基于公理化模糊集合的模糊随机事件及其概率

谢健祥, 潘小东, 张波

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.211100242

基于公理化模糊集合的模糊随机事件及其概率

谢健祥　潘小东　张　波
西南交通大学数学学院　成都 611756
(912056578@qq.com)

摘　要　基于公理化模糊集合研究模糊随机事件的概率,定义了模糊随机事件以及相应的概率,讨论了模糊随机事件概率的一些基本性质,给出了模糊随机事件概率的乘法公式,证明了模糊随机事件的全概率公式和贝叶斯公式。
关键词:公理化模糊集;模糊随机事件;概率;全概率公式;贝叶斯公式
中图法分类号　O236

Fuzzy Random Events and Its Probabilities Based on Axiomatic Fuzzy Sets

XIE Jian-xiang,PAN Xiao-dong and ZHANG Bo
School of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China

Abstract　This paper studies the probability of fuzzy random events based on axiomatic fuzzy set,defines fuzzy random events and their corresponding probabilities,discusses some basic properties of probabilities of fuzzy random events,gives the product rule of fuzzy random events probability,and proves the law of total probability of fuzzy random events and Bayes'rule.
Keywords　Axiomatic fuzzy sets,Fuzzy random events,Probability,Law of total probability,Bayes'rule

1　引言

随机现象是指在一次实验或观测中,其结果有多种可能,事先无法精确断定究竟发生哪一种结果的现象。对于随机问题,概率统计理论是一种非常有效的处理工具。模糊现象,是指反映事物的质变和量变之间差异的一种现象。当我们根据事物的质去认识事物的量,或根据事物的量去认识事物的质的时候,质与量之间所表现出来的差异特性即为模糊性。对于模糊现象,Zadeh[1]早在1965年提就出了模糊集合的概念。模糊集合旨在从量化的角度描述“亦此亦彼”的模糊现象。由于现实世界的复杂性,往往同一对象既包含模糊性又包含随机性,它们彼此密切关联,难以分割,比如“明天会下大雨”这类事件就属于这种情况。为了能同时处理模糊性和随机性,Zadeh[2]在1968年将模糊集与概率理论相结合,基于概率测度和抽象积分定义了模糊随机事件及其概率。1978年,Kwakernaak[3-4]在国际上最先引入了模糊随机变量的概念,并讨论了模糊随机变量的数学期望、条件期望和独立模糊随机变量的基本性质。而后,Yager等[5]对模糊概率的概念进行了改进和推广。Smets[6]引入了模糊事件的条件概率的概念,提出了一些公理,这些公理可以证明由Zadeh最初给出的模糊随机事件概率的自然定义。Kato等[7]提出了一种新的以模糊数为参数的模糊概率分布函数,把在随机过程和统计领域广泛应用的正态分布发展为分别由均值和标准差的模糊数定义的模糊概率分布函数。Habil等[8]证明了模糊环境下的大数定律和中心极限定理。Fang[9]在模糊集测度的基础上给出了另一种模糊随机事件概率的定义及性质,证明了Zadeh对模糊随机事件概率的定义事实上就构成了从概率空间到模糊随机事件概率空间的转换。以上研究及文献[10-13]是将模糊理论与概率统计相互融合,以构建一个能同时处理随机现象与模糊现象问题的统一框架。

近年来又有学者了将概率理论引入到模糊框架下,提出了概率集、概率模糊集的概念,但仍没有从整体或全局上去考虑相应的概率。Liu[14]基于Zadeh提出的模糊事件的概率,提出模糊随机事件没有公共点、不交模糊随机事件以及不交模糊随机事件列等概念。Pavla等[15]将模糊随机事件的概率应用到决策矩阵中,并用一个实例验证了其有效性。Wang等[16]研究了基本模糊事件空间和模糊概率空间问题,得到了一些将用于模糊概率空间研究的结果。Wang[17]在模糊集和随机集的基础上,在测度空间中给出一类模糊集函数,并证明了此函数为模糊测度,给出了模糊测度的统计估值,讨论了估计的优良性,并把相关结论推广到概率空间上。

基于上述分析不难发现,已有关于模糊随机事件概率的研究主要存在以下两个方面的问题。1)模糊随机事件及其概率的定义依赖于模糊集合隶属函数的定义,但Zadeh的模糊集合及它的各种扩展模型缺乏严格的理论基础。2)概率论是从整体上研究随机现象数量规律的数学理论,这种整体性体现在样本空间和概率公理上,但已有关于模糊随机事件及其概率的研究并没有体现这种整体性和全局性。

基金项目:国家自然科学基金(61673320,61976130);四川省应用基础研究计划项目(2020YJ0270)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61673320,61976130) and Sichuan Applied Basic Research Program(2020YJ0270).
通信作者:潘小东(xdpan1@163.com)

本文基于公理化模糊集合理论[18-20]定义模糊随机事件及其概率，并研究模糊随机事件概率的计算方法及相关数学性质，以期为建立能同时处理模糊性和随机性的数学模型提供必要理论基础。

2 预备知识

2.1 模糊事件的概率度量

定义 1[21] 设$(\Omega,\mathscr{A},P)$是概率测度空间，如果$A\in\zeta(\mathscr{A})=\{A\in\mathscr{F}(\Omega)\mid A_\alpha\in\mathscr{A},\alpha\in[0,1]\}$，则$A$称是$\Omega$上的模糊事件。

定义 2[21] 设A是概率测度空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的一个模糊事件，置$P_Z(A)=\int_\Omega A(\omega)\mathrm{d}P=E(A)$，则称$P_Z(A)$是模糊事件$A$的概率，称$P_Z$为模糊$\sigma$-代数上的模糊概率测度。

P_Z的下标Z表示P_Z是 Zadeh 意义下的模糊概率测度。

定理 1[21] 设$A,B\in\mathscr{F}(\Omega)$是模糊事件，有：

(1)$0\leqslant P_Z(A)\leqslant 1$，且$P_Z(\varnothing)=0$，$P_Z(\Omega)=1$；

(2)$P_Z(A^c)=1-P_Z(A)$；

(3)$A\subseteq B\Rightarrow P_Z(A)\leqslant P_Z(B)$；

(4)$P_Z(A\cup B)=P_Z(A)+P_Z(B)-P_Z(A\cap B)$；

(5)$A\cap B=\varnothing\Rightarrow P_Z(A\cup B)=P_Z(A)+P_Z(B)$。

定理 2[21] 设$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\Omega)$，且当$i\neq j$时，$A_i\cap A_j=\varnothing$(称$A_1,A_2,\cdots,A_n$为两两不相容)，则$P_Z(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P_Z(A_i)$。

