭圆之间的几何距离作为拟合残差的度量。为了能够适用双点移除法,令几何距离与代数距离的符号相同,即点在椭圆内部时,点到椭圆的几何距离符号为负,点在外部时符号为正。

## 4 实验结果与分析

将所提的 Fast-LTS 改进椭圆拟合算法(记为 LTS)和基于双点移除的改进椭圆拟合算法(DRAD 和 DROD)在一个实际的图像集上进行实验。图像集由 50 幅  $1280 \times 960$  大小的图像构成,拍摄的对象为同一规格的锁扣,该锁扣的轮廓主体为椭圆形,但是在长轴两端存在附属紧固件构成的突出部分,从而形成了占据轮廓相当比例的离群点部分,如图 1 所示。图片经阈值分割、孔洞填充后提取区域轮廓,然后由人类专家手动选取椭圆上的轮廓点,最后利用文献[7]的椭圆拟合方法获得锁扣椭圆部分的准确参数作为基准数据。



图1 实验图像集示例图片

Fig.1 Example image in the test image set

实验中各算法所得椭圆与基准椭圆的匹配误差按如下方式定义。设  $\mathbf{e}_G = (x_{c,G}, y_{c,G}, a_G, b_G, \theta_G)^T$  为基准椭圆的几何参数, 而  $\mathbf{e} = (x_c, y_c, a, b, \theta)^T$  为拟合或检测得到的椭圆。将几何参数分为两部分:  $(x_c, y_c, a, b)^T$  称为椭圆的形状-位置参数, 而  $\theta$  称为椭圆的朝向角参数。形状-位置参数都具有几何量的量纲, 以像素为单位, 因此形状-位置参数的匹配误差可以合并为一个单独的误差, 即形状-位置误差:

$$\epsilon_{S-L} = \sqrt{(\Delta x_c)^2 + (\Delta y_c)^2 + (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$$

其中,  $\Delta x_c = x_c - x_{c,G}$ ,  $\Delta y_c = y_c - y_{c,G}$ ,  $\Delta a = a - a_G$ ,  $\Delta b = b - b_G$ 。朝向角误差则定义为:

$$\epsilon_O = \theta - \theta_G$$

$\epsilon_{S-L}$  和  $\epsilon_O$  给出的是单次匹配的误差, 即对一幅图像, 将算法运行一次所得到的结果的匹配误差。算法的总体匹配性能则通过在整个图像集上所得的多次匹配误差的均方根误差  $\sigma_{S-L}$  和  $\sigma_O$  来描述, 它们实际上可视为算法的单次测量标准差:

$$\sigma_{S-L} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \epsilon_{S-L,i}^2}, \quad \sigma_O = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \epsilon_{O,i}^2}$$

其中,  $M$  表示进行匹配的次数。

实验中的算法均利用 MATLAB 实现, 计算点到椭圆的几何距离等关键步骤用 C 语言实现并编译为 MEX 模块。实验在一台 ThinkPad T460p 笔记本电脑上完成, CPU 为 Intel Core i5-6300HQ 2.3 GHz, 8 GB RAM; 软件环境为 Windows 10 家庭版和 MATLAB R2012a。

#### 4.1 参数对 LTS 算法性能影响的实验

实验 1 考查 LTS 算法的检测精度和速度与算法参数  $h$  和  $N_T$  之间的关系。图像经阈值分割、孔洞填充和区域轮廓提取之后, 对所得轮廓点集进行椭圆拟合。 $h$  设置为总轮廓点数  $N$  的某个比例  $r$ ,  $r=0.1, 0.105, 0.110, \dots, 0.8$ ;  $N_T$  设置为 1, 3, 5, 10 和 15。由于 LTS 算法具有随机性, 因此在每组  $r-N_T$  参数设置下, 又将算法重复进行了 10 次。不同参数设置下的形状-位置匹配误差和朝向角误差分别如图 2 和图 3 所示, 算法的运行时间如图 4 所示。LTS 椭圆拟合的示例结果如图 5 所示, 算法参数为  $r=0.6$  和  $N_T=3$ 。

