

链图的概念格表示

李立峰

(西安邮电大学理学院 西安 710121)

摘要 概念格是基于对象集和属性集之间的二元关系建立的一种层次结构。它与极大二部图存在着一定的联系。将概念格属性约简理论应用于链图,首先给出了链图的概念格表示,其次证明了二部图 $G=(V_1, V_2, E)$ 是链图,当且仅当 $G'=(\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{E})$ 是链图,这里 $(\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{E})$ 是 (V_1, V_2, E) 的约简形式背景。

关键词 概念格,约简,链图

中图法分类号 TP18 文献标识码 A

Chain Graph and their Concept Lattice Representation

LI Li-feng

(School of Science, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121, China)

Abstract Concept lattices are an ordering of the maximal rectangles defined by a binary relation. There is a corresponding relationship between concept and maximal biclique. This paper applied the reduction theory of concept lattice to chain graph. Firstly, the representation of chain graph by concept lattice was given. Secondly, it was proved that a bipartite graph $G=(V_1, V_2, E)$ is a chain graph if and only if $G'=(\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{E})$ is such a graph, where $(\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{E})$ is a reduced context of the context (V_1, V_2, E) .

Keywords Concept lattice, Reduction, Chain graph

概念格, 又称 Galois 格, 是 Wille^[1] 于 1982 年首先提出的。概念格是根据对象与属性之间的二元关系建立的一种层次结构, 作为数据处理的有力工具, 概念格越来越多地应用于知识发现、软件工程、信息检索等领域。近年来, 概念格的约简理论是概念格研究领域的热点问题, 比如, Ganter 和 Wille 在文献[2]中通过删掉形式概念中的可约属性和对象来进行概念约简。张文修教授在文献[3]中提出了在保持格同构的条件下建立概念格属性约简理论和方法。魏玲教授等在文献[4]中基于决策形式背景建立属性约简理论。吴伟志教授基于软计算在决策形式背景中提出了新的约简方法(参见文献[5])。文献[6]基于粗糙集的思想研究概念格的属性约简。Eloumi 等(参见文献[7])基于模糊形式背景建立了一个多层次的约简理论。针对文献[7]中建立的概念之集不能构成格结构, 文献[8]改进了建格方法, 在保持格同构条件下建立了多层次属性约简理论。随后产生了基于区间值形式背景的概念格的属性约简(参见文献[9, 10])。

二部图 $G=(V_1, V_2, E)$ 是由顶点集 V_1 和 V_2 , 边集 $E \subseteq V_1 \times V_2$ 组成, 如果 $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$, 则二部图 $G=(V_1, V_2, E)$ 的伴随矩阵为二元 $s \times t$ 矩阵 $A=(a_{ij})$, 这里 $a_{ij}=1$, 当且仅当 $(x_i, y_j) \in E$ 。如果将 $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 看成对象集, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$ 看成属性集, 二部图的伴随矩阵就是形式背景。关于概念格与图论的交叉研究很早就文献[11]中涉及, 随后得到了发展。文献[12]涉及到了用概念格方法来处理偶补图(co-bipartite graphs)的有关

问题。文献[13]基于一类模糊概念格将文献[12]中的思想推广到了模糊图当中。链图是一类特殊的二部图, 本文拟将概念格约简理论应用于链图的研究当中, 首先研究链图及其对应的概念格之间的关系, 其次从概念格角度出发给出链图的二部图刻画。

1 预备知识

本小节介绍形式概念分析以及约简的基本知识。

称 (V_1, V_2, E) 为一个形式背景, 其中 $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 为对象集, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$ 为属性集, $E \subseteq V_1 \times V_2$ 。本文中, 用 1 表示 $(x, y) \in E$, 用 0 表示 $(x, y) \notin E$, 这样形式背景可以表示成只含 0 和 1 的矩阵。