定义 3[21] 设模糊事件$A,B\in\mathscr{F}(\Omega)$，若$P_Z(B)>0$，则称

$$P_Z(A\mid B)=\frac{P_Z(A\cap B)}{P_Z(B)}$$

为A在B下的条件概率。

定理 3[21] 设n个模糊事件$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\Omega)$，且$P_Z(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)>0$，则$P_Z(A_1\cap\cdots\cap A_n)=P_Z(A_1)P_Z(A_2\mid A_1)\cdots P_Z(A_n\mid A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$。

定理 4[21] 设$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\Omega)$是$n$个两两不相容的模糊事件，且$P_Z(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意$A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$A\in\mathscr{F}(\Omega)$，有：

$$P_Z(A)=\sum_{i=1}^{n}P_Z(A_i)P_Z(A\mid A_i)$$

定理 5[21] 设$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\Omega)$是$n$个两两不相容的模糊事件，且$P_Z(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意$A\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$A\in\mathscr{F}(\Omega)$且$P_Z(A)>0$，有：

$$P_Z(A_i\mid A)=\frac{P_Z(A_i)P_Z(A\mid A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P_Z(A_j)P_Z(A\mid A_j)}$$

表 1、表 2 给出了一些常见的模糊算子。

表 1 常见的 T 模算子

Table 1 Common t-module operators

Name	Symbol	$a\cap_{\otimes}b$
Minimum	$\cap_{\otimes_M}$	$\min\{a,b\}$
Product	$\cap_{\otimes_P}$	ab
Lukasiewicz	$\cap_{\otimes_L}$	$\max\{a+b-1,0\}$
Drastic product	$\cap_{\otimes^D}$	$\begin{cases}0, & a,b\in[0,1)\times[0,1)\\ \min\{a,b\}, & \text{otherwise}\end{cases}$
Nilpotent minimum	$\cap_{\otimes^{nM}}$	$\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1\\ \min\{a,b\}, & \text{otherwise}\end{cases}$

表 2 常见的 T 余模算子

Table 2 Common t-comodule operators

Name	Symbol	$a\cup_{\oplus}b$
Maximum	$\cup_{\otimes_P}$	$\max\{a,b\}$
Probabilistic sum	$\cup_{\otimes_M}$	$a+b-ab$
Lukasiewicz	$\cup_{\otimes_L}$	$\min\{a+b,1\}$
Drastic sum	$\cup_{\otimes_D}$	$\begin{cases}1, & a,b\in(0,1]\times(0,1]\\ \max\{a,b\}, & \text{otherwise}\end{cases}$
Nilpotent maximum	$\cup_{\oplus^{nM}}$	$\begin{cases}1, & a+b>1\\ \max\{a,b\}, & \text{otherwise}\end{cases}$

强否定算子：$N(a)=1-a$。

定理 6[21] 设$A,B\in\mathscr{F}(\Omega)$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，则：

(1)$\alpha<\beta\Rightarrow A_{\bar\beta}\subseteq A_\beta\subseteq A_{\bar\alpha}\subseteq A_\alpha$；

(2)$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1]$，$A_\alpha\subseteq B_\alpha$；

(3)$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1]$，$A_{\bar\alpha}\subseteq B_{\bar\alpha}$；

(4)$A=B\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1]$，$A_\alpha=B_\alpha\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1]$，$A_{\bar\alpha}=B_{\bar\alpha}$。

2.2 公理化模糊集合

2018 年 Pan 等[18-20]基于对模糊现象的本质、特征及性质的认识分析，从公理化的角度对模糊集进行了严格化、明确化、清晰化，定义了模糊划分，并基于模糊划分给出模糊集合的公理化定义，让隶属度函数的建立更加客观。

定义 4[20](模糊划分) 设$U=[a,b]\subset\mathbb{R}$，U上的一个模糊划分指的是具有如下形式的对象：

$$\widetilde{U}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\},n\in\mathbb{N}^+$$

其中，$A_i=\{(x,\mu_{A_i}(x))\mid x\in U\}(i=1,2,\cdots,n)$，函数$\mu_{A_i}:U\to[0,1]$定义了元素$x\in U$关于类$A_i$(代表某种质，即定性描述的类)的隶属度，并且满足下面的条件：

(1)对任意的$i\in n$，函数$\mu_{A_i}(x)$在U上连续或只有有限个第一类间断点；

(2)对任意的$i\in n$，至少存在点$x_0\in U$，使得$\mu_{A_i}(x_0)=1$；

(3)对任意的$i\in n$，如果在点$x_0\in U$处满足$\mu_{A_i}(x_0)=1$，那么$\mu_{A_i}(x)$在$[a,x_0]$上不减，在$[x_0,b]$上不增；

(4)对任意的$x\in U$，满足$0<\mu_{A_1}(x)+\cdots+\mu_{A_n}(x)\leqslant 1$。

若上述条件(4)还满足：对$\forall x\in U$，满足$\mu_{A_1}(x)+\cdots+\mu_{A_n}(x)=1$，则称$\widetilde{U}$是$U$上的正则模糊划分。

定义 5[20](公理化模糊集) 设$U=[a,b]\subset\mathbb{R}$，$\widetilde{U}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}(n\in\mathbb{N}^+)$是$U$上的一个模糊划分，$N$是定义在$[0,1]$上的强否定，$\oplus$和$\otimes$分别是三角余模和三角模，并且它们彼此是$N$-对偶的。定义集合$\mathscr{F}(\widetilde{U})$如下：

(1)如果存在$i\in n$使得$\mu_A(x)=\mu_{A_i}(x)$对所有的$\forall x\in U$都成立，那么$A=\{(x,\mu_A(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$；

(2)如果$\mu_A(x)=1$对所有的$\forall x\in U$都成立，那么$A=\{(x,\mu_A(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，即$U\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$；

