



计算机科学

COMPUTER SCIENCE

解决一类非光滑伪凸优化问题的新型神经网络

喻昕, 林植良

引用本文

喻昕, 林植良. 解决一类非光滑伪凸优化问题的新型神经网络[J]. 计算机科学, 2022, 49(5): 227-234.

YU Xin, LIN Zhi-liang. [Novel Neural Network for Dealing with a Kind of Non-smooth Pseudoconvex Optimization Problems](#)[J]. Computer Science, 2022, 49(5): 227-234.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[基于 BERT 的端到端语音合成方法](#)

End-to-End Speech Synthesis Based on BERT

计算机科学, 2022, 49(4): 221-226. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210300071>

[一种会话理解模型的问题生成方法](#)

Conversational Comprehension Model for Question Generation

计算机科学, 2022, 49(3): 232-238. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210200153>

[基于注意力机制的用户轨迹识别模型](#)

User Trajectory Identification Model via Attention Mechanism

计算机科学, 2022, 49(3): 308-312. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210300231>

[一种基于重构误差的交通轨迹异常检测方法](#)

Traffic Trajectory Anomaly Detection Method Based on Reconstruction Error

计算机科学, 2022, 49(2): 149-155. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210900235>

[基于多头注意力机制的用户窃电行为检测](#)

Electricity Theft Detection Based on Multi-head Attention Mechanism

计算机科学, 2022, 49(1): 140-145. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210100177>

解决一类非光滑伪凸优化问题的新型神经网络

喻 昕 林植良

广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004

(616312528@qq.com)

摘 要 对优化问题的研究一直以来深受科研工作者的关注。非光滑伪凸优化作为非凸优化中的一类特殊问题,频繁出现在机器学习、信号处理、生物信息学以及各类科学与工程领域中,成为学者们研究的重点。基于罚函数以及微分包含的思想,提出了一种解决带有不等式约束条件和等式约束条件的非光滑伪凸优化问题的新型神经网络方法。在给定的假设条件下,该神经网络的解可以在有限时间内进入可行域并永驻其中,最终收敛到优化问题的最优解集。相比其他神经网络模型,该模型具有以下优点:1)结构简单,为单层模型;2)不需要事先计算精确的惩罚因子;3)初始点可任意选取。在 MATLAB 环境下,通过数值实验得出,所提网络都能在有限时间内收敛到一个最优解;而用现有的神经网络模型解决同样的优化问题时,若初始点选取不恰当,则会导致状态解不能在有效时间内收敛甚至不能收敛。这不仅进一步地验证了所提神经网络的有效性,同时也说明其具有更广泛的应用范围。

关键词:微分包含;循环神经网络;非光滑伪凸优化;最优解集;惩罚因子

中图法分类号 TP183

Novel Neural Network for Dealing with a Kind of Non-smooth Pseudoconvex Optimization Problems

YU Xin and LIN Zhi-liang

School of Computer, Electronics and Information, Guangxi University, Nanning 530004, China

Abstract The research of optimization problem is favored by researchers. Nonsmooth pseudoconvex optimization problems are a special kind of nonconvex optimization problems, which often appear in machine learning, signal processing, bioinformatics and various scientific and engineering fields. Based on the idea of penalty function and differential inclusion, a new neural network method is proposed to solve the non-smooth pseudoconvex optimization problems with inequality constraints and equality constraints. Under given assumptions, the solution of the RNN can enter in the feasible region in finite time and stay there thereafter, at last converge to the optimal solution set of the optimization problem. Compared with other neural networks, the RNN has the following advantages: 1) simple structure, it is a single-layer model; 2) it is not need to compute an exact penalty parameter in advance; 3) the initial point is chosed arbitrarily. Under the environment of MATLAB, mathematical simulation experiments show that state solution can converge to the optimal solution. At the same time, if the initial points are not selected properly, the state solution will not converge in limit time even can not converge. This not only verifies the effectiveness of the proposed RNN, but also shows that the proposed network has a wider range of applications.

Keywords Differential inclusion, Recurrent neural network(RNN), Nonsmooth pseudoconvex optimization, Optimal solution set, Penalty parameter

1 引言

优化问题广泛存在于科学与工程领域,带有约束条件的优化问题更是层出不穷。虽然学者们已经提出了很多有效的数值方法^[1-4]来解决这些问题,但是当优化问题结构复杂且

需要实时解时,这些传统的数值方法仍然无法满足人们的要求。Tank 等^[5]在 1986 年提出了一个递归神经网络模型(Recurrent Neural Network, RNN)来解决线性规划问题,他们的开创性工作激发了研究人员开发各种有效的 RNN 模型。Kennedy 等^[6]于 1988 年提出了一种基于硬件实现求解实时

到稿日期:2021-04-19 返修日期:2021-05-16

基金项目:国家自然科学基金(61862004)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61862004).

通信作者:林植良(616312528@qq.com)

问题的神经网络模型,用于解决非线性规划问题。随后,Zhang等^[7]提出了拉格朗日RNN,Xia等^[8]提出了投影RNN,Hu等^[9]和Liu等^[10]提出了对偶RNN。

然而,上述神经网络大多是针对目标函数和限制条件均光滑的情况。为了解决一类非光滑优化问题,Forti等^[11]提出了一种基于次梯度理论的新型RNN。该模型可以解决一类带有不等式约束的优化问题,该问题的目标函数是非凸非光滑函数,不等式约束是非光滑凸函数。Li等^[12]提出了一个投影RNN,通过在Clarke广义梯度系统中引入投影法,解决一类特定的非光滑优化问题。通过使用惩罚函数和次梯度的方法,Xue等^[13]和Bian等^[14]提出了几种RNN模型来解决带有更多一般限制函数的非光滑优化问题,但是这种RNN的有效性依赖于惩罚参数的准确性。为了避免惩罚参数的计算,Bian等^[15]引入正则项来代替传统的惩罚参数,同时该RNN具有全局吸引性。此外,Qin等^[16]提出了另一种RNN来解决文献[14]中的问题,该方法采用了Tikhonov正则化方法。文献[16]中的RNN同样不需要计算准确的惩罚参数,也不需要文献[14-15]中关于 $\text{int}(S_1) \cap S_2 \neq \emptyset$ 的假设。Qin等^[17]也提出了一个双层RNN来解决文献[14]中的问题,且同样不需要文献[14-15]中关于 $\text{int}(S_1) \cap S_2 \neq \emptyset$ 的假设。