对于形式背景, 在对象集 $X \subseteq V_1$ 和属性集 $Y \subseteq V_2$ 上分别定义

$$X' = \{y \in V_2 \mid (x, y) \in E, \forall x \in X\}$$

$$Y' = \{x \in V_1 \mid (x, y) \in E, \forall y \in Y\}$$

定义 1^[2] 设 (V_1, V_2, E) 为形式背景, $X \subseteq V_1, Y \subseteq V_2$, 如果一个二元组 (X, Y) 满足 $X' = Y$ 且 $Y' = X$, 则称 (X, Y) 是一个形式概念, 简称概念。

定理 1^[2] $L(V_1, V_2, E)$ 是完备格, 且有

$$\bigwedge_{i \in I} (X_i, Y_i) = (\bigcap_{i \in I} X_i, (\bigcup_{i \in I} Y_i)'')$$

$$\bigvee_{i \in I} (X_i, Y_i) = ((\bigcup_{i \in I} X_i)'', \bigcap_{i \in I} Y_i)$$

形式背景 (V_1, V_2, E) 中的概念具有如下性质 $(\forall X_1, X_2 \subseteq V_1, \forall Y_1, Y_2, Y \subseteq V_2)$:

到稿日期: 2013-04-13 返修日期: 2013-09-06

李立峰(1980—), 男, 硕士, 讲师, 主要研究方向为不确定性推理, E-mail: hlw12-12@sohu.com。

(1) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_2' \subseteq X_1', Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow Y_2' \subseteq Y_1'$;

(2) $X \subseteq X'', Y \subseteq Y''$;

(3) (X, X'') 和 (Y'', Y) 都是概念。

不同的形式背景所对应的概念格可能是同构的,很多情况下减少对象集和属性集的某些元素并不改变概念格的格结构,基于此,概念格的约简是一个研究的热点问题。

在形式背景 (V_1, V_2, E) 下, $\forall N \subseteq V_2$, 记 $E_N = E \cap (V_1 \times N)$, $\forall M \subseteq V_1$, 记 $E_M = E \cap (M \times V_2)$, 那么 (V_1, N, E_N) 和 (M, V_2, E_M) 都为形式背景。

定义 2^[3] 设 (V_1, V_2, E) 为形式背景, 如果存在 $N \subseteq V_2$ 使得 $L(V_1, V_2, E) \cong L(V_1, N, E_N)$, 则称 N 为相容属性集, 进一步, 如果对任意 $y \in N, L(V_1, N - \{y\}, E_{N - \{y\}})$ 与 $L(V_1, N, E_N)$ 不同构, 则称 N 为 (V_1, V_2, E) 的属性约简, 此时称 (V_1, N, E_N) 为属性约简的形式背景。

类似地, 设 (V_1, V_2, E) 为形式背景, 如果存在 $M \subseteq V_1$ 使得 $L(V_1, V_2, E) \cong L(M, V_2, E_M)$, 则称 M 为相容对象集, 进一步, 如果对任意 $x \in M, L(M, V_2, E_{M - \{x\}})$ 与 $L(M, V_2, E_M)$ 不同构, 则称 M 为 (V_1, V_2, E) 的对象约简, 此时称 (M, V_2, E_M) 为对象约简的形式背景。

定理 2^[2] $V_2 - \{y\}$ 是 (V_1, V_2, E) 的相容属性集当且仅当存在 $Y \subseteq V_2, y \notin Y$ 但有 $\{y\}' = Y'$ 。相应地, $V_1 - \{x\}$ 是 (V_1, V_2, E) 的相容对象集当且仅当存在 $X \subseteq V_1, x \notin X$ 但有 $\{x\}' = X'$ 。

定义 3 如果 (V_1, V_2, E) 既是属性约简又是对象约简的形式背景, 则称 (V_1, V_2, E) 是约简形式背景。

给定形式背景 (V_1, V_2, E) , 一方面我们可以建立概念格 $L(V_1, V_2, E)$; 另一方面, 如果将该形式背景看成是二部图的邻接矩阵, 则形式背景又和二部图 $G = (V_1, V_2, E)$ 相对应。关于 $L(V_1, V_2, E)$ 和 $G = (V_1, V_2, E)$ 的关系有以下结果:

定理 3 设 $W_1 \subseteq V_1, W_2 \subseteq V_2, W_1 \cup W_2$ 是 $G = (V_1, V_2, E)$ 的极大二部团当且仅当 $(W_1, W_2) \in L(V_1, V_2, E)$ 。

2 链图及其概念格表示

文中出现的图均为有限无向图, 用 $N(x)$ 表示点 x 的邻域。二部图 $G = (V_1, V_2, E)$ 是由两个非交顶点集 V_1, V_2 组成, 且 G 的每条边的顶点分别在 V_1, V_2 中。极大二部团(极大完备二部子图)是指二部图的子图 $H = (W_1, W_2, F)$, 使得 $\forall x \in W_1, \forall y \in W_2$ 都有 $(x, y) \in F$ 。

定义 4 设二部图 $G = (V_1, V_2, E)$ 中 $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2$, 如果存在 V_1 中的序列 $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ 和 V_2 中的序列 $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ 满足 $N(x_1) \subseteq N(x_2) \subseteq \dots \subseteq N(x_{n_1})$ 和 $N(y_{n_2}) \subseteq \dots \subseteq N(y_1)$, 则 $G = (V_1, V_2, E)$ 被称作链图。

定理 4 对于链图 $G = (V_1, V_2, E)$, 其对应的概念格为线格。

证明: 设 $G = (V_1, V_2, E)$ 为链图, 其中 $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}, V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_2}\}$ 。则存在 V_1 中的序列 $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ 和 V_2 中的序列 $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ 满足 $N(x_1) \subseteq N(x_2) \subseteq \dots \subseteq N(x_{n_1})$ 和 $N(y_{n_2}) \subseteq \dots \subseteq N(y_1)$, 因为链图中每个极大二部团为 $(N(y_j), N(x_i))$, 因此对于任意两个概念 $(N(y_{j_1}), N(x_{i_1}))$ 和 $(N(y_{j_2}), N(x_{i_2}))$, 都有 $N(y_{j_1}) \subseteq N(y_{j_2})$ 或 $N(y_{j_2}) \subseteq N(y_{j_1})$ 。假设 $N(y_{j_1}) \subseteq N(y_{j_2})$, 则有 $(N(y_{j_1}), N(x_{i_1})) \vee (N(y_{j_2}), N(x_{i_2})) = (N(y_{j_2}), N(x_{i_2}))$ 且 $(N(y_{j_1}), N(x_{i_1})) \wedge$

$(N(y_{j_2}), N(x_{i_2})) = (N(y_{j_1}), N(x_{i_1}))$, 因此 $L(V_1, V_2, E)$ 为线格。

定理 5 如果形式背景 (V_1, V_2, E) 的概念格是线格, 则其对应的二部图为链图。

证明: 任取 $y_i, y_j \in V_2$, 因为 $(\{y_i\}', \{y_i\}'')$ 和 $(\{y_j\}', \{y_j\}'')$ 是概念, 且 $L(V_1, V_2, E)$ 是线格, 可得 $\{y_i\}' \subseteq \{y_j\}'$ 或者 $\{y_j\}' \subseteq \{y_i\}'$, 因此存在 V_2 的序列 $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ 满足 $N(y_{n_2}) \subseteq \dots \subseteq N(y_1)$, 同理可证存在 V_1 中的序列 $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ 满足 $N(x_1) \subseteq N(x_2) \subseteq \dots \subseteq N(x_{n_1})$, 因此 $G = (V_1, V_2, E)$ 为链图。

例 1 图 1 为一链图, 图 2 为其对应的概念格, 其中概念/极大二部团为: $C_1 = (\{x_2\}, V_2), C_2 = (\{x_2, x_3\}, \{y_1, y_2, y_3\}), C_3 = (V_1, \{y_1\})$ 。

