随机多尺度序决策系统的最优尺度选择

方连花, 林玉梅, 吴伟志

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.220200067

随机多尺度序决策系统的最优尺度选择

方连花[1]　林玉梅[1]　吴伟志[1,2]
1 泉州信息工程学院通识教育中心　福建 泉州 362000
2 浙江海洋大学信息工程学院　浙江 舟山 316022

摘　要　针对由随机实验得到的多尺度序信息系统的知识获取问题,首先,引入随机多尺度序信息系统和基于优势-等价关系的随机多尺度序决策系统的概念;然后,在随机多尺度序信息系统中给出在不同尺度下基于优势关系的信息粒的表示、以及集合关于由条件属性集生成的优势关系的下近似与上近似的定义,并得到在不同尺度下信息粒、集合的下近似与上近似的变化关系;最后,分别在随机多尺度序信息系统和基于优势-等价关系的随机多尺度序决策系统中定义了几类最优尺度的概念,并用证据理论中的信任函数与似然函数刻画了最优尺度的数值特征。

关键词:粗糙集;粒计算;多尺度序信息系统;信任函数;最优尺度
中图法分类号　TP182

Optimal Scale Selection in Random Multi-scale Ordered Decision Systems

FANG Lian-hua[1], LIN Yu-mei[1] and WU Wei-zhi[1,2]
1 General Education Center, Quanzhou University of Information Engineering, Quanzhou, Fujian 362000, China
2 School of Information Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan, Zhejiang 316022, China

Abstract　Aiming at the knowledge acquisition problem of multi-scale ordered information system obtained from random experiments, concepts of random multi-scale ordered information systems and dominance-equivalence-relations-based random multi-scale ordered decision systems are first introduced. Information granules in random multi-scale ordered information systems as well as lower and upper approximations of sets with respect to dominance relations induced by conditional attribute set under different scales are then described. Their relationships are also clarified. Finally, concepts of several types of optimal scales in random multi-scale ordered information systems and dominance-equivalence-relations-based random multi-scale ordered decision systems are defined. It is proved that belief and plausibility functions in the Dempster-Shafer theory of evidence can be used to characterize some optimal scales in random multi-scale ordered information systems and dominance-equivalence-relations-based random multi-scale ordered decision systems, respectively.

Keywords　Rough sets, Granular computing, Multi-scale ordered information systems, Belief functions, Optimal scale

1　引言

从不同的粒度(Granularity)上观察、分析与解决同一问题,是人类智能的一个公认特点。Lin 在分析 Zadeh[1] 的信息粒度基础上,于 1997 年首次提出了粒计算(Granular computing, GrC)[2],它模拟人类思考问题的自然模式,以粒(Granule)为基本计算单位,旨在通过处理大规模复杂数据集和信息等来建立有效的计算模型,是当前人工智能领域和大数据处理的重要方法之一[3-5]。粒计算研究的主要内容有粒的构造、表示和解释,在不同尺度或粒度空间中研究粒计算问题时,还要考虑最优尺度或粒度选择,以及存在于粒之间的粒 IF-THEN 规则提取和相关理论与算法等。

而在众多粒计算研究方法中,粗糙集(Rough Sets)对粒计算研究的推动和发展起着重要的作用,它是继概率论、模糊集、证据理论之后的又一个刻画不完整性和不确定性的数学工具。传统粗糙集数据分析[6]处理信息系统的每一个对象在每一个属性上只取唯一的一个值,这样的系统被称为单尺度信息系统,但在处理实际生活的很多数据时,人们往往需要在

到稿日期:2022-02-14　返修日期:2022-03-05
基金项目:国家自然科学基金(61976194,62076221);福建省中青年教师教育科研项目(JAT200799);福建省职业教育教学改革研究课题(GB2020036)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61976194,62076221), Education and Scientific Research Project for Young and Middle-aged Teachers in Fujian Province(JAT200799) and Research on Teaching Reform of Vocational Education in Fujian Province(GB2020036).
通信作者:吴伟志(wuwz@zjou.edu.cn)

多尺度或者多粒度的环境下进行问题的求解和决策。因此，多粒度环境下的数据建模成为了粒计算研究的重要方向[7-8]。在现实世界中，数据多粒度是由属性取值的不同尺度或粒度标记造成的，针对此情形，Wu 等在文献[9]中首次提出了基于多尺度标记划分的粗糙集数据分析方法，在这种模型下，同一批数据可以被标记为不同的粒度（或尺度）层次，人们可以根据需要在不同的尺度标记层面上处理和分析数据，这样的信息系统被称为多尺度信息系统（Multi-scale Information Systems），又称为多粒度标记信息系统（Multi-granular Labeled Information Systems），在文献上被称为 Wu-Leung 模型[10]。从多尺度数据集上获取知识的主要思想是，根据决策目标为每一个属性选择一个合适的尺度构成一个新的单尺度信息系统，然后在保持相同目标约束的前提下进行属性约简（特征选择）、决策规则提取及不确定性分析。因此，在保持某种性质（可以是定性的也可以是定量的）不变的条件下选择最粗的尺度标记（称为最优尺度选择或最优粒度选择）成为了多尺度数据知识获取研究的一个关键问题，也是多尺度粗糙集数据分析研究的一个主要方向[11-24]。

证据理论是处理不确定性问题的另一种方法[25]，该理论与粗糙集理论联系紧密，已经证实由任何一个信任结构导出的信任函数与似然函数一定可以表示为某个粗糙近似空间中的下近似与上近似的概率函数[26-29]。基于两个理论之间的关系，证据理论可用于刻画各种信息系统的属性约简和多尺度信息系统中最优尺度的数值特征[11,14-15,21,30-34]。

众所周知，基于优势关系的粗糙集数据分析在序信息系统和序决策信息系统等数据类型的知识约简、排序、决策等应用方面有独特的优势[35-37]。例如，在属性约简方面，Xu 等[31]用证据理论刻画了（无决策）序信息系统的属性约简的特征，Du 等[32]进一步用证据理论刻画了序决策系统的属性约简的特征。我们知道，针对序决策系统中的数据分析有两类问题，一类是排序，即决策属性值域也是全序集[32]；另一类是分类，即决策属值域是一个普通的集合[38]。Zheng 等[39]针对第一类问题，用证据理论给出了多尺度序决策系统的最优尺度的数值特征刻画。众所周知，在现实中大量的数据是通过随机实验获得的。本文针对第二类问题，提出随机多尺度序信息系统与随机多尺度序决策系统的概念，并讨论随机多尺度序决策系统的最优尺度选择问题。

2 基础知识

本节介绍后文所涉及的相关知识，包括优势-等价关系下随机序决策系统和证据理论中的信任函数与似然函数等概念。

定义 1[40] 称(U,A)是一个信息系统，其中，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一个非空有限对象集，称为论域，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是一个非空有限属性集，使得$\forall a\in A$，满足 $a:U\to V_a$，即 $a(x)\in V_a$，$x\in U$，其中 $V_a=\{a(x):x\in U\}$为 a 的值域，若在 U 上有正规概率分布 P，即对于任意的 $x\in U$，有 $P(\{x\})>0$，且 $\sum_{x\in U}P(\{x\})=1$，则称(U,A)是一个随机信息系统，记为$((U,P),A)$。