作为非凸优化中的一种,伪凸优化具有许多可以用RNN来求解的优良特性,在投资组合、图像处理、工程设计等领域有着广泛的应用^[18-19]。Hu等^[20]针对目标函数为光滑伪凸的优化问题,提出了一种基于投影法的RNN算法,然而该网络不能解决非光滑伪凸优化问题。Guo等^[21]和Qin等^[22]分别提出了一种RNN来处理一类约束条件仅含线性方程的非光滑伪凸优化问题。基于惩罚函数法,Liu等^[23]提出的RNN能够求解约束条件包括等式和盒集的非光滑伪凸优化问题。然而,这种网络的有效性依赖于精确的惩罚参数,而这些参数通常很难计算。Li等^[24]引入了一种基于投影法的RNN,它无须事先计算惩罚参数,可以处理一类更广泛的非光滑伪凸优化问题,其中的约束条件包括一些不等式和一个凸集。QIN等^[25]提出了一种单层神经网络模型,可以处理约束条件为不等式和等式的伪凸优化问题,但它要求目标函数是有界的。

在此基础上,本文提出了一种基于微分包含理论的神经网络,用以解决带有等式与不等式约束条件的非光滑伪凸优化问题。与现有的神经网络相比,本文的神经网络具有以下优势。

(1)对神经网络初始点的选取没有限制,可以任意选取。在文献[24,26]中,初始点需要在等式可行域 S_2 中选取;而在文献[23,27]中,初始点必须在一个有界的区域内选取。

(2)该神经网络模型为单层模型,结构相对简单,易于硬件实现。而文献[17,28]中分别为双层和三层神经网络模型,结构复杂,难以硬件实现。

(3)本文的神经网络不需要预先计算精确的惩罚函数,这就意味着我们无须计算目标函数在给定集合内的Lipschitz常数 l_v ,该常数在实际应用中通常很难计算。然而在文献

[13-14,23]中的神经网络模型都要求事先计算好惩罚参数,以此来保证模型的收敛性。

为了事先计算惩罚参数,通常需要以下步骤^[29]:

步骤1 找到 $\hat{x} \in \text{int}(S_1) \cap S_2$,并计算 $\hat{g} = \min_{1 \leq i \leq p} -G_i(\hat{x})$;

步骤2 找到一个满足 $S \subset B(\hat{x}, \rho)$ 的开球 $B(\hat{x}, \rho)$;

步骤3 在包含于 $\overline{B(\hat{x}, \rho)}$ 的一个给定紧集中,估计目标函数 f 的Lipschitz常数 l_v ;

步骤4 根据 \hat{g} 和 l_v 的值,计算出惩罚参数 σ 。

所提神经网络模型只需要进行步骤1,计算并找到 \hat{x} 和 \hat{g} 即可,避免了对 l_v 的估计。

2 问题描述与预备知识

2.1 问题描述

本文研究的问题如下式所示:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s. t. } g(x) \leq 0 \\ Ax = b \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$;目标函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是正则的且在可行域内是伪凸的,但不一定是光滑的; $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$,其中, $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$)是凸函数,但不一定是光滑的。不等式可行域、等式可行域和可行域的定义如下:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\} \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax - b = 0\} \\ S &= S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0, Ax - b = 0\} \end{aligned}$$

2.2 预备知识

定义 1^[30](上半连续集值映射) 对于任意的 $x \in \Omega$, $\psi(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个非空集合,则称函数 $\psi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个集值函数。称一个集值函数 $\psi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 $x' \in \Omega$ 上是上半连续的(*u. s. c.*),当且仅当对于任意 $\epsilon > 0$,存在一个 $\delta > 0$,使得 $\psi(B(x', \delta)) \subseteq B(\psi(x'), \epsilon)$ 。

定义 2^[31](伪凸函数) 假设一个非空集合 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸的。对于任意 $a, b \in K$,若 $\psi(b) \geq \psi(a)$,则存在 $\iota \in \partial\psi(a)$ 使得 $\langle \iota, b - a \rangle \geq 0$,我们称函数 ψ 是在 K 上的一个伪凸函数。

定义 3^[32](链式法则) 如果 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是正则函数, $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 t 处可微且满足Lipschitz连续,则:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \langle \xi(t), \dot{x}(t) \rangle, \forall \xi(t) \in V(x(t))$$

3 神经网络模型

为了解决带有等式约束与不等式约束的非光滑伪凸优化问题,我们将构建一个基于微分包含的神经网络模型。在此之前,先给出一些必要的定义。

首先,定义一个罚函数:

$$G(x) = \sum_{i=1}^p \max\{0, g_i(x)\}$$

因为 $g_i(x)$ ($i = 1, \dots, p$)是凸函数,所以 $G(x)$ 也是凸函数。因此,对所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都存在对应的 $\partial G(x)$,且:

$$\partial G(x) = \begin{cases} \sum_{i \in I^0(x)} [0, 1] \partial g_i(x), & x \in \text{bd}(S_1) \\ \{0\}, & x \in \text{int}(S_1) \\ \sum_{i \in I^+(x)} \partial g_i(x) + \sum_{i \in I^0(x)} [0, 1] \partial g_i(x), & x \notin S_1 \end{cases}$$

