



计算机科学

COMPUTER SCIENCE

基于一种新的q-rung orthopair模糊交叉熵的属性约简算法

王志强, 郑婷婷, 孙鑫, 李清

引用本文

王志强, 郑婷婷, 孙鑫, 李清. 基于一种新的q-rung orthopair模糊交叉熵的属性约简算法[J]. 计算机科学, 2022, 49(11A): 211200142-6.

WANG Zhi-qiang, ZHENG Ting-ting, SUN Xin, LI Qing. Attribute Reduction Algorithm Based on a New q-rung orthopair Fuzzy Cross Entropy [J]. Computer Science, 2022, 49(11A): 211200142-6.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[一种改进的特征选择算法在邮件过滤中的应用](#)

Application of Improved Feature Selection Algorithm in Spam Filtering

计算机科学, 2022, 49(11A): 211000028-5. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.211000028>

[基于边缘引导的自校正皮肤检测](#)

Edge Guided Self-correction Skin Detection

计算机科学, 2022, 49(11): 141-147. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.220600012>

[随机多尺度序决策系统的最优尺度选择](#)

Optimal Scale Selection in Random Multi-scale Ordered Decision Systems

计算机科学, 2022, 49(6): 172-179. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.220200067>

[基于逻辑博弈决策Petri网的应急决策建模与分析](#)

Modeling and Analysis of Emergency Decision Making Based on Logical Probability Game Petri Net

计算机科学, 2022, 49(4): 294-301. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210300224>

[一种基于正域的三支近似约简](#)

Three-way Approximate Reduction Based on Positive Region

计算机科学, 2022, 49(4): 168-173. <https://doi.org/10.11896/jsjcx.210500067>

基于一种新的 q -rung orthopair 模糊交叉熵的属性约简算法

王志强 郑婷婷 孙鑫 李清

安徽大学数学科学学院 合肥 230601

(3211632008@qq.com)

摘要 熵是刻画模糊集不确定性程度的一种重要手段。为了反映 q -rung orthopair 模糊集中隶属度与非隶属度力量对比所产生的模糊性,首先提出相关的得分函数。针对目前大多数 q -rung orthopair 模糊集的相似性度量的不足,提出了更符合人们直觉的 q -rung orthopair 模糊集交叉熵。目前对 q -rung orthopair 模糊信息系统的属性约简研究相对较少,通过性质讨论和理论证明,发现这种交叉熵可以较好地应用于 q -rung orthopair 模糊信息系统的属性约简,设计了相关的属性约简算法,并通过实例说明了这种算法的合理性。其次,给出了将普通信息系统转换为 q -rung orthopair 模糊信息系统的方法,最后通过计算 UCI 中多个数据库,验证了所提属性约简算法的合理性和有效性,为 q -rung orthopair 模糊信息系统数据预处理提供了新的思路。

关键词 q -rung orthopair 模糊集; J -散度; 信息系统; 交叉熵; 属性约简

中图分类号 TP18;O159

Attribute Reduction Algorithm Based on a New q -rung orthopair Fuzzy Cross Entropy

WANG Zhi-qiang, ZHENG Ting-ting, SUN Xin and LI Qing

School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China

Abstract Entropy is an important means to describe the degree of uncertainty of fuzzy sets. In order to reflect the ambiguity produced by the comparison between the membership degree and the non-membership degree in the q -rung orthopair fuzzy set, a related score function is first proposed. Taking into account the shortcomings of the similarity measures of most of the current q -rung orthopair fuzzy sets, a q -rung orthopair fuzzy set cross entropy is proposed, which is more in line with people's intuition. As there is relatively little research on attribute reduction of q -rung orthopair fuzzy information system at present, through property discussion and theoretical proof, it is found that this kind of cross entropy can be better applied to attribute reduction of q -rung orthopair fuzzy information system. The related attribute reduction algorithm is presented, and an example is given to illustrate the rationality of this algorithm. Secondly, a method to convert ordinary information system into q -rung orthopair fuzzy information system is given. Finally, the rationality and effectiveness of this method are verified by calculating multiple databases in UCI, which provides new ideas for q -rung orthopair fuzzy information system data preprocessing.

Keywords q -rung orthopair fuzzy set, J -divergence, Information system, Cross entropy, Attributes reduction

1 引言

Zadeh^[1]于1965年提出模糊集,他用隶属度 μ 描述现实生活中模糊的概念。1986年,Atanassov^[2]提出了直觉模糊集的理论。相对于Zadeh提出的经典模糊集,这种模糊集不仅考虑了研究对象的隶属度,还考虑了其非隶属度 ν ,且 $\mu + \nu \leq 1$;它可以提高处理模糊信息或不确定信息的灵活性和实用性。考虑到有些情况下隶属度和非隶属度之和可能超过1, Yager^[3]推广了直觉模糊集,提出了毕达哥拉斯模糊集的概念,要求 $\mu^2 + \nu^2 \leq 1$,扩大了隶属度和非隶属度的取值范围。进一步, Yager^[4]还提出了 q -rung orthopair 模糊集,这里 $\mu^q + \nu^q \leq 1$ 。相对于其他模糊集, q -rung orthopair 模糊集的隶属度和非隶属度的取值范围更广,可以得到对客观事物更加细腻刻画。本文的讨论主要都是在此模糊集的基础上展开的。