如果在 U 上没有正规概率分布 P，那么可以取均匀分布的概率（即频率）$P(\{x\})=1/|U|$，其中$|X|$表示集合 X 的基数。为方便起见，对于单点集$\{x\}$，以下用 $P(x)$代替 $P(\{x\})$。因此，一个随机信息系统可以被看成是普通信息系统的推广。

定义 2 称二元组$(L,\leqslant)$是一个全序集，其中 L 是一个非空集合，$\leqslant$是 L 上的一个二元关系，满足以下条件：

(1)自反性：$\forall x\in L,x\leqslant x$；

(2)传递性：$\forall x,y,z\in L,x\leqslant y,y\leqslant z$ 蕴含 $x\leqslant z$；

(3)$\leqslant$是线性序：$\forall x,y\in L$，或者 $x\leqslant y$，或者 $y\leqslant x$。

定义 3[37,39] 如果一个信息系统(U,A)的某个属性值域是全序集，即属性值是按照升序或者降序排列的，那么称这个属性为一个准则；若信息系统(U,A)中所有属性都是准则，则称(U,A)是一个序信息系统；若(U,A)是序信息系统，且在 U 上有正规概率分布 P，则称$((U,P),A)$是随机序信息系统。

假设某个准则 $a\in A$ 的值域按照优序关系$\leqslant_a$ 排序，则 $y\leqslant_a x$ 表示关于准则 a，x 至少和 y 一样优。为了方便起见，下文在所有的属性值域上用同一个符号$\leqslant$表示优序关系。

定义 4 称 $S=((U,P),A\cup\{d\})$为一个随机序决策系统，其中$((U,P),A)$是随机序信息系统，称 A 为条件属性集，$d\notin A$ 是一个特殊的属性，称之为决策属性，它可以看作映射 $d:U\to V_d$，其中，$V_d=\{d(x):x\in U\}$为 d 的值域。

定义 5 设 $S=((U,P),A\cup\{d\})$为随机序决策系统，对于 $B\subseteq A$，记：

$$R_B^{\leqslant}=\{(x,y)\in U\times U:a_l(x)\leqslant a_l(y),\forall a_l\in B\}$$

$$R_d=\{(x,y)\in U\times U:d(x)=d(y)\}$$

则分别称 $R_B^{\leqslant}$ 和 R_d 为该系统由条件属性子集 B 导出的优势关系和决策属性集 d 导出的等价关系，此时系统被称为优势-等价关系下的随机序决策系统。若 $R_A^{\leqslant}\subseteq R_d$，则称系统 S 是协调的，否则称 S 是不协调的。

记：

$$U/R_B^{\leqslant}=\{[x]_B^{\leqslant}:x\in U\}$$

$$[x]_B^{\leqslant}=\{y\in U:(x,y)\in R_B^{\leqslant}\}=\{y\in U:a_l(x)\leqslant a_l(y),\forall a_l\in B\}$$

$$[x]_d=\{y\in U:(x,y)\in R_d\}=\{y\in U:d(x)=d(y)\}$$

则分别称$[x]_B^{\leqslant}$ 与$[x]_d$ 为对象 x 关于条件属性子集 B 的优势类和关于决策属性 d 的等价类。

定义 6[25] 设 W 是非空有限集，若集函数 $m:\wp(W)\to[0,1]$（其中 $\wp(W)$表示 W 的幂集）满足：

(1)$m(\emptyset)=0$；

(2)$\sum_{Y\in\wp(Y)}m(Y)=1$。

则称 m 是 W 上的一个 mass 函数或基本概率指派。称集合 $A\in\wp(W)$为 m 的一个焦元，若 $m(A)>0$，记 $\mathscr{M}$ 为 m 的焦元全体所构成的集合，则称序对$(\mathscr{M},m)$为 W 上的一个信任结构。

定义 7[25] 设$(\mathscr{M},m)$是 W 上的一个信任结构，称集函数 $Bel:\wp(W)\to[0,1]$为 W 上的一个信任函数，若：

$$Bel(X)=\sum_{A\subseteq X}m(A),\forall X\in\wp(W)$$

定义 8[25] 设$(\mathscr{M},m)$是 W 上的一个信任结构，称集函数 $Pl:\wp(W)\to[0,1]$为 W 上的一个似然函数，若：

$$Pl(X)=\sum_{A\cap X\neq\emptyset}m(A),\forall X\in\wp(W)$$

由同一信任结构导出的信任函数与似然函数是对偶的，即$\forall X\in\wp(W)$，$Pl(X)=1-Bel(\sim X)$，且 $Bel(X)\leqslant Pl(X)$。

反之，信任结构中的 mass 函数可以通过 Möbius 变换用信任函数来表示，即$\forall X\in\wp(W)$，

$$m(X)=\sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X\setminus Y|}Bel(Y)$$

信任函数与似然函数还可以等价地用公理来定义，即集函数 $Bel:\wp(W)\to[0,1]$是 W 上的一个信任函数，当且仅当它满足以下性质：

(1)$Bel(\emptyset)=0$；

(2)$Bel(W)=1$；

(3)对于任意 $X_1,X_2,\cdots,X_l\subseteq W$，有：

$$Bel(\bigcup_{i=1}^{l}X_i)\geqslant\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,2,\cdots,l\}}(-1)^{|J|+1}Bel(\bigcap_{i\in J}X_i)$$

同样地，$Pl:\wp(W)\to[0,1]$是 W 上的一个似然函数，当且仅当它满足以下性质：

(1)$Pl(\emptyset)=0$；

(2)$Pl(W)=1$；

(3)对于任意 $X_1,X_2,\cdots,X_l\subseteq W$，有：

$$Pl(\bigcap_{i=1}^{l}X_i)\leqslant\sum_{\emptyset\neq J\subseteq\{1,2,\cdots,l\}}(-1)^{|J|+1}Pl(\bigcup_{i\in J}X_i)$$

设$((U,P),A)$是随机序信息系统，对于任意 $X\subseteq U$，$B\subseteq A$，X 关于优势关系 $R_B^{\leqslant}$ 的下近似$\underline{R_B^{\leqslant}}(X)$与上近似$\overline{R_B^{\leqslant}}(X)$的定义如下：

$$\underline{R_B^{\leqslant}}(X)=\{x\in U:[x]_B^{\leqslant}\subseteq X\}$$

$$\overline{R_B^{\leqslant}}(X)=\{x\in U:[x]_B^{\leqslant}\cap X\neq\emptyset\}$$