其中:

$$I^+(x) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} : g_i(x) > 0\}$$

$$I^0(x) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} : g_i(x) = 0\}$$

基于上文的理论知识,提出以下用以解决带有等式约束条件和不等式约束条件的非光滑伪凸优化问题的神经网络模型。

$$\dot{x}(t) \in -\mu(t)(I-P) \times \left\{ \frac{1}{\max\{1, \|\gamma\|\}} \gamma + (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha)\xi \right\}_{\gamma \in \partial f(x(t)), \xi \in \partial G(x(t))} - \mathbf{A}^T h(\mathbf{A}x(t) - b) \quad (2)$$

令 $t_{S_2} = \|\mathbf{A}x_0 - b\|_1 / \lambda_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$, $\lambda_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ 是矩阵 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 的最小特征值, x_0 是式(2)的初始点, $P = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$, α 是一个常数。因为 \mathbf{A} 是一个行满秩矩阵, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 是正定的, $\lambda_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) > 0$, 因此 $t_{S_2} > 0$ 是一个有限值。

另外, $h(x) = (\tilde{h}(x_1), \tilde{h}(x_2), \dots, \tilde{h}(x_m))^T$, 其中 h 的每个分量 $\tilde{h}(x_i)$ 定义为:

$$\tilde{h}(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i > 0 \\ [-1, 1], & x_i = 0 \\ -1, & x_i < 0 \end{cases}$$

其中, $i = 1, 2, \dots, m$ 。

函数 $\mu(t)$ 为开关函数, 定义为:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \leq t_{S_2} \\ 1, & \text{if } t > t_{S_2} \end{cases}$$

式(2)与其他现有的 RNN 在解决伪凸优化问题上的比较如表 1 所列。

表 1 与现有神经网络的对比

Table 1 Comparisons of related neural networks for pseudoconvex optimization problem

Reference	Layers	Neurons	Exact penalty parameters	Initial point selected arbitrarily
[11]	1	n	Yes	No
[13]	1	n	Yes	Yes
[14]	1	n	Yes	No
[15]	1	n	No	Yes
[17]	2	$n+m$	No	No
[18]	1	n	Yes	No
[26]	1	n	No	No
[28]	3	$n+m+p$	No	No
Herein	1	n	No	Yes

4 主要定理

我们使用了理论分析与实验验证的方式,来验证所提神经网络模型的有效性。在本文提出的神经网络模型中,任意选取的初始点都可以使状态解进入可行域内,且最终收敛到一个点上,而该点恰好是原始优化问题的最优解。

首先证明式(2)具有局部解,接着证明其可以在有限时间

内进入可行域内且不再离开;然后证明了因为式(2)的轨迹是有界的,所以本文提出的神经网络具有全局解;最后在前面分析的基础上,讨论神经网络的收敛性与准确性,说明神经网络轨迹最终会收敛到原始优化问题的一个最优解。

假设 1 存在一个点 $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\rho > 0$, 满足 $\tilde{x} \in \text{int}(S_1) \cap S_2$, $S \subset B(\tilde{x}, \rho)$, 使得 $\tilde{g} > 0$, 其中, $\tilde{g} = \min_{i=1,2,\dots,m} (-g_i(\tilde{x}))$ 。

定理 1 给定任意初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 在式(2)的最大定义域 $[0, T)$ 上, 至少存在一个局部解 $x(t)$, 其中 $T \in (t_{S_2}, +\infty)$ 。

证明:分两种情况讨论。

情况 1 $x_0 \notin S_2$ 。在这种情况下, $t_{S_2} > 0$ 。当 $t \in [0, t_{S_2}]$ 时, 式(2)可以简化为:

$$\dot{x}(t) \in -\mathbf{A}^T h(\mathbf{A}x(t) - b)$$

因为 $-\mathbf{A}^T h(\mathbf{A}x(t) - b)$ 是一个紧凸且非空的上半连续集值映射, 所以在最大定义域 $[0, T_1)$ 上存在一个局部解 $x(t)$, 其中 $T_1 \in (0, t_{S_2}]$ 。

令 $\phi(x) = \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|^2$, 其中 \tilde{x} 在假设 1 中已有定义。

对所有 $t < T_1$, 由定义 3 可得:

$$\frac{d}{dt} \phi(x(t)) = \langle x(t) - \tilde{x}, \dot{x}(t) \rangle = -(x(t) - \tilde{x})^T \mathbf{A}^T \eta(t)$$

其中, $\eta(t) \in h(\mathbf{A}x(t) - b)$ 是一个可测函数。显然, 由前文的定义可以得到, 对所有的 $t < T_1$, 有 $\frac{d}{dt} \phi(x(t)) \leq 0$ 。这就意味着 $x(t)$ 在 $t \in [0, T_1)$ 上是有界的。根据解的扩展性原理, 对任意初始点 $x_0 \notin S_2$, 式(2)的解在 $[0, t_{S_2}]$ 上都是存在的。

当 $t > t_{S_2}$ 时, 式(2)可以改写成:

$$\dot{x}(t) \in -(I-P) \times \left\{ \frac{1}{\max\{1, \|\gamma\|\}} \gamma + (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha)\xi \right\}_{\gamma \in \partial f(x(t)), \xi \in \partial G(x(t))} - \mathbf{A}^T h(\mathbf{A}x(t) - b) \quad (3)$$

通过简单的分析, 可以得出式(3)的右边是一个紧凸且非空的上半连续集值映射, 因此式(2)的局部解 $x(t)$ 存在于最大定义域 $[t_{S_2}, T_2]$ 上, 其中 $T_2 \in (t_{S_2}, +\infty)$ 。根据上面的理论分析可知, 对任意初始点 $x_0 \notin S_2$, $x(t)$ 存在于最大定义域 $[0, T)$ 上, $T \in (t_{S_2}, +\infty)$ 。