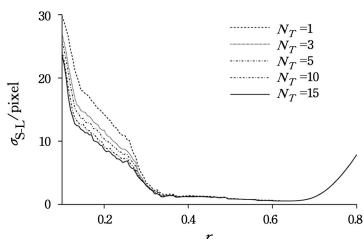


图2 不同参数下 LTS 算法的形状-位置匹配误差

Fig.2 Shape-location matching errors by LTS under various parameter settings

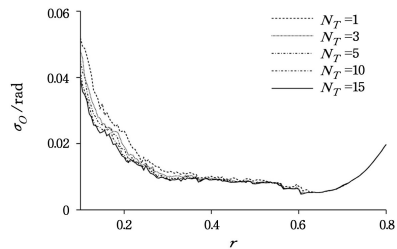


图3 不同参数下 LTS 算法的朝向角匹配误差

Fig.3 Orientation matching errors by LTS under various parameter settings

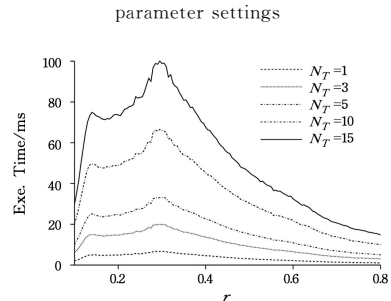


图4 不同参数下 LTS 算法的运行时间

Fig.4 Execution time of LTS under various parameter settings

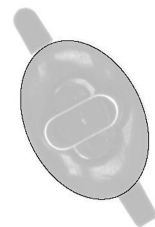


图5 LTS 算法给出的示例图像拟合结果

Fig.5 Fitting ellipse given by LTS on example image

由图 2 和图 3 可知, 形状-位置匹配误差和朝向角匹配误差随着  $r$  的增大均呈现先降后升的趋势。当  $r$  值较小时, 构成 LTS 中  $h$ -子集的点数较少, 因此轮廓中偏离椭圆的离群点有可能在  $h$ -子集中占据足够的比重, 从而使得截断最小二乘陷入局部极小, 但不能充分排除这些离群点的影响; 随着  $r$  值的增加, 占据轮廓主要比例的椭圆轮廓点的影响将越来越显著, 从而能够在 LTS 的迭代过程中将拟合曲线不断拉向期望的椭圆, 匹配误差也随之减小; 而当  $r$  值进一步增大, 超过了轮廓点中椭圆点所占的比重之后, 任一  $h$ -子集中都将包含离群点, 因此匹配误差再次增大。

从图 2 和图 3 还能看出, 随着  $r$  值的增大,  $N_T$  参数对于匹配性能的影响将越来越小, 最终实际上可以忽略。这是由于当  $h$ -子集中包含的椭圆轮廓点比例达到一定程度之后, LTS 迭代能够有效地排除离群点的影响, 从而使得算法的行为方式更接近于确定性算法而非随机性算法。

从图 4 可见, 算法的运行时间随  $r$  的增大呈现出先升后降的趋势。当  $r$  值较小时, 一方面  $h$ -子集的点数较少, 拟合过程较快, 并且算法容易陷入局部极小, 迭代次数不多, 因此算法运行速度较快; 当  $r$  值增大时, 拟合步骤的时间增加, 同时  $h$ -子集中已经具有一定比例的椭圆轮廓点, 能够消除局部极小的影响, 但同时也具有较大比例的离群点, 因此算法需要

更多的迭代来排除离群点的影响并收敛到比较接近基准椭圆的结果,因此运行速度减慢;待 $r$ 值进一步增大,尽管拟合步骤的时间继续增加,但是 $h$ -子集包含的椭圆轮廓点比例足够高,使得任一初始 $h$ -子集都能够给出接近基准椭圆的拟合结果,因此算法的迭代次数显著减少,从而使得整体运行速度再次加快。

算法运行时间与 $N_T$ 参数之间存在着单调递增关系,其原因也十分明显,因为 $N_T$ 参数越大,意味着获取 $h$ -子集的操作的重复次数也越多,而每次获取 $h$ -子集的操作的计算开销相差不大,因此运行时间自然也会相应地按比例增加。