利用类似文献[31]的方法，可以证明以下定理。

定理 1 设$((U,P),A)$是随机序信息系统，对于任意 $X\subseteq U$，$B\subseteq A$，记：

$$Bel_B(X)=P(\underline{R_B^{\leqslant}}(X))$$

$$Pl_B(X)=P(\overline{R_B^{\leqslant}}(X))$$

则Bel_B 与Pl_B 分别为 U 上由属性集 B 确定的信任函数与似然函数，且对应的 mass 函数 m 为：

$$m(Y)=\begin{cases}P(Y), & Y\in U/R_B^{\leqslant}\\0, & Y\notin U/R_B^{\leqslant}\end{cases}$$

3 随机多尺度序信息系统与集合近似

Wu 等在文献[11]中首次定义了多尺度信息系统的概念。

定义 9[11] 称 $S=(U,A)$为一个多尺度信息系统，其中，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为非空有限对象集，被称为论域，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$为非空有限属性集，且每个属性 $a_j\in A$ 是一个多尺度属性，即对于 U 中的同一对象，属性 a_j 在不同尺度上可以取不同的值。

假设所有的属性都有 I 个相同的等级尺度，则一个多尺度信息系统可以表示为：

$$(U,\{a_j^k:k=1,2,\cdots,I,j=1,2,\cdots,m\})$$

其中，$a_j^k:U\to V_{a_j^k}$，$V_{a_j^k}$ 是 a_j 在第 k 个尺度下的值域，且对于 $1\leqslant k\leqslant I-1$，存在一个满射 $g_j^{k,k+1}:V_{a_j^k}\to V_{a_j^{k+1}}$，使得 $a_j^{k+1}=g_j^{k,k+1}\circ a_j^k$，即：

$$a_j^{k+1}(x)=g_j^{k,k+1}(a_j^k(x)),x\in U$$

称 $g_j^{k,k+1}$ 为信息粒度变换。

对于 $k\in\{1,2,\cdots,I\}$，记：

$$A^k=\{a_j^k:j=1,2,\cdots,m\}$$

则一个多尺度信息系统 $S=(U,A)$可以分解为 I 个信息系统 $S^k=(U,A^k)$，$k=1,2,\cdots,I$。

定义 10 设$(L_1,\leqslant_1)$和$(L_2,\leqslant_2)$为两个全序集，称映射 $g:(L_1,\leqslant_1)\to(L_2,\leqslant_2)$为保序的，若对于任意 $l,s\in L_1$，则：

$$l\leqslant_1 s\Rightarrow g(l)\leqslant_2 g(s)$$

在传统的序信息系统中，每一个属性都取单一尺度的属性值，但在实际生活中，根据不同的目标需求，在随机实验中，存在一个对象在同一属性上根据不同尺度取不同值的情形。为此，本文引入随机多尺度序信息系统的概念。

定义 11 称$((U,P),A)$是一个随机多尺度序信息系统，其中，(U,A)是一个多尺度序信息系统，即 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是非空有限对象集；P 为定义在 U 上的正规概率测度；$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是非空有限属性集，每个属性 $a_j\in\{j=1,2,\cdots,m\}$都是准则，且 a_j 有 I 个尺度 $a_j^1,a_j^2,\cdots,a_j^I$，且对于 $1\leqslant k\leqslant I-1$，存在保序的满射 $g_j^{k,k+1}:V_{a_j^k}\to V_{a_j^{k+1}}$，使得 $a_j^{k+1}=g_j^{k,k+1}\circ a_j^k$，即：

$$a_j^{k+1}(x)=g_j^{k,k+1}(a_j^k(x)),x\in U$$

其中 $V_{a_j^k}$ 是 a_j 在第 k 个尺度下的值域，$V_{a_j^k}$ 是全序集。

为了方便起见，在不至于引起混淆的情况下，不同属性在不同尺度下值域 $V_{a_j^k}$ 上的全序关系$\leqslant_j^k$ 用同一个符号$\leqslant$表示。

定理 2 设$((U,P),A)$是随机多尺度序信息系统，$j\in\{1,2,\cdots,m\}$，$1\leqslant k\leqslant I-1$，则：

(1)$|V_{a_j^{k+1}}|\leqslant|V_{a_j^k}|$；

(2)$\forall\omega\in V_{a_j^{k+1}}$，$\exists\nu\in V_{a_j^k}$，使得$(a_j^k)^{-1}(\nu)\subseteq(a_j^{k+1})^{-1}(\omega)$；

(3) $\forall\omega\in V_{a_j^{k+1}}$，$\exists V_0\subseteq V_{a_j^k}$，使得 $(a_j^{k+1})^{-1}(\omega)=\bigcup_{\nu\in V_0}(a_j^k)^{-1}(\nu)$。

证明：

(1)由满射的定义即证。

(2)对$\forall\omega\in V_{a_j^{k+1}}$，取 $x\in(a_j^{k+1})^{-1}(\omega)$，则 $\omega=a_j^{k+1}(x)$。令 $\nu=a_j^k(x)$，即 $x\in(a_j^k)^{-1}(\nu)$，而由 $g_j^{k,k+1}$ 的定义可知，$g_j^{k,k+1}(\nu)=\omega$。对$\forall y\in(a_j^k)^{-1}(\nu)$，显然 $\nu=a_j^k(y)$，由 $g_j^{k,k+1}(\nu)=a_j^{k+1}(y)$和 $g_j^{k,k+1}(\nu)=\omega$ 可得 $\omega=a_j^{k+1}(y)$，即 $y\in(a_j^{k+1})^{-1}(\omega)$成立。因此，$(a_j^k)^{-1}(\nu)\subseteq(a_j^{k+1})^{-1}(\omega)$。

(3)对$\forall\omega\in V_{a_j^{k+1}}$，令 $V_0=(g_j^{k,k+1})^{-1}(\omega)$，则 $g_j^{k,k+1}(V_0)=\{\omega\}$，于是$\forall x\in(a_j^k)^{-1}(V_0)$，$\exists\nu\in V_0$，使得 $x\in(a_j^k)^{-1}(\nu)$，即 $\nu=a_j^k(x)$。

由 $g_j^{k,k+1}(V_0)=\{\omega\}$得 $\omega=a_j^{k+1}(x)$，故 $x\in(a_j^{k+1})^{-1}(\omega)$，因此$(a_j^k)^{-1}(V_0)\subseteq(a_j^{k+1})^{-1}(\omega)$。

另一方面，$\forall x\in(a_j^{k+1})^{-1}(\omega)$有 $\omega=a_j^{k+1}(x)$，从而由$(g_j^{k,k+1})^{-1}(\omega)=V_0$ 可知，$\exists\nu\in V_0$，使得 $x\in(a_j^k)^{-1}(\nu)$，即 $x\in(a_j^k)^{-1}(V_0)$。