情况 2 $x_0 \in S_2$ 。在这种情况下, $t_{S_2} = 0$ 。与情况 1 类似的证明方法同样可以证明, 对于任意初始点 $x_0 \in S_2$, $x(t)$ 存在于最大定义域 $[0, T)$ 上, 其中 $T \in (t_{S_2}, +\infty)$ 。

定理 2 对任意初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 式(2)的局部解可以在有限时间内进入等式可行域 S_2 , 且进入后不再离开。

证明:令 $\pi(x) = \|\mathbf{A}x(t) - b\|_1$, 则 $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \pi(x) \leq 0\}$ 。因为 $\pi(x)$ 是凸正则函数, 有 $\partial \pi(x) = \mathbf{A}^T h(\mathbf{A}x(t) - b)$ 。由定义 3 可知, 存在 $\gamma(t) \in \partial f(x(t))$, $\xi(t) \in \partial G(x(t))$, $\eta(t) \in h(\mathbf{A}x(t) - b)$, 对几乎所有 $t \in [0, T)$ 满足:

$$\frac{d}{dt} \pi(x(t)) = \langle \mathbf{A}^T \eta(t), -\mu(t)(I-P) \left[\frac{1}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} \gamma(t) + (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha)\xi(t) \right] - \mathbf{A}^T \eta(t) \rangle$$

根据 P 的定义, 有 $\mathbf{A}(I-P) = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A} = 0$, 对几乎所有 $t \in [0, T)$, 有:

$$\frac{d}{dt} \pi(x(t)) = -\eta(t)^T \mathbf{A}\mathbf{A}^T \eta(t) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \|\eta(t)\|^2$$

因为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 是正定矩阵, 则 $\lambda_{\min}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) > 0$. 对于任意的 $x \notin S_2$, 由 h 的定义知, $\|\gamma(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t)|^2 \geq 1$, 则:

$$\frac{d}{dt}\pi(x(t)) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) < 0, t \in [0, T] \quad (4)$$

接下来, 我们要证明对于任意初始点 $x_0 \notin S_2$, 式(2)的局部解 $x(t)$ 可以在 t_{S_2} 时间内进入 S_2 .

$$0 < \pi(x(t_0)) \leq \pi(x(0)) - \lambda_{\min}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)t_0$$

解上面的不等式可得, $t_0 \leq \|\mathbf{A}x_0 - b\|_1 / \lambda_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$. 这意味着 $x(t)$ 会在 $t_{S_2} = \|\mathbf{A}x_0 - b\|_1 / \lambda_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ 后进入等式可行域 S_2 中.

以下证明 $x(t)$ 进入 S_2 后不再离开.

令 $t' \in [0, T)$, 则 $x(t') \in S_2$. 我们需要证明 $t \in [t', T)$ 时, $x(t) \in S_2$. 采用反证法, 假设 $x(t)$ 在 $t_1 \in (t', T)$ 时离开 S_2 , 即在 $t \in (t_1, t_2)$ 时, 有 $x(t) \notin S_2$, 其中 $t_2 \in (t_1, T)$. 因为对所有的 $t \in (t_1, t_2)$, 有 $\pi(x(t_1)) = 0$, $\frac{d}{dt}\pi(x(t)) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) < 0$. 通过计算可得, 对所有的 $t \in (t_1, t_2)$, 有 $\pi(x(t)) < 0$, 与 $\pi(x) > 0$ 矛盾.

因此, $x(t)$ 会在有限时间内进入 S_2 , 且进入后不再离开. 定理得证.

通过上面的定理, 可以得出, 当 $t > t_{S_2}$ 时, 式(2)可以转换为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -(I-P) \times \left\{ \frac{1}{\max\{1, \|\gamma\|\}} \gamma + (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha)\xi \right\}_{\gamma \in \partial f(x(t)), \xi \in \partial G(x(t))} - \mathbf{A}^T h(\mathbf{A}x(t) - b) \\ \mathbf{A}x(t) - b = 0 \end{cases} \quad (5)$$

下面我们将要证明式(2)的局部解可以在有限时间内进入 S 中且不再离开. 首先给出一个在后续证明中会用到的假设和引理.

假设 2 目标函数 f 在等式可行域内是有界的, 即 $\inf_{x \in S_2} f(x) > -\infty$.

引理 1^[25] 假定假设 1 成立, 对任意 $x \in S_2 \setminus S_1, \xi \in \partial G(x)$, 有:

$$(x - \tilde{x})^T (I - P)\xi \geq \tilde{g}$$

其中, $\tilde{g} = \min_{i=1,2,\dots,m} (-g_i(\tilde{x})) > 0$, \tilde{x} 在假设 1 中有定义.

定理 3 假定假设 1 和假设 2 成立, 对任意的初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 式(2)的局部解 $x(t)$ 将会在有限时间内进入可行域 S 中且不再离开.

证明: 由定理 2, 对任意的初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, RNN(2)的局部解会在 t_{S_2} 时间后进入 S_2 且不再离开. 下文将证明, 对任意初始点 $x_0 \in S_2 \setminus S_1$, 式(5)的局部解都可以在有限时间内进入 S_1 中.