(3)如果$A=\{(x,\mu_A(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$且$r\in\mathbb{R}^+$，那么$A^r=\{(x,(\mu_A(x))^r)\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$；

(4)如果$A=\{(x,\mu_A(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，那么$A^N=\{(x,(\mu_A(x))^N)\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$；

(5)如果$B_i=\{(x,\mu_{B_i}(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，$i=1,2,\cdots$，那么$B_1\cap_\otimes B_2\cap_\otimes\cdots\cap_\otimes B_n\cap_\otimes\cdots=\{(x,\bigotimes_{i=1}^{\infty}\mu_{B_i}(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，$B_1\cup_\oplus B_2\cup_\oplus\cdots\cup_\oplus B_n\cup_\oplus\cdots=\{(x,\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mu_{B_i}(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$；

(6)$\mathscr{F}(\widetilde{U})$不再包含其他元素。

序对$(U,\mathscr{F}(\widetilde{U}))$称为由$\widetilde{U}$生成的$U$上的$(N,\otimes,\oplus)$型模糊隶属空间，$\mathscr{F}(\widetilde{U})$中的元素称为定义在$U$上、关于模糊划分$\widetilde{U}$及算子$N,\otimes,\oplus$的公理化模糊集合，简称公理化模糊集合。

由定义4可知$\mathscr{F}(\widetilde{U})$可看作是由$\widetilde{U}$生成的$(U,\varnothing,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes},\cup_{\oplus})$型自由代数。

在下文中，若无特殊说明，U表示区间$[a,b]$，$\widetilde{U}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是$U$上的模糊划分，由$\widetilde{U}$所生成的公理化模糊集合的全体记为$\mathscr{F}(\widetilde{U})$。$\mathscr{A}$表示$U$上的Borel集类，即由$U$中的全体闭子集所生成的$\sigma$代数。

3 模糊随机事件

定义6 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率空间，称$\mathscr{F}(\widetilde{U})$中的元素是$U$上的模糊随机事件。

若A是概率测度空间$(U,\mathscr{A},P)$上的一个模糊随机事件，$A^r=\{(x,(\mu_A(x))^r)\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$称为$A$的语气运算；$A^N=\{(x,(\mu_A(x))^N)\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$称为$A$的强否定运算，表示模糊随机事件$A$的对立模糊随机事件。

若$A=\{(x,\mu_A(x))\mid x\in U\}$，$B=\{(x,\mu_B(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$是概率测度空间$(U,\mathscr{A},P)$上的模糊随机事件，$\otimes$是一个三角模，则称$A\cap_{\otimes}B=\{(x,\mu_A(x)\otimes\mu_B(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$A$与$B$的交事件；$\oplus$是一个三角余模，则称$A\cup_{\oplus}B=\{(x,\mu_A(x)\oplus\mu_B(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$A$与$B$的并事件。

设A,B是概率测度空间$(U,\mathscr{A},P)$上的两个模糊随机事件，如果对$\forall x\in U$，$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$，称模糊随机事件$B$包含模糊随机事件$A$，并记为$A\subseteq B$。

设A是概率测度空间$(U,\mathscr{A},P)$上的一个模糊随机事件，若实验结果为$x_0\in U$，且$\mu_A(x_0)=\alpha>0$，则称A以α的程度发生了。

定义7 设$A,B\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$是概率测度空间$(U,\mathscr{A},P)$上的模糊随机事件，若对$\forall x\in U$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)\leqslant 1$，则称$A$与$B$弱不相容。

若$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且当$i\neq j$时，$A_i,A_j$弱不相容，则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两弱不相容。

4 模糊随机事件的概率

4.1 模糊随机事件概率的定义

由定义4、定义5可知，对任意的$A=\{(x,\mu_A(x))\mid x\in U\}\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，函数$\mu_A(x)$是$U$上的连续函数。下面给出关于模糊随机事件概率的定义。

定义8 设A是概率测度空间$(U,\mathscr{A},P)$上的一个模糊随机事件，定义A发生的概率为：

$$P(A)=\int_U\mu_A(x)\mathrm{d}P$$

定义8中的积分为概率测度空间上的抽象积分，下面定义$(U,\mathscr{A},P)$上随机变量关于模糊随机事件的概率分布函数。

定义9 设X是概率测度空间(U,A,P)上的一个模糊随机变量，A是$(U,\mathscr{A},P)$上的一个模糊随机事件，定义X取值于A(即$A(X)>0$，记为$X\in A$)的概率为：

$$P(X\in A)=\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x$$

其中，$f(x)$为X的概率密度函数。

注意：定义9中的积分指的是U上的黎曼积分。

例1 随机选取一群学生，根据他们的综合成绩来评价学生属于某一类学生，综合成绩的分数范围为$[0,100]$，评价学生的类别划分为$U=\{$差，中，良，优$\}$，用A_1,A_2,A_3,A_4分别表示模糊概念差、中、良、优，且各模糊概念的隶属函数定义为：

$$\mu_{A_1}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 30\\ \dfrac{50-x}{20}, & 30<x\leqslant 50\\ 0, & 50<x\leqslant 100\end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 30,70<x\leqslant 100\\ \dfrac{x-30}{20}, & 30<x\leqslant 50\\ \dfrac{70-x}{20}, & 50<x\leqslant 70\end{cases}$$

$$\mu_{A_3}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50,90<x<100\\ \dfrac{x-50}{20}, & 50<x\leqslant 70\\ \dfrac{90-x}{20}, & 70<x\leqslant 90\end{cases}$$

$$\mu_{A_4}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 70\\ \dfrac{x-70}{20}, & 70<x\leqslant 90\\ 1, & 90<x\leqslant 100\end{cases}$$

学生的综合成绩服从正态分布$(80,36)$，即$f(x)=\dfrac{1}{6\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-80)^2}{72}}$，则随机抽中学生的成绩为差的概率为：$P(A_1)=\int_U\mu_{A_1}(x)f(x)\mathrm{d}x\approx 0.0005$。随机抽中学生的成绩为中等的概率为：$P(A_2)=\int_U\mu_{A_2}(x)f(x)\mathrm{d}x\approx 0.0059$。随机抽中学生的成绩为良的概率为：$P(A_3)=\int_U\mu_{A_3}(x)f(x)\mathrm{d}x\approx 0.494$。随机抽中学生的成绩为优的概率为：$P(A_4)=\int_U\mu_{A_4}(x)f(x)\mathrm{d}x\approx 0.4996$。