综合考虑实验1中匹配误差和运行时间的结果,后续实验中LTS算法的 $N_T$ 参数固定为3。

#### 4.2 LTS与基于双点移除的椭圆拟合算法对比实验

实验2考查所提出的3种去除离群点的改进椭圆拟合算法LTS, DRAD和DROD的性能对比。仍然用 $r$ 参数表示LTS算法的 $h$ -子集点数占轮廓点的比例,以及DRAD和DROD算法最终保留的轮廓点数占初始轮廓点数的比例, $r$ 仍然取为0.1, 0.105, 0.110, ..., 0.8。3种算法的形状-位置匹配误差和朝向角误差分别如图6和图7所示,运行时间如图8所示。

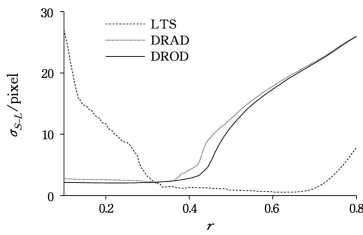


图6 3种去除离群点拟合算法的形状-位置匹配误差

Fig. 6 Shape-location matching errors by three outlier removal fitting algorithms

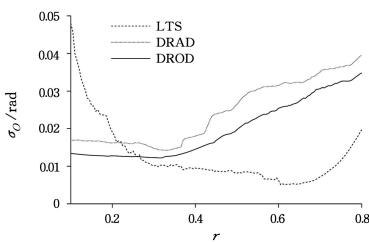


图7 3种去除离群点拟合算法的朝向角匹配误差

Fig. 7 Orientation matching error by three outlier removal fitting algorithms



图8 3种去除离群点拟合算法的运行时间

Fig. 8 Execution time of three outlier removal algorithms

由图6和图7可见,随着 $r$ 值的减小,DRAD和DROD算法的匹配精度都呈现不断提高的趋势,并且在 $r$ 值减小到某一程度时基本持平。这一到达精度持平阶段时对应的 $r$ 值基本反映了椭圆轮廓点在全体轮廓点中所占的比重。而较低 $r$ 值时所取得的较好的匹配精度,也说明了双点移除方法的有效性。总体来看,LTS方法能够给出更好的匹配精度。

此外,由图6和图7可见,DROD算法的匹配精度一般优于DRAD算法,表明使用几何距离作为轮廓点移除的依据确实更有利于给出符合人类视觉感知的椭圆拟合结果。

图8表明DRAD和DROD的运行时间均随 $r$ 值的减小而线性增加。结合算法原理,这一结果是自然的:每次进行双点移除的计算开销基本相同,拟合和残差的计算时间虽然随着点数的变化有所不同,但从算法总耗时时的线性变化趋势来看,这一计算时间对总的计算时间的贡献不大。因此算法的总耗时基本与循环次数成比例,而循环次数则需要移除的点数成正比,从而形成了算法运行时间的线性变化曲线。不过,无论是DRAD还是DROD,其运行时间均长于LTS算法。因此在所提出的3种去除离群点的椭圆拟合算法中,LTS算法匹配精度更高、运行速度更快。

#### 4.3 LTS与现有算法的对比实验

实验3比较LTS算法和若干现有的椭圆检测和拟合算法。对比算法包括基于曲线弧分割的椭圆检测算法(EDCS)<sup>[30]</sup>、基于随机采样与最小二乘拟合的椭圆检测算法(LSRED)<sup>[29]</sup>、基于三点采样的随机Hough变换椭圆检测算法(RHT3)<sup>[26]</sup>、椭圆代数参数的直接最小二乘拟合(DLS)<sup>[7]</sup>以及两种无约束非迭代式的椭圆拟合算法(UNILS和EliFit)<sup>[14-15]</sup>。