故$(a_j^{k+1})^{-1}(\omega)\subseteq(a_j^k)^{-1}(V_0)$，命题得证。

例 1 表 1 为一个随机多尺度序信息系统$((U,P),A)$，其中，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$是 8 个对象，表中第 2 列为第 1 列所对应的对象出现的概率；$A=\{a_1,a_2\}$是 2 个属性(准则)，每个属性具有 3 个尺度，2 个属性的第 1 个尺度下，数值型值域 $V_{a_1^1}=V_{a_2^1}=\{1,2,\cdots,100\}$(百分制)上的全序关系取自然序，如 $87<98$；第 2 个尺度下，值域 $V_{a_1^2}=V_{a_2^2}=\{E,G,M,B,U\}$(五级制)上的全序关系为：$U<B<M<G<E$；第 3 个尺度下，值域 $V_{a_1^3=V_{a_2^3}}=\{\mathrm{P},\mathrm{F}\}$(二级制)上的全序关系为：$F<P$。

表 1 随机多尺度序信息系统

Table 1 Random multi-scale ordered information system

U	P	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_2^1	a_2^2	a_2^3
x_1	2/32	98	E	P	56	B	F
x_2	4/32	87	G	P	78	G	P
x_3	4/32	78	G	P	80	G	P
x_4	6/32	56	B	F	58	B	F
x_5	5/32	63	M	P	66	M	P
x_6	$(4-\sqrt{2})/32$	35	U	F	93	E	P
x_7	3/32	98	E	P	88	G	P
x_8	$(4-\sqrt{2})/32$	87	G	P	36	U	F

不同尺度下的序信息粒度变换如表 1 所列，即：

当 $i=1,2$ 时，有：

$$g_i^{1,2}:V_{a_i^1}\rightarrow V_{a_i^2},\ g_i^{1,2}(\nu)=\begin{cases}E, & \nu=93,98\\ G, & \nu=78,80,87,88\\ M, & \nu=63,66\\ B, & \nu=56,58\\ U, & \nu=35,36\end{cases}$$

$$g_i^{2,3}:V_{a_i^2}\rightarrow V_{a_i^3},\ g_i^{2,3}(\omega)=\begin{cases}P, & \omega=E,G,M\\ F, & \omega=B,U\end{cases}$$

如 $a_1^2(x_1)=g_1^{1,2}(a_1^1(x_1))=g_1^{1,2}(98)=E$，$a_2^3(x_1)=g_2^{2,3}(a_2^2(x_1))=g_2^{2,3}(B)=F$。

显然，$g_i^{1,2}$ 和 $g_i^{2,3}(i=1,2)$都是保序映射。

由信息粒度变换和优势关系的定义，容易得到以下定理。

定理 3 设$((U,P),A)$是随机多尺度序信息系统，$B,C\subseteq A$，$1\leqslant k<l\leqslant I$，则：

(1)$R_{A^k}^{\leqslant}=\bigcap\limits_{a\in A^k}R_a^{\leqslant}$；

(2)$C\subseteq B\subseteq A\Rightarrow R_{A^k}^{\leqslant}\subseteq R_{B^k}^{\leqslant}\subseteq R_{C^k}^{\leqslant}$；

(3)$\forall y\in[x]_{A^k}^{\leqslant}\Rightarrow[y]_{A^k}^{\leqslant}\subseteq[x]_{A^k}^{\leqslant}$；

(4)$\forall a\in A^k,x,y\in U$，若 $a(x)=a(y)$，则$[y]_{A^k}^{\leqslant}=[x]_{A^k}^{\leqslant}$；

(5)$k<l,B\subseteq A\Rightarrow R_{B^k}^{\leqslant}\subseteq R_{B^l}^{\leqslant}$；

证明：由定义容易证明结论(1)－结论(4)成立。

对于结论(5)，因为 $k<l$，所以根据信息粒度变换的定义可知，存在从 $V_{a_i^k}$ 到 $V_{a_i^l}$ 的满射 $g_i^{k,l}$，使得 $g_i^{k,l}\circ a_i^k=a_i^l$。

又因为任意的 $x\in U$ 及 $y\in[x]_{B^k}^{\leqslant}$，满足对 $\forall a_i^k\in B^k$ 有 $a_i^k(x)\leqslant a_i^k(y)$，所以 $g_i^{k,l}(a_i^k(x))\leqslant g_i^{k,l}(a_i^k(y))$，从而可得 $a_i^l(x)\leqslant a_i^l(y)$，即 $y\in[x]_{B^l}^{\leqslant}$。

因此，$[x]_{B^k}^{\leqslant}\subseteq[x]_{B^l}^{\leqslant}$，由 x 的任意性可知 $R_{B^k}^{\leqslant}\subseteq R_{B^l}^{\leqslant}$ 成立。

定理 4 设$((U,P),A)$是随机多尺度序信息系统，$k,l\in\{1,2,\cdots,I\}$，$X,X_1,X_2\subseteq U$，则：

(1)$\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(\emptyset)=\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(\emptyset)=\emptyset$ $\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(U)=\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(U)=U$；

(2)$\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)\subseteq X\subseteq\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)$；

(3)$X_1\subseteq X_2\Rightarrow\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1)\subseteq\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_2)$，$\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1)\subseteq\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_2)$；

(4)$\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1\cap X_2)=\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1)\cap\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_2)$，$\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1\cup X_2)=\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1)\cup\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_2)$；

(5)$\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1\cup X_2)\supseteq\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1)\cup\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_2)$，$\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1\cap X_2)\subseteq\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_1)\cap\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X_2)$。

(6)$\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(\sim X)=\sim\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)$，$\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(\sim X)=\sim\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)$；

(7)$k<l\Rightarrow\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)\subseteq\overline{R_{A^l}^{\leqslant}}(X)$，$\underline{R_{A^l}^{\leqslant}}(X)\subseteq\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)$。

证明：根据定义易知，结论(1)－结论(5)显然成立。

对于结论(6)，$\forall x\in U$，由于：

$$\begin{aligned}x\in\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(\sim X)&\Leftrightarrow[x]_{A^k}^{\leqslant}\subseteq\sim X\\&\Leftrightarrow[x]_{A^k}^{\leqslant}\cap X=\emptyset\\&\Leftrightarrow x\notin\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)\\&\Leftrightarrow x\in\sim\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)\end{aligned}$$

因此，$\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(\sim X)=\sim\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)$。

同理可证，$\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(\sim X)=\sim\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)$。

对于结论(7)，由定理 3 的结论(5)即证。

4 随机多尺度序信息系统的最优尺度选择

由尺度粗细的关系可知，由细尺度得到的知识比粗尺度得到知识的精度高，但是获得知识所需要的代价也较大。在实际问题中，我们总希望利用较少的代价作出最理想的决策。本节讨论(无决策)随机多尺度序信息系统的最优尺度选择问题。

定义 12 设 $S=((U,P),A)$是随机多尺度序信息系统，记：

$$U/R_{A^1}^{\leqslant}=\{C_1^{\leqslant},C_2^{\leqslant},\cdots,C_t^{\leqslant}\}$$

对于 $k\in\{1,2,\cdots,I\}$，若 $R_{A^k}^{\leqslant}=R_{A^1}^{\leqslant}$，则称 S^k 关于 S 是协调的；若 S^k 关于 S 是协调的，且 S^{k+1}(若 $k+1\leqslant I$)关于 S 是不协调的，则称 k 是 S 的最优尺度。