当 $t > t_{S_2}$ 时, 神经网络可以简化为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -(I-P) \times \left\{ \frac{1}{\max\{1, \|\gamma\|\}} \gamma + (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha)\xi \right\}_{\gamma \in \partial f(x(t)), \xi \in \partial G(x(t))} \\ \mathbf{A}x(t) - b = 0 \end{cases} \quad (6)$$

由链式法则, 对几乎所有 $t \in [0, T)$ 得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(x(t)) &= -\xi(t)^T (I - P) \left\{ \frac{\gamma(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} + (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha)\xi(t) \right\} \\ &\leq \|(I - P)\xi(t)\| \frac{\gamma(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} - (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha)\xi(t)^T (I - P)\xi(t) \\ &= \|(I - P)\xi(t)\| \frac{\gamma(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} - (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha) \|(I - P)\xi(t)\|^2 \\ &= \|(I - P)\xi(t)\| \left\{ \frac{\gamma(t)}{\max\{1, \|\gamma(t)\|\}} - (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha) \|(I - P)\xi(t)\| \right\} \end{aligned}$$

由假设 2, 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 式(2)的局部解 $x(t)$ 都是有界的, 即存在 $R' > 0$, 使得 $\|x(t) - \tilde{x}\| \leq R'$. 结合引理 1, 在 $x(t)$ 进入 S 前, 对所有 $t \in [0, T)$, 有:

$$\frac{d}{dt}G(x(t)) \leq \frac{\tilde{g}}{R'} - \tilde{g}^2 - \alpha \left(\frac{\tilde{g}}{R'} \right)^2 < 0 \quad (7)$$

假设存在一个时间点 $T_1 > 0$, 使得所有的 $t > T_1$, 都有 $x(t) \in S_2 \setminus S_1$. 对式(7)两端从 t_{S_2} 到 t 进行积分, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 易得:

$$G(x(t)) - G(x(t_{S_2})) \leq \int_{t_{S_2}}^t \left[\frac{\tilde{g}}{R'} - \tilde{g}^2 - \alpha \left(\frac{\tilde{g}}{R'} \right)^2 \right] dt \rightarrow -\infty$$

上式与 $G(x(t))$ 的非负性相矛盾, 所以假设不成立. 故存在一个时间点 $t_{S_1} > 0$, 使得 $x(t) \in S$. 这说明式(2)的状态解 $x(t)$ 将在有限时间内进入可行域 S 中.

类似定理 2 的证明, 可证明式(2)的状态解 $x(t)$ 将永驻可行域 S 中.

定理 4 假定假设 1 和假设 2 成立, 对任意初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 式(2)至少有一个全局解.

证明: 对任意初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 假设 $x(t)$ 是式(2)的一个局部解. 若 $x_0 \notin S$, 根据定理 3 可知, $x(t)$ 会在有限时间内进入可行域 S 并永驻其中, 即对任意初始点 $x_0 \notin S, x(t)$ 在进入 S 前是有界的. 此外, 由假设 1 可知 S 是有界的, 因此 $x(t)$ 在 $t \in [0, T)$ 上也是有界的. 根据解的扩展性原理, 局部解 $x(t)$ 也是定义域 $t \in [0, +\infty)$ 上的一个全局解.

定理 5 假定假设 1 和假设 2 成立, 对任意初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 式(2)的解可以收敛到式(1)的一个最优解.

证明: 设 x^* 是式(1)的一个最优解. 考虑能量函数:

$$\tilde{\omega}(x) = f(x) - f(x^*) + \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2$$

当 $x \in S$ 时, 容易知道 $\tilde{\omega}(x) \geq 0$. 根据链式法则, 对几乎所有的 $t \geq 0$, 存在 $\tau(t) \in \partial f(x(t)), \zeta(t) \in \partial G(x(t))$, 满足:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\omega}(x(t)) = \langle \tau(t), \dot{x}(t) \rangle + \langle x(t) - x^*, \dot{x}(t) \rangle \quad (8)$$

当 $t \geq 0$ 时, 有 $x(t) \in S$, 则 $G(x(t)) = 0$, 即:

$$\langle \zeta(t), \dot{x}(t) \rangle = 0 \quad (9)$$

因此, 对所有的 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \langle \tau(t), \dot{x}(t) \rangle &= \langle \tau(t) + (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha)\zeta(t), \dot{x}(t) \rangle \\ &= -\|(I - P) \left\{ \frac{1}{\max\{1, \|\tau(t)\|\}} \tau(t) + (\|x(t) - \tilde{x}\|^2 + \alpha)\zeta(t) \right\}\|^2 \end{aligned}$$

$$= - \|\dot{x}(t)\|^2 \tag{10}$$

另一方面,结合定义 2 和式(8),可以得到:

$$\begin{aligned} \langle x(t) - x^*, \dot{x}(t) \rangle &= - \left\langle x(t) - x^*, \frac{\tau(t)}{\max\{1, \|\tau(t)\|\}} \right\rangle \\ &\quad - \langle x(t) - x^*, (\|x(t) - x^*\|^2 + \alpha)\zeta(t) \rangle \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

结合式(8)、式(10)和式(11),得:

$$\frac{d}{dt}\bar{\omega}(x(t)) \leq - \|\dot{x}(t)\|^2 \leq 0 \tag{12}$$

因此, $\bar{\omega}(x(t)) \geq 0$ 是一个非增函数。所以,存在一个非负常数 $\bar{\omega}_0$,使得:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{\omega}(x(t)) = \bar{\omega}_0$$

对式(12)的两端从 0 到 $+\infty$ 进行积分,可以得到:

$$\int_0^{+\infty} \|\dot{x}(t)\|^2 dt \leq \bar{\omega}(x(0)) - \bar{\omega}_0 < +\infty$$

这就意味着,当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\|\dot{x}(t)\| \rightarrow 0$ 。

另外,又因为当 $t \geq 0$ 时, $x(t)$ 是有界的,所以存在 \bar{x} 和一个序列 $\{t_M\}$,其中 $\lim_{M \rightarrow +\infty} t_M = +\infty$,使得:

$$\begin{cases} \lim_{M \rightarrow +\infty} \dot{x}(t_M) = 0 \\ \lim_{M \rightarrow +\infty} x(t_M) = \bar{x} \end{cases} \tag{13}$$

下面我们将证明 \bar{x} 是式(1)的最优解。

由定理 3 可知,存在 $\tau(t_M) \in \partial f(x(t_M))$, $\zeta(t_M) \in \partial G(x(t_M))$,使得:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_M) &= (I - P) \times \left\{ \frac{1}{\max\{1, \|\tau(t_M)\|\}} \tau(t_M) + \right. \\ &\quad \left. (\|x(t_M) - \bar{x}\|^2 + \alpha)\zeta(t_M) \right\} \end{aligned}$$