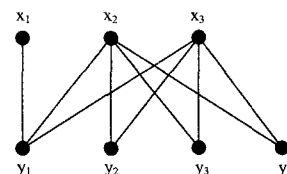


图 1 (V_1, V_2, E) 对应的二部图

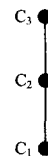


图 2 (V_1, V_2, E) 对应的概念格

定理 6 设 $(\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{E})$ 为 (V_1, V_2, E) 的约简形式背景, 则 $G = (V_1, V_2, E)$ 为链图当且仅当 $G' = (\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{E})$ 为链图。

证明: 设 $V_2 \setminus \{y\}$ 为 (V_1, V_2, E) 的属性相容集, 由定义 4 和定义 5 可知, 我们只需证明 $G = (V_1, V_2, E)$ 为链图当且仅当 $G' = (V_1, V_2 \setminus \{y\}, E_{V_2 \setminus \{y\}})$ 为链图。充分性易证, 只需证明必要性即可。因为 $(V_1, V_2 \setminus \{y\}, E_{V_2 \setminus \{y\}})$ 是属性相容集, 由定理 2 可知, 存在属性集 $Y \subseteq V_2 \setminus \{y\}$ 使得 $\{y\}' = Y'$, 因为 $G' = (V_1, V_2 \setminus \{y\}, E_{V_2 \setminus \{y\}})$ 是链图, 则存在 V_2 的序列 $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ 使得 $N(y_{n_2}) \subseteq \dots \subseteq N(y_1)$ 。因此 $G = (V_1, V_2, E)$ 为链图。

例 2 接例 1, 形式背景 $(V_1, V_2 \setminus \{y_3\}, E_{V_2 \setminus \{y_3\}})$ 为 (V_1, V_2, E) 的约简形式背景。图 3 表示了 $(V_1, V_2 \setminus \{y_3\}, E_{V_2 \setminus \{y_3\}})$ 对应的链图, 图 4 为 $(V_1, V_2 \setminus \{y_3\}, E_{V_2 \setminus \{y_3\}})$ 对应的概念格。形式概念/极大二部团为: $C'_1 = (\{x_2\}, \{y_1, y_2, y_4\}), C'_2 = (\{x_2, x_3\}, \{y_1, y_2\}), C'_3 = (V_1, \{y_1\})$ 。