定义 13 设 $S=((U,P),A)$是随机多尺度序信息系统，$U/R_{A^1}^{\leqslant}=\{C_1^{\leqslant},C_2^{\leqslant},\cdots,C_t^{\leqslant}\}$，对于 $k\in\{1,2,\cdots,I\}$，则：

(1)若对任意的 $X\in U/R_{A^1}^{\leqslant}$，有$\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)=\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(X)$，则称 S^k 关于 S 是下近似协调的。若 S^k 关于 S 是下近似协调的，且 S^{k+1}(若 $k+1\leqslant I$)关于 S 不是下近似协调的，则称 k 是 S 的下近似最优尺度。

(2)若对任意的 $X\in U/R_{A^1}^{\leqslant}$，有$\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)=\overline{R_{A^1}^{\leqslant}}(X)$，则称 S^k 关于 S 是上近似协调的；若 S^k 关于 S 是上近似协调的，且 S^{k+1}(若 $k+1\leqslant I$)关于 S 不是上近似协调的，则称 k 是 S 的上近似最优尺度。

定义 14 设 $S=((U,P),A)$是随机多尺度序信息系统，$U/R_{A^1}^{\leqslant}=\{C_1^{\leqslant},C_2^{\leqslant},\cdots,C_t^{\leqslant}\}$，$k\in\{1,2,\cdots,I\}$，则：

(1)若对任意的 $X\in U/R_{A^1}^{\leqslant}$，有 $Bel_{A^k}(X)=Bel_{A^1}(X)$，则称 S^k 关于 S 是信任协调的；若 S^k 关于 S 是信任协调的，且 S^{k+1}(若 $k+1\leqslant I$)关于 S 不是信任协调的，则称 k 是 S 的信任最优尺度。

(2)若对任意的 $X\in U/R_{A^1}^{\leqslant}$，有 $Pl_{A^k}(X)=Pl_{A^1}(X)$，则称 S^k 关于 S 是似然协调的；若 S^k 关于 S 是似然协调的，且 S^{k+1}

(若 $k+1\leqslant I$)关于 S 不是似然协调的,则称 k 是 S 的似然最优尺度。根据信任函数和下近似、似然函数和上近似之间的关系容易得到以下定理。

定理 5 设 $S=((U,P),A)$ 是随机多尺度序信息系统,$k\in\{1,2,\cdots,I\}$,则:

(1)S^k 关于 S 是信任协调的,当且仅当 S^k 关于 S 是下近似协调的。

(2)k 是 S 的信任最优尺度,当且仅当 k 是 S 的下近似最优尺度。

(3)S^k 关于 S 是似然协调的,当且仅当 S^k 关于 S 是上近似协调的。

(4)k 是 S 的似然最优尺度,当且仅当 k 是 S 的上近似最优尺度。

定理 6 设 $S=((U,P),A)$ 是随机多尺度序信息系统,$k\in\{1,2,\cdots,I\}$,则:

(1)S^k 关于 S 是协调的,当且仅当 S^k 关于 S 是信任协调的。

(2)k 是 S 的最优尺度,当且仅当 k 是 S 的信任最优尺度。

证明:

对于结论(1),"⇒"设 S^k 关于 S 是协调的,则 $\forall x\in U$ 有 $[x]_{A^k}^{\leqslant}=[x]_{A^1}^{\leqslant}$,根据下近似的定义容易得到对 $\forall X\in U/R_{A^1}^{\leqslant}$,有 $\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(X)=\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(X)$,即 S^k 关于 S 是下近似协调的,再结合定理 5 的结论(1)可知,S^k 关于 S 是信任协调的。

"⇐"假设 S^k 关于 S 是信任协调的,则有:

$Bel_{A^k}(X)=Bel_{A^1}(X),\forall X\in U/R_{A^1}^{\leqslant}$

因此,由定理 5 的结论(1)可知,有:

$\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}([x]_{A^1}^{\leqslant})=\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}([x]_{A^1}^{\leqslant}),\forall x\in U$

结合下近似的定义可知,$\forall y\in U$,有:

$[y]_{A^k}^{\leqslant}\subseteq[x]_{A^1}^{\leqslant}\Leftrightarrow[y]_{A^1}^{\leqslant}\subseteq[x]_{A^1}^{\leqslant}$

取 $y=x$ 可得:

$[x]_{A^k}^{\leqslant}\subseteq[x]_{A^1}^{\leqslant}\Leftrightarrow[x]_{A^1}^{\leqslant}\subseteq[x]_{A^1}^{\leqslant}$

因此有 $[x]_{A^k}^{\leqslant}\subseteq[x]_{A^1}^{\leqslant}$ 成立,再根据多尺度的性质可知 $[x]_{A^1}^{\leqslant}\subseteq[x]_{A^k}^{\leqslant}$。故 $[x]_{A^K}^{\leqslant}=[x]_{A^1}^{\leqslant}$ 成立,所以 S^k 关于 S 是协调的。

结论(2)由定理 5 的结论(1)即得。

记:

$\sum_{i=1}^{t}Bel_{A^1}(C_i^{\leqslant})=M,\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^1}(C_i^{\leqslant})=N$

定理 7 设 $S=((U,P),A)$ 是随机多尺度序信息系统,$U/R_{A^1}^{\leqslant}=\{C_1^{\leqslant},C_2^{\leqslant},\cdots,C_t^{\leqslant}\}$,对于 $k\in\{1,2,\cdots,I\}$,则:

(1)S^k 关于 S 是协调的,当且仅当 $\sum_{i=1}^{t}Bel_{A^k}(C_i^{\leqslant})=M$。

(2)k 是 S 的最优尺度,当且仅当 $\sum_{i=1}^{t}Bel_{A^k}(C_i^{\leqslant})=M$ 且 $\sum_{i=1}^{t}Bel_{A^{k+1}}(C_i^{\leqslant})<M$(若 $k+1\leqslant I$)。

(3)S^k 关于 S 是似然协调的,当且仅当 $\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^k}(C_i^{\leqslant})=N$。

(4)k 是 S 的似然最优尺度,当且仅当 $\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^k}(C_i^{\leqslant})=N$ 且 $\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^{k+1}}(C_i^{\leqslant})>N$(若 $k+1\leqslant I$)。

证明:对于结论(1),"⇒"假设 S^k 关于 S 是协调的,由定理 6 可知 S^k 关于 S 是信任协调的,即:

$Bel_{A^k}(C_i^{\leqslant})=Bel_{A^1}(C_i^{\leqslant}),\forall i\in\{1,2,\cdots,t\}$

因此,$\sum_{i=1}^{t}Bel_{A^K}(C_i^{\leqslant})=\sum_{i=1}^{t}Bel_{A^1}(C_i^{\leqslant})=M$。