因为 $\{x(t_M)\}$ 有界, $\partial f(x)$ 是上半连续的,所以存在 $\{t_M\}$

中的一个序列 $\{t_M\}$ 以及 $\bar{\tau}$,使得:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \tau(t_M) = \bar{\tau}$$

结合 $\lim_{M \rightarrow +\infty} x(t_M) = \bar{x}$ 和 $\tau(t_M) \in \partial f(x(t_M))$,可得:

$$\bar{\tau} \in \partial f(\bar{x})$$

根据定理 3, $x(t_M), \bar{x} \in S$,可得:

$$(x(t_M) - x(t_M))^\top P = 0 \tag{14}$$

由 $G(x)$ 的凸性,对任意 $\zeta(t_M) \in \partial G(x(t_M))$,有:

$$\langle x - x(t_M), \zeta(t_M) \rangle \leq G(x) - G(x(t_M)) = 0 \tag{15}$$

因此,根据式(13)一式(15),对任意 $x \in S$,有:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle x - x(t_M), \dot{x}(t_M) \rangle \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle x - x(t_M), \left\{ \frac{1}{\max\{1, \|\tau(t_M)\|\}} \tau(t_M) + \right. \\ &\quad \left. (\|x(t_M) - \bar{x}\|^2 + \alpha)\zeta(t_M) \right\} \rangle \\ &\geq \lim_{M \rightarrow +\infty} \left\langle x - x(t_M), -\frac{1}{\max\{1, \|\tau(t_M)\|\}} \tau(t_M) \right\rangle \\ &= \langle x - \bar{x}, -\bar{\tau} \rangle \end{aligned}$$

由定义 2 可得,对任意 $x \in S$:

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq 0$$

最后,我们要证明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x = \bar{x}$ 。考虑下面的另一个能量函数:

$$\omega'(x) = f(x) - f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|^2 \tag{16}$$

显然,当 $t \geq 0$ 时:

$$\begin{aligned} \omega'(x) &= f(x(t)) - f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \|x(t) - \bar{x}\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|x(t) - \bar{x}\|^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

根据上面的分析,对于所有的 $t \geq 0$:

$$\frac{d}{dt}\omega'(x(t)) \leq 0 \tag{18}$$

即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega'(x(t))$ 存在。

根据式(13)和式(16),有:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} \omega'(x(t_M)) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} f(x(t_M)) - f(\bar{x}) + \\ &\quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \|x(t_M) - \bar{x}\|^2 \\ &= f(\bar{x}) - f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \|\bar{x} - \bar{x}\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega'(x(t)) = 0 \tag{19}$$

由式(17)和式(19),得:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$$

证明完毕。

5 仿真实验

为了验证本文所提新型神经网络方法的有效性,下面将采用仿真实验来模拟式(2),并用实验结果图来展示其在解决伪凸优化问题上的有效性。仿真实验在 MATLAB 2012a 平台上进行。

5.1 实验 1

考虑下面的二次型的伪凸优化问题:

$$\min f(x) = \frac{x^\top Qx + a^\top x + a_0 x}{c^\top x + c_0}$$

$$\text{s. t. } Ax = b, 5 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{其中, } Q = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, a =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, c = (2, 1, 1, 0)^\top, a_0 = -2, c_0 = 4, b = (1, 2)^\top。$$

这是一个目标函数拥有 4 个变量的典型的二次型优化问题。通过简单计算不难得出 $f(x)$ 在可行域 S 中是伪凸的,因此我们可以使用式(2)来解决这类问题。

因为所提神经网络模型的初始点可以任意选取,所以不管初始点是否在可行域内,神经网络的状态向量 $x(t)$ 最终都会收敛到可行域中,并收敛到原始优化问题的最优解。任选初始点 $(5, 3, 0, 5)^\top$,经验证,该初始点不在可行域内。图 1 给出了该初始点随着时间不断地向可行域内部靠近,最后收敛

到 $(6, 5, 7, 5)^T$ 。同时,图 2 给出了所提模型在另一个同样不在可行域内的初始点 $(6, 3, 5, 8)^T$ 的轨迹,随着时间的变化,神经网络的状态向量的轨迹同样不断地向可行域靠近,最终也收敛到 $(6, 5, 7, 5)^T$,此时目标函数的函数值为 $f(x^*) = 25.2143$ 。

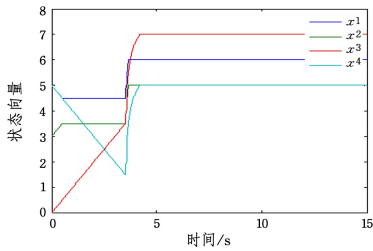


图 1 神经网络(式(2))在初始点 $(5, 3, 0, 5)^T$ 的轨迹图

Fig. 1 Transient behaviors of neural network(equ. (2)) with initial point $(5, 3, 0, 5)^T$

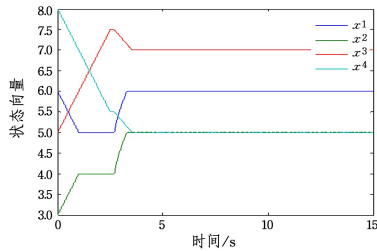


图 2 神经网络(式(2))在初始点 $(6, 3, 5, 8)^T$ 的轨迹图

Fig. 2 Transient behaviors of neural network (equ. (2)) with initial point $(6, 3, 5, 8)^T$

为了更好地展示所提神经网络模型的有效性,将其与文献[25]中的神经网络模型式(11)进行对比,这里选取了同样的初始点 $(6, 3, 5, 8)^T$ 。如图 3 所示,可以看出,在相同的时间内,文献[25]所提神经网络收敛效果劣于本文所提神经网络。