算法参数设置如下:对于LTS,根据实验1和实验2的结果,设置 $r=0.6$ 和 $N_T=3$ ;对于EDCS,设置随机采样点数为100,长轴、短轴和椭圆中心位置的误差限为5像素,朝向角误差限为 $5^\circ$ ;对于LSRED,随机采样的窗口半宽为10像素,最大失败次数 $T_f$ 为100,剩余点比例下限 $T_m$ 为0.1,3个采样点两两间距离最小值 $T_a$ 为30像素,第4采样点至拟合椭圆的代数距离误差限 $T_d$ 为0.001,检测到的椭圆的完整度阈值 $T_r$ 为0.7,最大迭代次数 $T_i$ 为50,两次迭代间椭圆的最小变化率为0.05;对于RHT3,随机采样点的距离阈值 $d_i$ 为30,边缘朝向阈值 $a_i$ 为 $30^\circ$ ,第3点的朝向与前两个采样点连线朝向之间的误差限为 $20^\circ$ ,椭圆参数点累加时的参数误差限为5,椭圆边缘点与椭圆之间的几何距离误差限为5像素,椭圆完整度阈值为0.7,真实椭圆的累加值阈值为3,两点随机采样的最大失败次数为500,搜索椭圆的最大失败次数为5000。

由于椭圆检测算法可能检测得到多个椭圆,因此按以下方式找到与基准椭圆的最佳匹配:如果检测结果中有一个或多个椭圆的形状-位置匹配误差在5像素以内,则取这些椭圆中朝向角匹配误差最小者为最佳匹配;如果所有检测结果的形状-位置匹配误差均超过5像素,则取形状-位置匹配误差最小者为最佳匹配。

各算法的匹配精度对比如表1和表2所列,运行时间对比如表3所列。

表1 不同算法的形状-位置匹配误差

Table 1 Shape-location matching errors by different algorithms

(单位: pixel)

| 算法      | 最小值   | 最大值    | 均方根值   |
|---------|-------|--------|--------|
| LTS     | 0.03  | 3.47   | 0.62   |
| EDCS    | 0.18  | 29.95  | 3.64   |
| LSRED   | 0.10  | 45.91  | 24.66  |
| RHT3    | 1.14  | 123.38 | 31.60  |
| DLS     | 29.30 | 33.27  | 31.75  |
| UNILS   | 87.33 | 520.63 | 115.49 |
| ElliFit | 94.52 | 106.84 | 103.34 |

表2 不同算法的朝向角匹配误差

Table 2 Orientation matching errors by different algorithms

(单位: rad)

| 算法      | 最小值  | 最大值  | 均方根值 |
|---------|------|------|------|
| LTS     | 0.00 | 0.03 | 0.01 |
| EDCS    | 0.00 | 0.13 | 0.03 |
| LSRED   | 0.00 | 0.12 | 0.05 |
| RHT3    | 0.00 | 1.23 | 0.18 |
| DLS     | 0.00 | 0.08 | 0.05 |
| UNILS   | 1.40 | 1.57 | 1.51 |
| ElliFit | 0.00 | 1.55 | 0.92 |

表3 不同算法的运行时间

Table 3 Execution time of different algorithms

(单位: ms)

| 算法      | 最小值                | 最大值                | 平均值                | 标准差                |
|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| LTS     | 4.3                | 10.2               | 6.5                | 1.0                |
| EDCS    | 71.7               | 1132.1             | 272.6              | 274.8              |
| LSRED   | 6.4                | 259.6              | 102.5              | 52.9               |
| RHT3    | $1.44 \times 10^4$ | $1.61 \times 10^5$ | $1.09 \times 10^5$ | $3.04 \times 10^4$ |
| DLS     | 0.1                | 9.5                | 0.3                | 1.3                |
| UNILS   | 0.1                | 1.6                | 0.1                | 0.2                |
| ElliFit | 0.1                | 0.5                | 0.1                | 0.1                |

由表1和表2可知,LTS给出的匹配精度最高,而EDCS实际上结合了随机采样检测和最小二乘拟合,因此在匹配精度上也比除LTS以外的其他算法更好。而实验结果表明,其余的椭圆检测和拟合算法在图像中存在较多离群点时实用性欠佳,难以达到一般所需的检测精度。

由表3可知,LTS算法是除单纯的椭圆拟合算法之外运行时间最短的算法。椭圆检测算法实际上针对的问题较拟合更为复杂,因此运行时间较长。此外运行时间也与算法的实现方式有关,但这并不会改变关于算法运行速度的最终结论。