设随机抽中学生的成绩为很优秀的模糊随机事件为$A=A_4^2$，则$P(A)=P(A_4^2)=\int_U(\mu_{A_4}(x))^2f(x)\mathrm{d}x\approx 0.3251$。

4.2 模糊随机事件概率的性质

定理7 设$(U,\mathscr{A},P)$是概率测度空间，对$\forall A,B\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，有：

(1)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，$P(\varnothing)=0$且$P(\varnothing)=1$；

(2)对$\forall A\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，当强否定算子取$N(a)=1-a$时，$P(A^N)=1-P(A)$；

(3)对$\forall A\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，若$r\geqslant 1$，则$P(A^r)\leqslant P(A)$，若$r\leqslant 1$，则$P(A^r)\geqslant P(A)$；

(4)对$\forall A,B\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，且$A\subseteq B$，则$P(A)\leqslant P(B)$；

(5)对$\forall A,B\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，当模糊算子取Minimum(Maximum)，Product(Probabilistic sum)，Lukasiewicz时，有$P(A\cup_{\oplus}B)=P(A)+P(B)-P(A\cap_{\otimes}B)$，特别地，当$A\cap_{\otimes}B=\varnothing$时，有$P(A\cup_{\oplus}B)=P(A)+P(B)$；

(6) 对 $\forall A,B\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，当模糊算子取 Drasticproduct (Drastic sum) 算子时，对 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)\leqslant 1$，有 $P(A\cup_{\oplus_D}B)\geqslant P(A)+P(B)-P(A\cap_{\otimes_D}B)$；

当 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)>1$ 时，有 $P(A\cup_{\oplus_D}B)<P(A)+P(B)-P(A\cap_{\otimes_D}B)$；

(7) 对 $\forall A,B\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，当模糊算子取 Nilpotent minimum (Nilpotent maximum) 算子时，对 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)\leqslant 1$，即 A 与 B 弱不相容，则 $P(A\cup_{\oplus^{nM}}B)\leqslant P(A)+P(B)-P(A\cap_{\otimes^{nM}}B)$；

当 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)>1$ 时，$P(A\cup_{\oplus^{nM}}B)\geqslant P(A)+P(B)-P(A\cap_{\otimes^{nM}}B)$。

证明：(1) 由定义 9 知，显然成立；

(2) 由定义 9 可知：

$$\begin{aligned}P(A^N)&=\int_U(1-\mu_A(x))f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_U 1f(x)\mathrm{d}x-\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x\\&=1-P(A)\end{aligned}$$

(3) 对 $\forall x\in U$，$0\leqslant\mu_A(x)\leqslant 1$，且 $r\in\mathbb{R}^+$，所以当 $r\geqslant 1$ 时，一定有 $P(A^r)\leqslant P(A)$，当 $r\leqslant 1$ 时，一定有 $P(A^r)\geqslant P(A)$；

(4) 当 $\forall A,B\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，且 $A\subseteq B$ 时，有 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$，则 $P(A)\leqslant P(B)$；

(5) 当模糊算子取 Minimum (Maximum) 时：

$$\begin{aligned}&P(A\cup_{\otimes_M}B)+P(A\cap_{\otimes_M}B)\\&\quad=\int_U(\mu_A(x)\cup_{\otimes_M}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x+\int_U(\mu_A(x)\cap_{\otimes_M}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=P(A)+P(B)\end{aligned}$$

当 $A\cap_{\otimes_M}B=\varnothing$ 时，有 $P(A\cap_{\otimes_M}B)=0$，所以 $P(A\cup_{\oplus_M}B)=P(A)+P(B)$；

当模糊算子取 Product (Probabilistic sum) 时：

$$\begin{aligned}&P(A\cup_{\otimes_P}B)+P(A\cap_{\otimes_P}B)\\&\quad=\int_U(\mu_A(x)\cup_{\otimes_P}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x+\int_U(\mu_A(x)\cap_{\otimes_P}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=\int_U[(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x))+\mu_A(x)\mu_B(x)]f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_U\mu_B(x)f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=P(A)+P(B)\end{aligned}$$

当 $A\cap_{\otimes_P}B=\varnothing$ 时，有 $P(A\cap_{\otimes_P}B)=0$，所以 $P(A\cup_{\oplus_P}B)=P(A)+P(B)$；

当模糊算子取 Lukasiewicz 时：

$$\begin{aligned}&P(A\cup_{\otimes_L}B)+P(A\cap_{\otimes_L}B)\\&\quad=\int_U(\mu_A(x)\cup_{\otimes_L}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x+\int_U(\mu_A(x)\cap_{\otimes_L}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=\int_U(\min\{\mu_A(x)+\mu_B(x),1\}+\max\{\mu_A(x)+\mu_B(x)-1,0\}f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_U\mu_B(x)f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=P(A)+P(B)\end{aligned}$$

当 $A\cap_{\otimes_L}B=\varnothing$ 时，有 $P(A\cap_{\otimes_L}B)=0$，所以 $P(A\cup_{\oplus_L}B)=P(A)+P(B)$；

(6) 当模糊算子取 Drastic product (Drastic sum) 时，对 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)\leqslant 1$，有：

$$\begin{aligned}&P(A\cup_{\otimes_D}B)+P(A\cap_{\otimes_D}B)\\&\quad=\int_U(\mu_A(x)\cup_{\otimes_D}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x+\int_U(\mu_A(x)\cap_{\otimes_D}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x\\&\quad\geqslant\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_U\mu_B(x)f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=P(A)+P(B)\end{aligned}$$

对 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)>1$，有：

$$\begin{aligned}&P(A\cup_{\otimes_D}B)+P(A\cap_{\otimes_D}B)\\&\quad=\int_U(\mu_A(x)\cup_{\otimes_D}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x+\int_U(\mu_A(x)\cap_{\otimes_D}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x\\&\quad\geqslant\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_U\mu_B(x)f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=P(A)+P(B)\end{aligned}$$