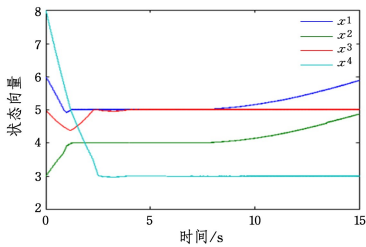


图 3 文献[25]中神经网络(式(11))在初始点 $(6, 3, 5, 8)^T$ 的轨迹图

Fig. 3 Transient behaviors of neural network (equ. (11)) in literature [20] with initial point $(6, 3, 5, 8)^T$

5.2 实验 2

实验 1 考虑了光滑伪凸优化问题,接下来考虑如下非光滑伪凸函数。

$$\min f(x) = \frac{x_1^2 + |x_2 - x_1| - x_2 - 20}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_3 + 2}$$

s. t. $x_1^2 + x_2^2 \leq 8$
 $3x_1 - 2x_2 \leq 4$
 $x_3 \leq 1$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

这是一类常见的三元二次优化问题,用传统的数值方法求解具有一定的难度。此前有不少学者构造了各种不同类型的神经网络模型来解决这类问题,但是这些模型大多存在以下两个缺点:1)要计算惩罚参数;2)结构相对复杂。经过简单的计算,可知不等式可行域 S_1 是有界的,且目标函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R}^n 上是一个凸函数,所以采用本文构造的神经网络模型能够避免上述问题,从而更有效地对该类问题进行求解。

图 4 给出了实验 2 中式(2)任取 10 个初始点的状态向量的运动轨迹,从图中易见神经网络的所有轨迹在有限时间内进入可行域并最终收敛于点 $x^* = (-0.3193, 0.6697, -1.0092)^T$, $f(x^*) = -4.7278$ 。经计算,点 x^* 为该三元二次优化问题的最优解。

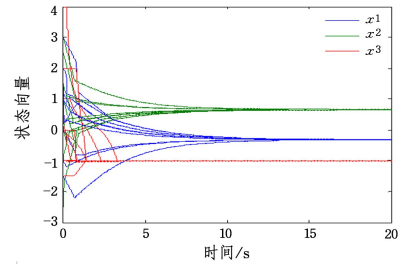


图 4 实验 2 中神经网络(式(2))任取 10 个初始点的状态向量轨迹图
 Fig. 4 Transient behaviors of neural network(equ. (2)) with ten initial points in example 2

同样地,我们使用文献[25]中的神经网络模型(式(11))对实验 2 中的优化问题做一个对比实验,这里我们选取了任意的一个初始点 $(4, 4, -2.3, -5.6)^T$ 。如图 5 所示,状态向量的轨迹并不收敛,因此文献[25]所提出的神经网络对解决三元二次优化问题的收敛效果劣于本文提出的神经网络。

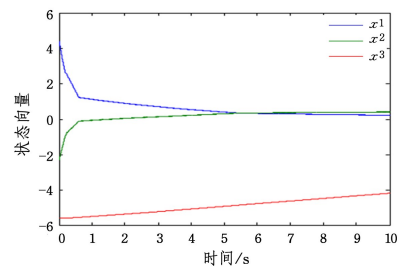


图 5 文献[25]中神经网络(式(11))在初始点 $(4, 4, -2.3, -5.6)^T$ 的轨迹图

Fig. 5 Transient behaviors of neural network(equ. (11)) in [25] with initial point $(4, 4, -2.3, -5.6)^T$

5.3 实验 3

考虑下面目标函数为高斯函数的优化问题:

$$\min f(x_1, x_2) = -\exp(-x_1^2 - x_2^2)$$

s. t. $-1 \leq x_i \leq 1, i=1, 2$
 $0.523x_1 + 0.917x_2 = 0.623$

高斯函数存在于许多领域中,如统计与概率论、量子场论、地质统计学等。它是一种局部 Lipschitz 连续且在 \mathbb{R}^n 上严格伪凸的特殊函数,我们使用式(2)来解决此类高斯问题。

与文献[23]不同,我们不需要预先计算一些精确的参数。图6为式(2)的状态向量的10个随机初始点收敛于优化问题的最优解。

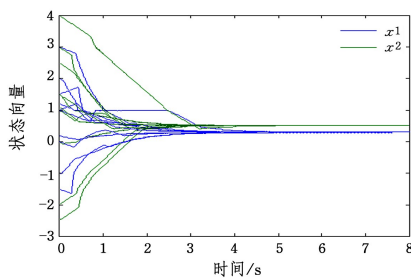


图6 实验3中神经网络(式(2))任取10个初始点的状态向量轨迹图

Fig. 6 Transient behaviors of neural network (equ. (2)) with ten initial points in example 3

对于图6中的10个相同的任意初始点,我们使用文献[22]中的神经网络模型(式(3))对实验3中的高斯优化问题做一个对比实验。如图7所示,状态向量的轨迹并不收敛,说明相比已提出的模型,本文提出的神经网络模型在解决高斯优化问题上更有优势。

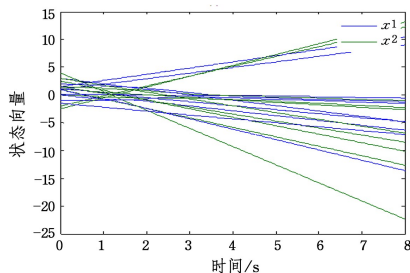


图7 文献[22]中神经网络(式(3))任取10个初始点的状态向量轨迹图

Fig. 7 Transient behaviors of neural network (equ. (3)) in literature [22] with ten initial points

结束语 本文提出了一种用以解决一类非光滑伪凸优化问题的神经网络模型,与已有模型相比,所提神经网络模型结构简单,不用计算惩罚参数,且初始点可任意选取,适用范围更广。通过理论分析,首先证明了神经网络存在局部解,接着分别证明了神经网络的状态解会在有限时间内进入可行域内并永驻其中,然后证明了神经网络具有全局解,最后证明了神经网络最终收敛到原优化问题的最优解。通过两个仿真实验,验证了理论分析的正确性,进一步表明本文提出的神经网络模型是有效的。实际上,非凸优化问题在各类科学与工程领域^[33-35]中也非常常见,然而本文提出的神经网络模型不能很好地处理更为一般的非凸优化问题,因此,设计一个更高效的神经网络模型来处理此类问题是我们未来的研究方向。

参考文献

[1] MOKHTAR S B, HANIF D S, SHETTY C M. Nonlinear Programming Theory and Algorithms[M]. New York: Wiley, 1993.