"⇐"假设 $\sum_{i=1}^{t}Bel_{A^k}(C_i^{\leqslant})=M$,由下近似的性质以及与信任函数的关系可得:

$Bel_{A^k}(C_i^{\leqslant})\leqslant Bel_{A^1}(C_i^{\leqslant}),\forall i\in\{1,2,\cdots,t\}$

即 $M=\sum_{i=1}^{t}Bel_{A^k}(C_i^{\leqslant})\leqslant\sum_{i=1}^{t}Bel_{A^1}(C_i^{\leqslant})=M$。

因此,$Bel_{A^k}(C_i^{\leqslant})=Bel_{A^1}(C_i^{\leqslant}),\forall i\in\{1,2,\cdots,t\}$。

故 S^k 关于 S 是信任协调的,由定理 6 可知 S^k 关于 S 是协调的。

结论(2)由结论(1)即证。

同理可得,结论(3)、结论(4)成立。

此定理表明,系统的最优尺度和上近似最优尺度可以分别通过计算优势类的信任测度之和与似然测度之和进行判别。下面通过对例 1 中的数据进行分析来验证。

例 2 设 $S=((U,P),A)$ 是由例 1 给出的随机多尺度序信息系统,其中论域上的概率分布如下:

$P(x_1)=2/32,P(x_2)=4/32$

$P(x_3)=4/32,P(x_4)=6/32$

$P(x_5)=5/32,P(x_6)=(4-\sqrt{2})/32$

$P(x_7)=3/32,P(x_8)=(4+\sqrt{2})/32$

经计算,当 $k=1$ 时,得 $U/R_{A^1}^{\leqslant}=\{C_1^{\leqslant},C_2^{\leqslant},\cdots,C_8^{\leqslant}\}$,具体如下:

$C_1^{\leqslant}=[x_1]_{A^1}^{\leqslant}=\{x_1,x_7\}$

$C_2^{\leqslant}=[x_2]_{A^1}^{\leqslant}=\{x_2,x_7\}$

$C_3^{\leqslant}=[x_3]_{A^1}^{\leqslant}=\{x_3,x_7\}$

$C_4^{\leqslant}=[x_4]_{A^1}^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_7\}$

$C_5^{\leqslant}=[x_5]_{A^1}^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_5,x_7\}$

$C_6^{\leqslant}=[x_6]_{A^1}^{\leqslant}=\{x_6\}$

$C_7^{\leqslant}=[x_7]_{A^1}^{\leqslant}=\{x_7\}$

$C_8^{\leqslant}=[x_8]_{A^1}^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_7,x_8\}$

当 $k=2$ 时,

$[x_1]_{A^2}^{\leqslant}=\{x_1,x_7\}$

$[x_2]_{A^2}^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_7\}$

$[x_3]_{A^2}^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_7\}$

$[x_4]_{A^2}^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_7\}$

$[x_5]_{A^2}^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_5,x_7\}$

$[x_6]_{A^2}^{\leqslant}=\{x_6\}$

$[x_7]_{A^2}^{\leqslant}=\{x_7\}$

$[x_8]_{A^2}^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_7,x_8\}$

当 $k=3$ 时,

$[x_1]_{A^3}^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_7,x_8\}$

$[x_2]_{A^3}^{\leqslant}=[x_3]_{A^3}^{\leqslant}=[x_5]_{A^3}^{\leqslant}=[x_7]_{A^3}^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_5,x_7\}$

$[x_4]_{A^3}^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$

$[x_6]_{A^3}^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_5,x_6,x_7\}$

$[x_8]_{A^3}^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_5,x_7,x_8\}$

于是,由下近似与上近似的定义计算可得:

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_1^{\leqslant})=\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_1^{\leqslant})=\{x_1,x_7\}$

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_2^{\leqslant})=\{x_2,x_7\}$

$\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_2^{\leqslant})=\{x_7\}$

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_3^{\leqslant})=\{x_3,x_7\}$

$\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_3^{\leqslant})=\{x_7\}$

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_4^{\leqslant})=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_7\}$

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_5^{\leqslant})=\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_4^{\leqslant})=\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_5^{\leqslant})=\{x_2,x_3,x_5,x_7\}$

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_6^{\leqslant})=\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_6^{\leqslant})=\{x_6\}$

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_7^{\leqslant})=\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_7^{\leqslant})=\{x_7\}$

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_8^{\leqslant})=\{x_1,x_2,x_7,x_8\}$

$\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_8^{\leqslant})=\{x_1,x_7\}$

$\overline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_i^{\leqslant})=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8\},i\neq 6$

$\overline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_i^{\leqslant})=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8\},i\neq 6$

$\overline{R_{A^1}^{\leqslant}}(C_6^{\leqslant})=\overline{R_{A^2}^{\leqslant}}(C_6^{\leqslant})=\{x_6\}$

$\overline{R_{A^3}^{\leqslant}}(C_i^{\leqslant})=U,i=1,2,\cdots,8$

进一步地，在给定概率分布下，可分别得到如下的优势类的信任测度和以及似然测度和：

$$\sum_{i=1}^{8}Bel_{A^1}(C_i^{\leqslant})=\frac{77}{32}>\frac{65-\sqrt{2}}{32}=\sum_{i=1}^{8}Bel_{A^2}(C_i^{\leqslant})$$

$$\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^1}(C_i^{\leqslant})=\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^2}(C_i^{\leqslant})=\frac{200+6\sqrt{2}}{32}$$

$$<8=\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^3}(C_i^{\leqslant})$$

因此，由定理 7 可知，该系统的最优尺度和信任最优尺度都是 $k=1$，而似然最优尺度是 $k=2$。

5 随机多尺度序决策系统的最优尺度选择

本节讨论随机多尺度序决策系统的最优尺度选择问题。针对序决策系统中的数据分析有两类问题：一类是排序，即决策属性值域也是全序集；另一类是分类，即决策属值域是一个普通的集合。Zheng 等[39]针对第一类问题用证据理论给出了多尺度序决策系统最优尺度选择的数值特征刻画，下文针对第二类问题讨论随机多尺度序决策系统的最优尺度选择问题。

定义 15 称 $S=((U,P),A\cup\{d\})$ 是随机多尺度序决策系统，其中 $S=((U,P),A)$ 是随机多尺度序信息系统，$d\notin A$ 是一个特殊的单尺度属性，被称为决策属性。如果 $R_{A^1}^{\leqslant}\subseteq R_d$，那么称 S 是协调的。在协调的系统 S 中，如果 $R_{A^k}^{\leqslant}\subseteq R_d$，那么称 S^k 关于 S 是协调的。若 S^k 关于 S 是协调的，且 S^{k+1}（若 $k+1\leqslant I$）关于 S 是不协调的，则称 k 是 S 的最优尺度。

定义 16 设 $S=((U,P),A\cup\{d\})$ 是随机多尺度序决策系统，$k\in\{1,2,\cdots,I\}$，则：

(1)若 $\forall D\in U/R_d$，有 $\underline{R_{A^k}^{\leqslant}}(D)=\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(D)$，则称 S^k 关于 S 是下近似协调的。若 S^k 关于 S 是下近似协调的，且 S^{k+1}（若 $k+1\leqslant I$）关于 S 不是下近似协调的，则称 k 是 S 的下近似最优尺度。