式(6)成立。

(7) 当模糊算子取 Nilpotent minimum (Nilpotent maximum) 时，对 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)\leqslant 1$，有：

$$\begin{aligned}&P(A\cup_{\otimes^{nM}}B)+P(A\cap_{\otimes_{nM}}B)\\&\quad=\int_U(\mu_A(x)\cup_{\otimes^{nM}}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x+\int_U(\mu_A(x)\cap_{\otimes^{nM}}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=\int_U\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}f(x)\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_U\mu_B(x)f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=P(A)+P(B)\end{aligned}$$

对 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)+\mu_B(x)>1$，有：

$$\begin{aligned}&P(A\cup_{\otimes^{nM}}B)+P(A\cap_{\otimes_{nM}}B)\\&\quad=\int_U(\mu_A(x)\cup_{\otimes^{nM}}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x+\int_U(\mu_A(x)\cap_{\otimes^{nM}}\mu_B(x))f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=\int_U 1f(x)\mathrm{d}x+\int_U\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}f(x)\mathrm{d}x\\&\quad\geqslant\int_U\mu_A(x)f(x)\mathrm{d}x+\int_U\mu_B(x)f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=P(A)+P(B)\end{aligned}$$

式(7)成立。

在模糊集合与经典集合相互转化中有一个重要的概念是模糊集的截集，这一概念可以将模糊集转换成经典集，从而在模糊集与经典集之间构建起相互联系的桥梁，由此可以研究经典事件的概率与模糊随机事件的概率之间的关系。

定义 10 设 $(U,\mathscr{A},P)$ 为概率测度空间，$\forall A\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，$\alpha\in[0,1]$，则模糊随机事件 A 的 α 截集发生的概率为：

$$P(A_\alpha)=\int_{A_\alpha}f(x)\mathrm{d}x=\int_U\chi_{A_\alpha}(x)f(x)\mathrm{d}x$$

表示发生程度大于等于 α 的经典随机事件发生的概率。

由定义 10 及模糊集截集的性质可知：

定理 8 设 $(U,\mathscr{A},P)$ 为概率测度空间，$\forall A,B\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$ 是

模糊随机事件，$\alpha,\beta\in[0,1]$，则：

(1)$\alpha<\beta\Rightarrow P(A_{\bar{\beta}})\leqslant P(A_\beta)\leqslant P(A_{\bar{\alpha}})\leqslant P(A_\alpha)$；

(2)$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1],P(A_\alpha)\leqslant P(B_\alpha)$；

(3)$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1],P(A_{\bar{\alpha}})\leqslant P(B_{\bar{\alpha}})$；

(4)$A=B\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1],P(A_\alpha)=P(B_\alpha)$；

(5)$A=B\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1],P(A_{\bar{\alpha}})=P(B_{\bar{\alpha}})$。

证明：(1)由定理6可知$A_{\bar{\beta}}\subseteq A_\beta\subseteq A_{\bar{\alpha}}\subseteq A_\alpha$，则由定义10知$P(A_{\bar{\beta}})\leqslant P(A_\beta)\leqslant P(A_{\bar{\alpha}})\leqslant P(A_\alpha)$；

(2)设$A\subseteq B$，则$\forall\alpha\in[0,1],x\in A_\alpha\Rightarrow\mu_A(x)\geqslant\alpha\Rightarrow\mu_B(x)\geqslant\mu_A(x)\geqslant\alpha\Rightarrow x\in B_\alpha$，即$A_\alpha\subseteq B_\alpha$，则由定义10知$P(A_\alpha)\leqslant P(B_\alpha)$；

设$\forall\alpha\in[0,1],P(A_\alpha)\leqslant P(B_\alpha)$，由定义9可知，对$\forall x\in U$，有$A_\alpha\subseteq B_\alpha$；

如果$A\subseteq B$不成立，则至少存在一点$x_0\in U$使得$\mu_A(x_0)>\mu_B(x_0)$，可知存在α_0，使得$\mu_A(x_0)\geqslant\alpha_0>\mu_B(x_0)$，则有$x_0\in A_{\alpha_0}$，但$x_0\notin B_{\alpha_0}$，这与假设矛盾，所以$A\subseteq B$，(2)成立；

(3)设$A\subseteq B$，则$\forall\alpha\in[0,1],x\in A_{\bar{\alpha}}\Rightarrow\mu_A(x)>\alpha\Rightarrow\mu_B(x)\geqslant\mu_A(x)>\alpha\Rightarrow x\in B_{\bar{\alpha}}$，即$A_{\bar{\alpha}}\subseteq B_{\bar{\alpha}}$，则由定义10知$P(A_{\bar{\alpha}})\leqslant P(B_{\bar{\alpha}})$；

设$\forall\alpha\in[0,1],P(A_{\bar{\alpha}})\leqslant P(B_{\bar{\alpha}})$，由定义9可知，对$\forall x\in U$，有$A_{\bar{\alpha}}\subseteq B_{\bar{\alpha}}$；

如果$A\subseteq B$不成立，则至少存在一点$x_0\in U$使得$\mu_A(x_0)>\mu_B(x_0)$，可知存在α_0，使得$\mu_A(x_0)>\alpha_0\geqslant\mu_B(x_0)$，则有$x_0\in A_{\bar{\alpha}_0}$，但$x_0\notin B_{\bar{\alpha}_0}$，这与假设矛盾，所以$A\subseteq B$，(3)成立；

(4)设$A=B$，即$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则由(2)可知(4)成立；

(5)设$A=B$，即$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则由(3)可知(5)成立。

由定义9可知，对$\forall A\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，$\forall\alpha\in[0,1]$，可得$P(A)\geqslant P_\alpha(A)$，当且仅当$\alpha=0$时取等号。

定义11 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$\forall A,B\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且$P(B)>0$，对$\forall A\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$，记

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap_\otimes B)}{P(B)}$$

则称$P(A|B)$为模糊随机事件B发生条件下模糊随机事件A发生的条件概率。

定理9 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U,\varnothing,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes_M},\cup_{\oplus_M})$型模糊隶属空间时，有：

$$\sum_{i=1}^n P(A_i)\geqslant P(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_M}A_i)\geqslant\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_M}P(A_i)$$