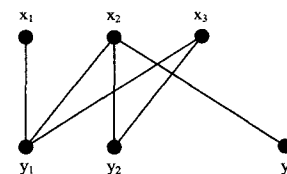


图 3 $(\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{E})$ 对应的二部图

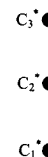


图 4 $(\overline{V_1}, \overline{V_2}, \overline{E})$ 对应的概念格

结束语 我们将概念格约简理论应用于链图当中, 并探

讨论了若干性质。链图仅仅是一类特殊的二部图,今后将讨论如何将该理论应用于更广泛的二部图。

参 考 文 献

- [1] Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concept[C]//Rival R I, ed. *Ordered Sets*. Boston:Reidel, Dordrecht, 1982; 445-470
- [2] Ganter B, Wille R. *Formal Concept Analysis*[M]. Mathematical Foundations. Berlin:Springer, 1999
- [3] 张文修,魏玲,祁建军. 概念格的属性约简理论与方法[J]. 中国科学 E 辑:信息科学, 2005, 35(6): 628-639
- [4] 魏玲,祁建军,张文修. 决策形式背景的概念格属性约简[J]. 中国科学 E 辑:信息科学, 2008, 38(2): 195-208
- [5] Wu W Z, Leung Y, Mi J S. Granular computing and knowledge reduction in formal contexts[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2009, 21(10): 1461-1474
- [6] Liu M, Shao M W, Zhang W X, et al. Reduction method for concept lattices based on rough set theory and its application[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2007, 53(9): 1390-1410
- [7] Elloumi S, Jaam J, Hasnah A, et al. A multi-level conceptual data reduction approach based on the Lukasiewicz implication[J]. *Information Sciences*, 2004, 163: 253-262
- [8] Li L F, Zhang J K. Attribute reduction in fuzzy concept lattices based on the T implication [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2010, 23: 497-503
- [9] Yang H Z, Leung Y, Shao M W. Rule acquisition and attribute reduction in real decision formal contexts[J]. *Soft Computing*, 2011, 15: 1115-1128
- [10] Li J H, Mei C L, Lv Y J. Knowledge reduction in real decision formal contexts[J]. *Information Sciences*, 2012, 189: 191-207
- [11] Amilhastre J, Vilarem M C, Janssen P. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite dominofree graphs[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 1998, 86: 125-144
- [12] Berry A, Sigayret A. Representing a concept lattice by a graph [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2004, 144(1/2): 27-42
- [13] Ghosh P, Kundu K, Sarkar D. Fuzzy graph representation of a fuzzy concept lattice[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2010, 161: 1669-1675
- [14] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets theory for multi-criteria decision analysis[J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 129: 1-47
- [15] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Handling missing values in rough set analysis of multiattribute and multi-criteria decision problems[C]//Zhong N, Skowron A, Ohsuga S, eds. *New Directions in Rough Sets, Data Mining and Granular-Soft Computing*, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Berlin: Springer-Verlag, 1999; 146-157
- [16] Grzymala-Busse J W. Characteristic relations for incomplete data: a generalization of the indiscernibility relation[C]//Tsumoto S, et al, eds. *Proceeding of the Third International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing*, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2004. Berlin: Springer-Verlag, 2004; 244-253
- [17] Grzymala-Busse J W. Data with missing attribute values: generalization of indiscernibility relation and rule reduction [C] // *Transactions on Rough Sets I*, Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- [18] Grzymala-Busse J W, Wang A Y. Modified algorithms LEM1 and LEM2 for rule induction from data with missing attribute values[C]//*Proceeding of the Fifth International Workshop on Rough Sets and Soft Computing at the Third Joint Conference on Information Sciences*, 1997. Research Triangle Park, NC, 1997; 69-72
- [19] Grzymala-Busse J W. On the unknown attribute values in learning from examples[C]//Zbigniew W, Maria Z, eds. *Proceeding of the Sixth International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems*, 1991. Berlin: Springer-Verlag, 1991; 368-377
- [20] Guan Y Y, Wang H K. Set-valued information systems[J]. *Information Sciences*, 2006, 176: 2507-2525
- [21] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. *Information Sciences*, 1998, 112: 39-49
- [22] Leung Y, Li D Y. Maximal consistent block technique for rule acquisition in incomplete information systems[J]. *Information Sciences*, 2003, 115: 85-106
- [23] Leung Y, Wu W Z, Zhang W X. Knowledge acquisition in incomplete information systems: a rough set approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 168: 164-180
- [24] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. *Information Sciences*, 1998, 112: 39-49
- [25] Kryszkiewicz M. Rules in incomplete information systems[J]. *Information Sciences*, 1999, 113: 271-292
- [26] Stefanowski J, Tsoukia's A. On the extension of rough sets under incomplete information[C]//Zhong N, Skowron A, Ohsuga S, eds. *New Directions in Rough Sets, Data Mining and Granular-Soft Computing*, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Berlin: Springer-Verlag, 1999; 73-82
- [27] Stefanowski J, Tsoukia's A. Incomplete information tables and rough classification[J]. *Computational Intelligence*, 2001, 17: 545-566
- [28] Shao M W, Zhang W X. Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2005, 20: 13-27
- [29] Qian Yu-hua, Liang Ji-ye, Dang Chuang-yin. Interval ordered information systems[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, 56: 1994-2009
- [30] Yang Xi-bei, Yu Dong-jun, Yang Jing-yu, et al. Dominance-based rough set approach to incomplete interval-valued information system[J]. *Data & Knowledge Engineering*, 2009, 68: 1331-1347
- [31] Zhang W X, Qiu G F. *Uncertain Decision Making Based on Rough Sets*[M]. Beijing, China: Science Press, 2005
- [32] Dai Jian-hua, Xu Qing. Approximations and uncertainty measures in incomplete information systems [J]. *Information Sciences*, 2012, 198: 62-80

(上接第 256 页)