此外,相比EDCS,LSRED和RHT3等检测算法,LTS算法还有一个对实际应用具有重要意义的优点,即LTS算法涉及的参数较少,仅有2个参数需要设置,而且参数的物理意义明确直观,算法对参数也不是很敏感,因此可以通过较少的实验就能得到比较不错的设置。但是椭圆检测算法往往需要设置较多的参数,参数的合理值并不容易直观确定,而参数数量使得实验设置的方法变得十分耗时甚至不可行。因此对于实际应用而言,LTS的优越性比较明显。

当然,LTS方法的适用场合是场景中仅有一个待检测椭圆,且离群点数量不太多。文献[33]指出,LTS算法可容忍的离群点比例高达50%。

**结束语** 本文针对待拟合点集中存在离群点时的椭圆拟合问题,提出了3种带离群点去除能力的拟合算法,即基于

截断最小二乘法的改进椭圆拟合算法LTS,以及基于双点移除的改进椭圆拟合算法DRAD和DROD。

LTS算法在 $h$ -点集大小不超过但接近非离群点数量时,能够取得最好的拟合精度与速度;DRAD和DROD算法在保留点集大小低于非离群点数量时能够保持较为稳定的拟合精度,但运行速度将随移除点数的增加而加快。总体而言,LTS算法能够获得更好的拟合精度与速度,其中拟合精度在实验图像集上能够达到0.62像素(形状-位置误差)和 $0.6^\circ$ (朝向角误差),运行时间平均为6.5ms。

与已有的其他椭圆检测与拟合算法相比,LTS算法同样可以达到最好的拟合精度,同时运行速度仅次于单纯的椭圆拟合算法。

此外,LTS算法以及DRAD和DROD算法的参数数量少、参数意义直观、算法性能对参数不敏感,可作为实际应用中椭圆拟合任务的有效而实用的解决方法。

## 参考文献

- [1] ZHANG J F, MEI X, XU S S, et al. Method of video people counting based on double ellipse model[J]. Computer Science, 2012, 39(S1): 499-502.
- [2] LIU N Q, ZHANG W S, LI L. Study of positioning tropical cyclone center based on ellipse fitting[J]. Computer Science, 2015, 42(5): 67-71.
- [3] WU B, YE D, GUO Y B, et al. Multiple circle recognition and pose estimation for aerospace applications[J]. Acta Optica Sinica, 2017, 37(9): 216-226.
- [4] WANG Z, DONG N, ROSARIO S D, et al. Ellipse detection of optic disc-and-cup boundary in fundus images[C]// 16th International Symposium on Biomedical Imaging. IEEE, 2019.
- [5] LI H T, CAO C. Magnetometer correction based on improved algorithm of least square ellipse fitting[J]. Electronic Measurement Technology, 2019, 42(18): 65-68.
- [6] GOVINDAN P, KASAEIFARD A, SANIIE J. Ultrasonic chirplet echo parameter estimation using time-frequency distributions [C]// 2015 IEEE International Ultrasonics Symposium. 2015.
- [7] FITZGIBBON A, PILU M, FISHER R B. Direct least square fitting of ellipses[J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(5): 476-480.
- [8] AHN S J, RAUH W, WARNECKE H J. Least-squares orthogonal distances fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola[J]. Pattern Recognition, 2001, 34(12): 2283-2303.
- [9] SZPAK Z L, CHOJNACKI W, VAN DEN HENGEL A. Guaranteed ellipse fitting with the Sampson distance[C]// 2012 European Conference on Computer Vision. 2012: 87-100.
- [10] YU J, KULKARNI S R, POOR H V. Robust ellipse and spheroid fitting[J]. Pattern Recognition Letters, 2012, 33(5): 492-499.
- [11] LIANG J, WANG Y, ZENG X. Robust Ellipse Fitting via half-quadratic and semidefinite relaxation optimization [J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2015, 24(11): 4276-4286.
- [12] MUÑOZ-PÉREZ J, DE CÓZAR-MACÍAS O D, BLÁZQUEZ-PARRA E B, et al. Multicriteria robust fitting of elliptical pri-