证明：因为$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两弱不相容，从而有：

$$\sum_{i=1}^n\mu_{A_i}(x)\geqslant\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_M}\mu_{A_i}(x)$$

由定义9及Minimum(Maximum)模糊算子的定义可得：

$$\begin{aligned}&\int_U(\sum_{i=1}^n\mu_{A_i}(x))f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^n\int_U\mu_{A_i}(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n P(A_i)\\&\geqslant\int_U(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_M}\mu_{A_i}(x))f(x)\mathrm{d}x=P(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_M}A_i)\\&\geqslant\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_M}\int_U\mu_{A_i}(x)f(x)\mathrm{d}x=\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_M}P(A_i)\end{aligned}$$

如文中的例1可知：$\sum_{i=1}^4 P(A_i)=1$，$\bigcup_{i=1}^4{}_{\oplus_M}P(A_i)\approx0.4996$，$P(\bigcup_{i=1}^4{}_{\oplus_M}A_i)\approx0.7212$。

定理10 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U,\varnothing,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes_P},\cup_{\oplus_P})$型模糊隶属空间时，有：

$$\sum_{i=1}^n P(A_i)\geqslant P(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_P}A_i)\geqslant\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_P}P(A_i)$$

证明：因为$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两弱不相容，从而有：

$$\sum_{i=1}^n\mu_{A_i}(x)\geqslant\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_P}\mu_{A_i}(x)$$

由定义9及Product(Probabilistic sum)模糊算子的定义可得：

$$\begin{aligned}&\int_U(\sum_{i=1}^n\mu_{A_i}(x))f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^n\int_U\mu_{A_i}(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n P(A_i)\\&\geqslant\int_U(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_P}\mu_{A_i}(x))f(x)\mathrm{d}x=P(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_P}A_i)\\&\geqslant\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_P}\int_U\mu_{A_i}(x)f(x)\mathrm{d}x=(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_P}PA_i)\end{aligned}$$

如文中的例1可知：$\sum_{i=1}^4 P(A_i)=1$，$\bigcup_{i=1}^4{}_{\oplus_P}P(A_i)\approx0.7484$，$P(\bigcup_{i=1}^4{}_{\oplus_P}A_i)\approx0.9024$。

定理11 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U,\varnothing,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes_L},\cup_{\oplus_L})$型模糊隶属空间，且$A_1\cup_{\oplus_L}A_2\cup_{\oplus_L}\cdots\cup_{\oplus_L}A_n=U$时，有：

$$\sum_{i=1}^n P(A_i)=P(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_L}A_i)=\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_L}P(A_i)$$

证明：因为$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两弱不相容，且$A_1\cup_{\oplus_L}A_2\cup_{\oplus_L}\cdots\cup_{\oplus_L}A_n=U$，由Lukasiewicz算子的定义有：

$$\sum_{i=1}^n\mu_{A_i}(x)=\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_L}\mu_{A_i}(x)$$

由定义9可得：

$$\begin{aligned}&\int_U(\sum_{i=1}^n\mu_{A_i}(x))f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^n\int_U\mu_{A_i}(x)f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n P(A_i)\\&=\int_U(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_L}\mu_{A_i}(x))f(x)\mathrm{d}x=P(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_L}A_i)\\&=\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_L}\int_U\mu_{A_i}(x)f(x)\mathrm{d}x=\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_L}P(A_i)\end{aligned}$$

如本文中的例1可知：$\sum_{i=1}^4 P(A_i)=1$，$\bigcup_{i=1}^4{}_{\oplus_L}P(A_i)=1$，$P(\bigcup_{i=1}^4{}_{\oplus_L}A_i)=1$。

定理12 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U,\varnothing,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes_D},\cup_{\oplus_D})$型模糊隶属空间时，有：

$$\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_D}P(A_i)\geqslant P(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_D}A_i)\geqslant\sum_{i=1}^n P(A_i)$$

证明：因为$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两弱不相容，由Drastic product(Drastic sum)算子的定义有：

$$\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_D}\mu_{A_i}(x)\geqslant\sum_{i=1}^n\mu_{A_i}(x)$$

由定义9可得：

$$\begin{aligned}&\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_D}\int_U\mu_{A_i}(x)f(x)\mathrm{d}x=\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_D}P(A_i)\\&\geqslant\int_U(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_D}\mu_{A_i}(x))f(x)\mathrm{d}x=P(\bigcup_{i=1}^n{}_{\oplus_D}A_i)\\&\geqslant\int_U(\sum_{i=1}^n\mu_{A_i}(x))f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n\int_U\mu_{A_i}(x)f(x)\mathrm{d}x=\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

如文中例 1 可知，当模糊随机事件取 A_1, A_2, A_3 时，有：$\bigcup_{i=1}^{3}{}_{\oplus_D} P(A_i)=1, P(\bigcup_{i=1}^{3}{}_{\oplus_D} A_i)=0.9522, \sum_{i=1}^{3} P(A_i)=0.5004$。

定理 13 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U, \emptyset, r\in \mathbb{R}^+, N, \bigcap_{\otimes^{nM}}, \bigcup_{\oplus^{nM}})$型模糊隶属空间时，有：

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \geqslant P(\bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}} A_i) \geqslant \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}} P(A_i)$$

证明：因为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两弱不相容，由 Nilpotent minimum(Nilpotent maximum)模糊算子的定义有：

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x) \geqslant \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}} \mu_{A_i}(x)$$

由定义 9 可得：

$$\begin{aligned}&\int_U (\sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x)) f(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_U \mu_{A_i}(x) f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \\ &\geqslant \int_U (\bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}} \mu_{A_i}(x)) f(x)\mathrm{d}x = P(\bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}} A_i) \\ &\geqslant \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}} \int_U \mu_{A_i}(x) f(x)\mathrm{d}x = \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}} \mu_{A_i} P(A_i)\end{aligned}$$

如本文中的例 1 可知：$\sum_{i=1}^{4} P(A_i)=1, \bigcup_{i=1}^{4}{}_{\oplus^{nM}} P(A_i) \approx 0.4996, P(\bigcup_{i=1}^{4}{}_{\oplus^{nM}} A_i) \approx 0.7212$。