[2] FRANK H C. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York: Wiley, 1983.

[3] AUBIN J P, FRANKOWSKA H. Set-Valued Analysis[M]. Berlin: Birkäuser, 1990.

[4] FRANK H C. Optimization and Non-Smooth Analysis[M]. New York: Wiley, 1969.

[5] TANK D W, HOPFIELD J. Simple 'neural' optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1986, 33(5): 533-541.

[6] KENNEDY M P, CHUA L O. Neural networks for nonlinear programming[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1988, 35(5): 554-562.

[7] ZHANG S, CONSTANTINIDES A G. Lagrange Programming Neural Networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems. II, Analog Digit. Signal Process, 1992, 39(7): 441-452.

[8] XIA Y, LEUNG H, WANG J. A projection neural network and its application to constrained optimization problems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2002, 49(4): 447-458.

[9] HU X, WANG J. An improved dual neural network for solving a class of quadratic programming problems and its k-winners-take-all application[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2008, 19(12): 2022-2031.

[10] LIU S, WANG J. A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2006, 17(6): 1500-1510.

[11] FORTI M, NISTRÌ P, QUINCAMPOIX M. Generalized neural network for nonsmooth nonlinear programming problems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2004, 51(9): 1741-1754.

[12] LI G, SONG S, WU C. Generalized gradient projection neural networks for nonsmooth optimization problems[J]. Science China on Information Sciences, 2010, 53(5): 990-1005.

[13] XUE X P, BIAN W. Subgradient-based neural networks for nonsmooth convex optimization problems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2008, 55(8): 2378-2391.

[14] BIAN W, XUE X P. Subgradient-based neural networks for nonsmooth nonconvex optimization problems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2009, 20(6): 1024-1038.

[15] BIAN W, XUE X P. Neural network for solving constrained convex optimization problems with global attractivity[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2013, 60(3): 710-723.

[16] QIN S T, FAN D, WU G, et al. Neural network for constrained nonsmooth optimization using Tikhonov regularization[J]. Neural Networks, 2015, 63: 272-281.

[17] QIN S T, XUE X P. A two-layer recurrent neural network for nonsmooth convex optimization problems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 26(6): 1149-1160.

[18] LIU Q, WANG J. A one-layer recurrent neural network for constrained nonsmooth optimization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2011, 41(5): 1323-1333.

- [19] MARECHAL P, YE J J. Optimizing condition numbers[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2009, 20(2): 935-947.
- [20] HU X, WANG J. Solving pseudomonotone variational inequalities and pseudoconvex optimization problems using the projection neural network[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, 17(6): 1487-1499.
- [21] GUO Z, LIU Q, WANG J. A one-layer recurrent neural network for pseudoconvex optimization subject to linear equality constraints[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(12): 1892-1900.
- [22] QIN S T, BIAN W, XUE X P. A new one layer recurrent neural network for nonsmooth pseudoconvex optimization[J]. *Neurocomputing*, 2013, 120: 655-662.
- [23] LIU Q, GUO Z, WANG J. A one-layer recurrent neural network for constrained pseudoconvex optimization and its application for dynamic portfolio optimization[J]. *Neural Networks*, 2012, 26: 99-109.
- [24] LI Q F, LIU Y Q, ZHU L K. Neural network for non-smooth pseudoconvex optimization with general constraints[J]. *Neurocomputing*, 2014, 131: 336-347.
- [25] QIN S T, YANG X D, XUE X P, et al. A one layer recurrent neural network for pseudoconvex optimization problems with equality and inequality constraints[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(10): 3063-3074.
- [26] BIAN W, MA L T, QIN S T, et al. Neural network for non-smooth pseudoconvex optimization with general convex constraints[J]. *Neural Networks*, 2018, 101: 1-14.
- [27] HOSSEINI A, WANG J, HOSSEINI S M. A recurrent neural network for solving a class of generalized convex optimization problems[J]. *Neural Networks*, 2013, 44: 78-86.
- [28] CHENG L, HOU Z G, LIN Y Z, et al. Recurrent neural network for non-smooth convex optimization problems with application to the identification of genetic regulatory networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, 22(5): 714-726.
- [29] YU X, WU L Z, XU C H, et al. A novel neural network for solving nonsmooth nonconvex optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(5): 1475-1488.
- [30] LI W J, BIAN W, XUE X P. Projected neural network for a class of Non-Lipschitz optimization problems with linear constraints[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(9): 3361-3373.
- [31] XU C, CHAI Y Y, QIN S T, et al. A neurodynamic approach to nonsmooth constrained pseudoconvex optimization problem[J]. *Neural Networks*, 2020, 124: 180-192.
- [32] XIA Y S, WANG J, GUO W Z. Two projection neural networks with reduced model complexity for nonlinear programming[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(6): 2020-2029.



YU Xin, born in 1973, Ph.D, professor, Ph.D supervisor, is a member of China Computer Federation. His main research interests include artificial neural network theory and optimization.



LIN Zhi-liang, born in 1996, postgraduate. His main research interests include neural network theory and so on.

(责任编辑:李亚辉)