- mitives[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2014, 49:492-509.
- [13] LIANG J, LI P, ZHOU D, et al. Robust ellipse fitting via alternating direction method of multipliers[J]. *Signal Processing*, 2019, 164:30-40.
- [14] PRASAD D K, QUEK C, LEUNG M K H. A precise ellipse fitting method for noisy data[C]// 9th International Conference Image Analysis and Recognition. 2012:253-260.
- [15] PRASAD D K, LEUNG M K H, QUEK C. ElliFit: An unconstrained, non-iterative, least squares based geometric Ellipse Fitting method[J]. *Pattern Recognition*, 2013, 46(5):1449-1465.
- [16] VAN DEUN K, GROENEN P J F. Majorization algorithms for inspecting circles, ellipses, squares, rectangles, and rhombi[J]. *Operations Research*, 2005, 53(6):957-967.
- [17] DE LA FRAGA L G, SILVA I V, CRUZ-CORTÉS N. Euclidean distance fit of ellipses with a genetic algorithm[C]// *EvoWorkshops 2007*. LNCS, 2007, 4448:359-366.
- [18] MAINI E S. Enhanced direct least square fitting of ellipses[J]. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2006, 20(6):939-953.
- [19] LIANG J, YU G, LI P, et al. Ellipse fitting via low-rank generalized multidimensional scaling matrix recovery[J]. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2018, 29:49-75.
- [20] CAO J L, LI J F. Improved ellipse fitting algorithm based on Letts criterion[J]. *Journal of Computer Applications*, 2017, 37(1):273-277.
- [21] LI H T, LIU K Q. Magnetometer correction based on improved algorithm of least square ellipse fitting[J]. *Electronic Measurement Technology*, 2018, 41(15):145-148.
- [22] HE Z Q, CAO B, ZHANG L X. A defect ellipse locating method based on least squares[J]. *Computer & Digital Engineering*, 2017, 45(11):2113-2117.
- [23] HU C L, WANG G, HO K C, et al. Robust ellipse fitting with Laplacian kernel based maximum correntropy criterion[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2021, 30:3127-3141.
- [24] YU J, ZHENG H, KULKARNI S R, et al. Two-stage outlier elimination for robust curve and surface fitting[J/OL]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. <https://doi.org/10.1155/2010/154891>.
- [25] LIANG J, ZHANG M, LIU D, et al. Robust ellipse fitting based on sparse combination of data points[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2013, 22(6):2207-2218.
- [26] CHEN Y X, QI F H. A new ellipse detection method using randomized Hough transform[J]. *Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2000, 19(1):43-47.
- [27] LI Y D, XU X P, ZHONG Y. Application of RHT based on character string constraint in ellipse detection[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2017, 38(1):50-56.
- [28] ZHANG X, MU R, CHEN K, et al. Intelligent Hough transform with Jaya to detect the diameter of red-hot circular workpiece[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2021, 21(1):560-567.
- [29] CHEN H F, LEI H, KONG Y B, et al. An improved randomized algorithm for detecting ellipses based on least square approach[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2008, 42(8):1360-1364.
- [30] LIU Z H, XIA Y. Ellipse detection method based on curve segment[J]. *Computer Technology and Development*, 2015, 25(10):19-23, 28.
- [31] FORNACIARI M, PRATI A, CUCCHIARA R. A fast and effective ellipse detector for embedded vision applications[J]. *Pattern Recognition*, 2014, 47(11):3693-3708.
- [32] DONG H, PRASAD D K, CHEN I M. Accurate detection of ellipses with false detection control at video rates using a gradient analysis[J]. *Pattern Recognition*, 2018, 81:112-130.
- [33] HUBERT M, ROUSSEUW P J, VAN AELST S. High-breakdown robust multivariate methods[J]. *Statistical Science*, 2008, 23(1):92-119.
- [34] ZHU Y J, GUO S Y, ZHU Z J, et al. Line detection algorithm combining LTS with Hough transform[J]. *Computer Engineering*, 2012, 38(14):206-210.
- [35] GUO S Y, ZHAI W J, TANG Q, et al. Combining the Hough transform and an improved least squares method for line detection[J]. *Computer Science*, 2012, 39(4):196-200.



**GUO Si-yu**, born in 1975, Ph.D, associate professor, is a member of China Computer Federation. His main research interests include image processing, machine vision, signal processing and artificial intelligence.

(责任编辑:李亚辉)