定理 14 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且 $P(A_1 \bigcap_\otimes A_2 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_n)>0$，则：

$$P(A_1 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_{n-1})$$

证明：因为 $P(A_1) \geqslant P(A_1 \bigcap_\otimes A_2) \geqslant \cdots \geqslant P(A_1 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_{n-1}) \geqslant P(A_1 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_n)$，所以公式右端的条件概率都有意义。

当 $n=2$ 时，由定义 11 可知，公式成立；

设 $n=k$ 当时公式成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&P(A_1 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_{k+1}) \\ &= P(A_1 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_k) P(A_{k+1}|A_1 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_k) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_k|A_1 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_{k-1}) P(A_{k+1}| \\ &\quad A_1 \bigcap_\otimes \cdots \bigcap_\otimes A_k)\end{aligned}$$

依归纳法原理知公式成立。

定理 15 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U, \emptyset, r\in \mathbb{R}^+, N, \bigcap_{\otimes_M}, \bigcup_{\oplus_M})$型模糊隶属空间，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus_M} A_2 \bigcup_{\oplus_M} \cdots \bigcup_{\oplus_M} A_n = U$ 时，对 $\forall A \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$，有：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)$$

证明：因为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两弱不相容，且 $P(A_i)>0 (i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus_M} A_2 \bigcup_{\oplus_M} \cdots \bigcup_{\oplus_M} A_n = U$，可得 $A = A \bigcap_{\otimes_M} (A_1 \bigcup_{\oplus_M} \cdots \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus_M} A_n) = \bigcup_{\oplus_M} (A \bigcap_{\otimes_M} A_i)$，由定理 9：

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \bigcap_{\otimes_M} (A_1 \bigcup_{\oplus_M} \cdots \bigcup_{\oplus_M} A_n)) \\ &= P(\bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus_M} (A \bigcap_{\otimes_M} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} (A \bigcap_{\otimes_M} A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)\end{aligned}$$

定理 16 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U, \emptyset, r\in \mathbb{R}^+, N, \bigcap_{\otimes_P}, \bigcup_{\oplus_P})$型模糊隶属空间，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus_P} A_2 \bigcup_{\oplus_P} \cdots \bigcup_{\oplus_P} A_n = U$ 时，对 $\forall A \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$，有：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)$$

证明：因为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两弱不相容，且 $P(A_i)>0 (i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus_P} A_2 \bigcup_{\oplus_P} \cdots \bigcup_{\oplus_P} A_n = U$，可得 $A = A \bigcap_{\otimes_P} (A_1 \bigcup_{\oplus_P} \cdots \bigcup_{\oplus_P} A_n) = \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus_P} (A \bigcap_{\otimes_P} A_i)$，由定理 10：

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \bigcap_{\otimes_P} (A_1 \bigcup_{\oplus_P} \cdots \bigcup_{\oplus_P} A_n)) \\ &= P(\bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus_P} (A \bigcap_{\otimes_P} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} (A \bigcap_{\otimes_P} A_i) = \\ &\quad \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)\end{aligned}$$

定理 17 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U, \emptyset, r\in \mathbb{R}^+, N, \bigcap_{\otimes_L}, \bigcup_{\oplus_L})$型模糊隶属空间，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus_L} A_2 \bigcup_{\oplus_L} \cdots \bigcup_{\oplus_L} A_n = U$ 时，对 $\forall A \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$：

$$P(A) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)$$

证明：因为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两弱不相容，且 $P(A_i)>0 (i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus_L} A_2 \bigcup_{\oplus_L} \cdots \bigcup_{\oplus_L} A_n = U$，可得 $A = A \bigcap_{\otimes_L} (A_1 \bigcup_{\oplus_L} \cdots \bigcup_{\oplus_L} A_n) \geqslant \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus_L} (A \bigcap_{\otimes_L} A_i)$，由定理 11 可知：

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \bigcap_{\otimes_L} (A_1 \bigcup_{\oplus_L} A_2 \bigcup_{\oplus_L} \cdots \bigcup_{\oplus_M} A_n)) \\ &\geqslant P(\bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus_L} (A \bigcap_{\otimes_L} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} (A \bigcap_{\otimes_M} A_i) = \\ &\quad \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)\end{aligned}$$

定理 18 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U, \emptyset, r\in \mathbb{R}^+, N, \bigcap_{\otimes_D}, \bigcup_{\oplus_D})$型模糊隶属空间，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus_D} A_2 \bigcup_{\oplus_D} \cdots \bigcup_{\oplus_D} A_n = U$ 时，对 $\forall A \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$：

$$P(A) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)$$

证明：因为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两弱不相容，且 $P(A_i)>0 (i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus_D} A_2 \bigcup_{\oplus_D} \cdots \bigcup_{\oplus_D} A_n = U$，可得 $A = A \bigcap_{\otimes_D} (A_1 \bigcup_{\oplus_D} \cdots \bigcup_{\oplus_D} A_n) \geqslant \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus_D} (A \bigcap_{\otimes_D} A_i)$，由定理 12：

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \bigcap_{\otimes_D} (A_1 \bigcup_{\oplus_D} A_2 \bigcup_{\oplus_D} \cdots \bigcup_{\oplus_D} A_n)) \\ &\geqslant P(\bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus_D} (A \bigcap_{\otimes_D} A_i)) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A \bigcap_{\otimes_D} A_i) = \\ &\quad \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)\end{aligned}$$

定理 19 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，则当$\mathscr{F}(\widetilde{U})$为$(U, \emptyset, r\in \mathbb{R}^+, N, \bigcap_{\otimes^{nM}}, \bigcup_{\oplus^{nM}})$型模糊隶属空间，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus^{nM}} A_2 \bigcup_{\oplus^{nM}} \cdots \bigcup_{\oplus^{nM}} A_n = U$ 时，对 $\forall A \in \mathscr{F}(\widetilde{U})$，有：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)$$