(2)若 $\forall D\in U/R_d$，有 $\overline{R_{A^k}^{\leqslant}}(D)=\overline{R_{A^1}^{\leqslant}}(D)$，则称 S^k 关于 S 是上近似协调的。若 S^k 关于 S 是上近似协调的，且 S^{k+1}（若 $k+1\leqslant I$）关于 S 不是上近似协调的，则称 k 是 S 的上近似最优尺度。

定义 17 设 $S=((U,P),A\cup\{d\})$ 是随机多尺度序决策系统，$k\in\{1,2,\cdots,I\}$，则：

(1)若 $\forall D\in U/R_d$，有 $Bel_{A^k}(D)=Bel_{A^1}(D)$，则称 S^k 关于 S 是信任协调的。若 S^k 关于 S 是信任协调的，且 S^{k+1}（若 $k+1\leqslant I$）关于 S 不是信任协调的，则称 k 是 S 的信任最优尺度。

(2)若 $\forall D\in U/R_d$，有 $Pl_{A^K}(D)=Pl_{A^1}(D)$，则称 S^k 关于 S 是似然协调的。若 S^k 关于 S 是似然协调的，且 S^{k+1}（若 $k+1\leqslant I$）关于 S 不是似然协调的，则称 k 是 S 的似然最优尺度。

根据信任函数与下近似、似然函数与上近似之间的关系容易得到以下定理。

定理 8 设 $S=((U,P),A\cup\{d\})$ 是随机多尺度序决策系统，$k\in\{1,2,\cdots,I\}$，则：

(1)S^k 关于 S 是信任协调的，当且仅当 S^k 关于 S 是下近似协调的。

(2)k 是 S 的信任最优尺度，当且仅当 k 是 S 的下近似最优尺度。

(3)S^k 关于 S 是似然协调的，当且仅当 S^k 关于 S 是上近似协调的。

(4)k 是 S 的似然最优尺度，当且仅当 k 是 S 的上近似最优尺度。

不失一般性，不妨设 $V_d=\{d(x):x\in U\}=\{1,2,\cdots,r\}$，记 $U/R_d=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$，其中 $D_i=\{x\in U:d(x)=i\}$，$i\in\{1,2,\cdots,r\}$，容易证明以下定理成立。

定理 9 设 $S=((U,P),A\cup\{d\})$ 是随机多尺度序决策系统，$k\in\{1,2,\cdots,I\}$，记 $\sum_{i=1}^{r}Bel_{A^1}(D_i)=M$，$\sum_{i=1}^{r}Pl_{A^1}(D_i)=N$，则：

(1)S^k 关于 S 是信任协调的，当且仅当 $\sum_{i=1}^{r}Bel_{A^k}(D_i)=M$。

(2)k 是 S 的信任最优尺度，当且仅当 $\sum_{i=1}^{r}Bel_{A^k}(D_i)=M$ 且 $\sum_{i=1}^{r}Bel_{A^{k+1}}(D_i)<M$（若 $k+1\leqslant I$）。

(3)S^k 关于 S 是似然协调的，当且仅当 $\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^k}(D_i)=N$。

(4)k 是 S 的似然最优尺度，当且仅当 $\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^k}(D_i)=N$ 且 $\sum_{i=1}^{t}Pl_{A^{k+1}}(D_i)>N$（若 $k+1\leqslant I$）。

定理 10 设 $S=((U,P),A\cup\{d\})$ 是随机多尺度序决策系统，$k\in\{1,2,\cdots,I\}$，则：

(1)S^k 关于 S 是协调的，当且仅当 S^k 关于 S 是信任协调的。

(2)k 是 S 的最优尺度，当且仅当 k 是 S 信任最优尺度。

例 3 $S=((U,P),A\cup\{d\})$ 是由例 1 中的随机多尺度序信息系统加入决策属性 d 所构成，其中：

$V_d=\{Y,N\}$，$U/R_d=\{D_1,D_2\}$

$D_1=\{x_1,x_2,x_3,x_6,x_7\}$

$D_2=\{x_4,x_5,x_8\}$

经计算，在决策类关于条件属性的每个尺度下，优势关系对应的下近似和上近似如下：

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(D_1)=\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(D_1)=\{x_1,x_2,x_3,x_6,x_7\}$

$\underline{R_{A^1}^{\leqslant}}(D_2)=\underline{R_{A^2}^{\leqslant}}(D_2)=\varnothing$

$\underline{R}_{A^3}^{\leqslant}(D_1)=\underline{R}_{A^3}^{\leqslant}(D_2)=\emptyset$

$\overline{R}_{A^1}^{\leqslant}(D_1)=\overline{R}_{A^2}^{\leqslant}(D_1)=U$

$\overline{R}_{A^1}^{\leqslant}(D_2)=\overline{R}_{A^2}^{\leqslant}(D_2)=\{x_4,x_5,x_8\}$

$\overline{R}_{A^3}^{\leqslant}(D_1)=\overline{R}_{A^3}^{\leqslant}(D_2)=U$

进一步可得：

$$\sum_{i=1}^{2}Bel_{A^1}(D_i)=\sum_{i=1}^{2}Bel_{A^2}(D_i)=\frac{17-\sqrt{2}}{32}>0=\sum_{i=1}^{2}Bel_{A^3}(D_i)$$

$$\sum_{i=1}^{2}Pl_{A^1}(D_i)=\sum_{i=1}^{2}Pl_{A^2}(D_i)=\frac{47+\sqrt{2}}{32}<2=\sum_{i=1}^{2}Pl_{A^3}(D_i)$$

因此，S^2 关于 S 是信任协调和似然协调的。再由定理 9 和定理 10 可知，此系统的信任最优尺度和似然最优尺度都为 2。基于最优尺度所对应的随机序决策系统，可以进一步给出相应的属性约简和决策规则提取。

结束语 在多尺度信息系统中，尽管从细尺度得到的知识比从粗尺度得到的知识的精度高，但是获得知识所需要的代价也较大。针对决策目标选择一个合适的尺度是多尺度信息系统数据分析的关键问题。在基于优势-等价关系的随机序决策系统中，本文通过引入多尺度保序粒度变换映射提出了随机多尺度序信息系统和随机多尺度序决策系统的概念，并讨论了相应系统的最优尺度选择问题。给出了系统中决策类由条件属性生成的优势关系的粗糙近似，并进一步定义了基于粗糙集近似的最优尺度与基于证据理论的最优尺度的概念，用证据理论中的信任函数和似然函数分别刻画了随机多尺度序信息系统和随机多尺度序决策系统的最优尺度的数值特征。本文的结论对于非随机环境下的多尺度序信息系统和多尺度序决策系统也适用，只须将概率测度用均匀分布的概率（即频率）代替即可。在后续的研究中，一方面可以用证据理论研究多尺度不完备序决策系统的最优尺度选择问题，另一方面可以进一步研究决策属性，即多尺度的各类序决策系统的最优尺度选择和决策规则提取问题。

参 考 文 献

[1] ZADEH L A, GUPTA M, RAGADE R, et al. Fuzzy sets and information granularity[C]// Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Amsterdam: North-Holland, 1979: 3-18.