证明：因为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两弱不相容，且 $P(A_i)>0 (i=1,2,\cdots,n)$，$A_1 \bigcup_{\oplus^{nM}} A_2 \bigcup_{\oplus^{nM}} \cdots \bigcup_{\oplus^{nM}} A_n = U$，可得 $A = A \bigcap_{\otimes^{nM}} (A_1 \bigcup_{\oplus^{nM}} \cdots \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}} A_n) = \bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}} (A \bigcap_{\otimes^{nM}} A_i)$，由定理 13 可知：

$$P(A)=P(A\cap_{\otimes^{nM}}(A_1\cup_{\oplus^{nM}}\cdots\cup_{\oplus^{nM}}A_n))$$
$$=P(\bigcup_{i=1}^{n}{}_{\oplus^{nM}}(A\cap_{\otimes^{nM}}A_i))=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap_{\otimes^{nM}}A_i)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(A|A_i)$$

定理 20 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\tilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，当$\mathscr{F}(\tilde{U})$为$(U,\emptyset,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes_M},\cup_{\oplus_M})$型或$(U,\emptyset,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes_P},\cup_{\oplus_P})$型或$(U,\emptyset,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes^{nM}},\cup_{\oplus^{nM}})$型模糊隶属空间，且$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$A_1\cup_{\oplus}A_2\cup_{\oplus}\cdots\cup_{\oplus}A_n=U$时，则对$\forall A\in\mathscr{F}(\tilde{U})$，若$P(A)>0$，有：

$$P(A_i|A)=\frac{P(A_i)P(A|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(A|A_j)}$$

证明：因为

$$P(A_i|A)=\frac{P(A_i\cap_{\otimes}A)}{P(A)}$$

再根据定理 14－16 及定理 19 可知定理 20 成立。

定理 21 设$(U,\mathscr{A},P)$为概率测度空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}(\tilde{U})$是模糊随机事件，且两两弱不相容，当$\mathscr{F}(\tilde{U})$为$(U,\emptyset,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes_L},\cup_{\oplus_L})$型或$(U,\emptyset,r\in\mathbb{R}^+,N,\cap_{\otimes_D},\cup_{\oplus_D})$型模糊隶属空间，且$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$A_1\cup_{\oplus}A_2\cup_{\oplus}\cdots\cup_{\oplus}A_n=U$时，则对$\forall A\in\mathscr{F}(\tilde{U})$，若$P(A)>0$，有：

$$P(A_i|A)\geqslant\frac{P(A_i)P(A|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(A|A_j)}$$

证明：因为

$$P(A_i|A)=\frac{P(A_i\cap_{\otimes}A)}{P(A)}$$

再根据定理 14、定理 17－18 可知定理 21 成立。

结束语 本文在公理化模糊集合的框架之下，基于模糊划分，将连续的随机变量离散化，定义了模糊随机事件（本文所讨论的模糊随机事件是指定义在连续随机模型的样本空间上的公理化模糊集合），并在此基础之上建立模糊随机事件的概率测度空间，给出模糊随机事件的乘法公式，并证明了全概率公式及贝叶斯公式，为完善模糊随机理论的研究奠定了一定的基础。下一步将根据模糊随机变量，来研究模糊随机事件的数字特征。

参 考 文 献

[1] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8(1): 338-353.

[2] ZADEH L A. Probability measures of Fuzzy events[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 23(2): 421-427.

[3] KWAHERNAAK H. Fuzzy random variables—I. Definitions and theorems[J]. Information Sciences, 1978, 15(1): 1-29.

[4] KWAHERNAAK H. Fuzzy random variables—II. Algorithms and examples for the discrete case[J]. Information Sciences, 1979, 17(3): 253-278.

[5] YAGER R, RONALD. A note on probabilities of fuzzy events [J]. Information Sciences, 1979, 18(2): 113-129.

[6] SMETS P. Probability of a fuzzy event: An axiomatic approach [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1982, 7(2): 153-164.

[7] KATO Y, IZUKA T, OHTSUKI R, et al. A proposal for a new fuzzy probability distribution function[C]// IEEE International Fuzzy Systems Conference. IEEE, 1999.

[8] HABIL E D, NASR T Z. On fuzzy probability theory[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2002, 41(4): 791-810.

[9] FANG Y. Fuzzy probability theory[D]. Xi'an: Northwest University, 2005.

[10] MESIAR R. Fuzzy sets and probability theory [J]. Tatra Mountains Math Publ, 1992, 1: 105-123.

[11] LIANG, SONG P. What does a probabilistic interpretation of fuzzy sets mean [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 4(2): 200-205.

[12] MEGHDADI A H, AKBARZADEH-T M R. Probabilistic fuzzy logic and probabilistic fuzzy systems[J]. Proc 10th IEEE Int Conf, 2001, 3(1): 1127-1130.

[13] COLUBI A, FERNANDEZ-GARCIA C, GIL M A. Simulation of random fuzzy variables: an empirical approach to statistical probabilistic studies with fuzzy experimental data[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2003, 10(3): 384-390.

[14] LIU Y X. The Research on Fuzzy Probability Theory Based on Fuzzy Events[D]. Shenyang: Northeastern University, 2013.

[15] PAVLA R, ONDREJ P. Probabilities of fuzzy events and their use in decision matrices[J]. International Journal of Mathematics in Operational Research, 2016, 9(4): 423-435.

[16] WANG G, XU Y, QIN S. Basic Fuzzy Event Space and Probability Distribution of Probability Fuzzy Space[J]. Mathematics, 2019, 7(6): 542.

[17] WANG J. Membership function and statistical evaluation of fuzzy probability[D]. Harbin: Northeast Forestry University, 2020.

[18] PAN X D, XU Y. Redefinition of the concept of fuzzy set based on vague partition from the perspective of axiomatization[J]. Soft Computing: A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, 2018, 22(6): 1777-1789.

[19] PAN X D, XU Y. Correction to: Redefinition of the concept of fuzzy set based on vague partition from the perspective of axiomatization[J]. Soft Computing: A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, 2018, 22(6): 2079-2079.

[20] PAN X D. On the Axiomatic Definition of Fuzzy Sets[J]. Mathematics In Practice And Theory. 2022, 52(3): 189-199.

[21] HU B Q. Basis of fuzzy theory[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2004.

XIE Jian-xiang, born in 1994, postgraduate. His main research interests include fuzzy probability and so on.

PAN Xiao-dong, born in 1979, associate professor. His main research interests include mathematical basic theory of fuzzy information processing.