[2] LIN T Y. Granular computing: From rough sets and neighborhood systems to information granulation and computing in words[C]// Proceedings of European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing. 1997.

[3] LIANG J Y, QIAN Y H, LI D Y, et al. Theory and method of granular computing for big data mining[J]. Scientia Sinica Informationis, 2015, 45(11): 1355-1369.

[4] CHEN C L P, ZHANG C Y. Data-intensive applications, challenges, techniques and technologies: A survey on Big Data[J]. Information Sciences, 2014, 275: 314-347.

[5] XU J, WANG G Y, YU H. Review of big data processing based on granular computing[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(8): 1497-1517.

[6] PAWLAK Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[7] PANG J F, SONG P, LIANG J Y. Review on multi-granulation computing models and methods for decision analysis[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2021, 34(12): 1120-1130.

[8] LI J H, WANG F, WU W Z, et al. Review of multi-granularity data analysis methods based on granular computing[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2021, 36(3): 418-435.

[9] WU W Z, LEUNG Y. Theory and applications of granular labelled partitions in multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2011, 181(18): 3878-3897.

[10] LI F, HU B Q. A new approach of optimal scale selection to multi-scale decision tables[J]. Information Sciences, 2017, 381: 193-208.

[11] WU W Z, LEUNG Y. Optimal scale selection for multi-scale decision tables[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(8): 1107-1129.

[12] SHE Y H, LI J H, YANG H L. A local approach to rule induction in multi-scale decision tables[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 89: 398-410.

[13] LI F, HU B Q, WANG J. Stepwise optimal scale selection for multi-scale decision tables via attribute significance[J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 129: 4-16.

[14] WU W Z, CHEN C J, LI T J, et al. A comparative study on optimal granularities in inconsistent multi-granular labeled decision systems[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2016, 29(12): 1095-1103.

[15] WU W Z, SUN Y, WANG X, et al. Local optimal scale combination selections in inconsistent generalized multi-scale decision systems[J]. Recognition and Artificial Intelligence, 2021, 34(8): 689-700.

[16] HAO C, LI J H, FAN M, et al. Optimal scale selection in dynamic multi-scale decision tables based on sequential three-way decisions[J]. Information Sciences, 2017, 415: 213-232.

[17] HUANG Z H, LI J J, DAI W Z, et al. Generalized multi-scale decision tables with multi-scale decision attributes[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 115: 194-208.

[18] ZHANG X Q, ZHANG Q H, CHENG Y L, et al. Optimal scale selection by integrating uncertainty and cost-sensitive learning in multi-scale decision tables[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(5): 1095-1114.

[19] CHENG Y L, ZHANG Q H, WANG G Y, et al. Optimal scale selection and attribute reduction in multi-scale decision tables based on three-way decision [J]. Information Sciences, 2020, 541: 36-59.

[20] CHENG Y L, ZHANG Q H, WANG G Y. Optimal scale combination selection for multi-scale decision tables based on three-way decision[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2021, 12: 281-301.

[21] WU W Z, LEUNG Y. A Comparison study of optimal scale combination selection in generalized multi-scale decision tables[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(5): 961-972.

[22] HUANG B，LI H X，FENG G F，et al. Double-quantitative rough sets，optimal scale selection and reduction in multi-scale dominance IF decision tables[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2021，130：170-191.
[23] ZHANG Q H，CHENG Y L，ZHAO F，et al. Optimal scale combination selection integrating three-way decision with Hasse diagram[J/OL]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. https：//ieeexplore. ieee. org/document/9364887.
[24] ZHANG Q H，ZHANG X Q，PANG G H. Cost-sensitive optimal scale combination in multi-scale decision systems[J]. Control and Decision，2021，36(10)：2369-2378.
[25] SHAFER G. A Mathematical Theory of Evidence[M]. Princeton：Princeton University Press，1976.
[26] SKOWRON A. The rough sets theory and evidence theory[J]. Fundamenta Informatica，1990，13：245-262.
[27] YAO Y Y，LINGRAS P J. Interpretations of belief functions in the theory of rough sets[J]. Information Sciences，1998，104：81-106.
[28] WU W Z，LEUNG Y，ZHANG W X. Connections between rough set theory and Dempster-Shafer theory of evidence[J]. International Journal of General Systems，2002，31：405-430.
[29] WU W Z，LEUNG Y，MI J S. On generalized fuzzy belief functions in infinite spaces[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2009，17(2)：385-397.
[30] WU W Z，ZHANG M，LI H Z，et al. Knowledge reduction in random information systems via Dempster-Shafer theory of evidence[J]. Information Sciences，2005，174(3/4)：143-164.
[31] XU W H，ZHANG X Y，ZHONG J M，et al. Attribute reduction in ordered information systems based on evidence theory[J]. Knowledge and Information Systems，2010，25(1)：169-184.
[32] DU W S，HU B Q. Attribute reduction in ordered decision tables via evidence theory[J]. Information Sciences，2016，364(C)：91-110.
[33] WU W Z，CHEN Y，XU Y H，et al. Optimal granularity selections in consistent incomplete multi-granular labeled decision systems[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence，2016，29(2)：108-115.
[34] WU W Z，YANG L，TAN A H，et al. Granularity Selections in Generalized Incomplete Multi-Granular Labeled Decision Systems[J]. Journal of Computer Research and Development，2018，55(6)：1263-1272.
[35] GRECO S，MATARAZZO B，SLOWINGSKI R. Rough approximation of a preference relation by dominance relations[J]. European Journal of Operational Research，1999，117(1)：63-83.
[36] GRECO S，MATARAZZO B，SLOWINSKI R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research，2001，129(1)：1-47.
[37] XU W H. Ordered Information Systems and Rough Sets[M]. Beijing：Science Press，2013.
[38] FANG L H，LI K D. Distribution Reduction in Inconsistent Information System Based on Dominance and Equivalent Relations[J]. Fuzzy Systems and Mathematics，2013，27(3)：182-189.
[39] ZHENG J W，WU W Z，BAO H，et al. Evidence theory based optimal scale selection for multi-scale ordered decision systems[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics，2021，13(4)：1115-1129.
[40] ZHANG W X，LEUNG Y，WU W Z. Information Systems and Knowledge Discovery[M]. Beijing：Science Press，2003.

FANG Lian-hua，born in 1986，master，lecturer. Her main research interests include rough set and general topology.

WU Wei-zhi，born in 1964，Ph.D，professor. His main research interests include rough set，granular computing，data mining and artificial intelligence.

（责任编辑：李亚辉）