信息系统是人们收集、整理数据并做出相关决策的有力

工具。属性约简^[5-6]可以使信息系统在保持原有分类能力的基础上,尽可能简化^[7],进而提高数据应用效率。目前学者们提出了大量属性约简算法: Qian等^[8]运用粗糙集中的等价关系粒化构造了属性约简算法, Lin等^[9]运用邻域粗糙集中邻域粒化构造了数值属性约简, Ma等^[10]在决策粗糙集理论中提出了保持决策区域的近似约简, Chen等^[11]和 Zhang等^[12]也分别提出了并行属性约简算法,这些算法的不断提出,使得关于属性约简的研究不断趋于完善。在以上众多的属性约简算法中,数据之间关系的描述仍然建立在清晰集的基础之上,目标对象在属性约简过程中通过清晰集进行近似逼近。更多实际情境更适用模糊信息系统描述。对于直觉模糊信息系统属性约简的研究,国内外专家提出了很多行之有效的方法, Zhang和 Xu^[13]讨论了直觉模糊序信息系统的属性约简方法; Feng和 Li^[14]利用相似关系建立直觉模糊粗糙集模型,并基于最大一致块构建了辨识矩阵,依据该矩阵对直觉模糊

基金项目: 国家自然科学基金(61806001)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61806001).

通信作者: 郑婷婷(tt-zheng@163.com)

决策系统进行属性约简;Guo 等^[15]通过定义属性值贴近度函数,得到直觉模糊信息系统的可区分矩阵,并在此基础上实现直觉模糊信息系统的属性约简。交叉熵是熵理论中一个重要的概念,主要用于度量目标与测量值之间的差异性。Liu^[18]和 Wang^[19]提出了 q -rung orthopair 模糊交叉熵和 q -rung orthopair 模糊余弦度量,研究发现这些度量大多违反直觉,并且对某些模糊集没有较好的区分度。

本文介绍一种新的基于 J -散度的 q -rung orthopair 模糊交叉熵,在比较分析中论述该度量策略的优越性。考虑到学者们对 q -rung orthopair 模糊信息系统的属性约简的研究相对较少,我们着重研究基于新的 q -rung orthopair 模糊交叉熵的属性约简算法。

本文第 2 节介绍了模糊集和信息系统的相关理论;第 3 节介绍一种新的 q -rung orthopair 模糊交叉熵;第 4 节通过将这种交叉熵和多种已有度量方法进行比较分析,论述这种度量策略的优越性;第 5 节介绍基于新的 q -rung orthopair 模糊交叉熵的约简算法,通过定理 5.1 的证明说明其科学性;第 6 节通过实验分析,对 UCI 中多个数据库进行处理,并作相关的灵敏度分析,证明了本文所提的这种属性约简算法的合理性和有效性。本文主要创新点在于提出了一种性质较好的 q -rung orthopair 模糊交叉熵,并基于此交叉熵提出相关属性约简算法。

2 基本理论

本文所讨论 U 均为有限非空论域。

定义 1^[4] 设论域为 U ,称

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in U \}$$

为 U 上的一个 q -rung orthopair 模糊集(q -rung orthopair fuzzy set),其中 $\mu_A, \nu_A: U \rightarrow [0, 1]$ 为 U 上的两个函数,且 $0 \leq \mu_A^q(x) + \nu_A^q(x) \leq 1$ 。称 $\mu_A(x)$ 为元素 x 对于 A 的 q -rung orthopair 隶属度,称 $\nu_A(x)$ 为元素 x 对于 A 的 q -rung orthopair 非隶属度, $\pi_A(x) = (1 - \mu_A^q(x) - \nu_A^q(x))^{\frac{1}{q}}$ 为元素 x 对于 q -rung orthopair 模糊集 A 的犹豫度, U 上 q -rung orthopair 模糊集的全体记作 q -ROFSs(U)。

对于一个 q -rung orthopair 模糊集 A , $q=2$ 时 A 退化为毕达哥拉斯模糊集, $q=1$ 时 A 退化为直觉模糊集。不失一般性,本文统一取 $q=3$ 。

定义 2 设论域为 U , $S = (U, C \cup D, V, f)$ 是论域 U 上的决策信息系统,若对于 $\forall x_i \in U, a_j \in C \cup D$,有 $f(x_i, a_j) = \langle \mu_{a_j}(x_i), \nu_{a_j}(x_i) \rangle$,其中 $\langle \mu_{a_j}(x_i), \nu_{a_j}(x_i) \rangle$ 是 q -rung orthopair 模糊数(q -ROFN),则称 S 是 q -rung orthopair 模糊决策信息系统(q -ROFSDIS)。

定义 3 设 $A \in q$ -ROFSs(U),则

$$\xi_A(x) = \left(\frac{1 - \mu_A^q(x) + \nu_A^q(x)}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

为新的 q -rung orthopair 模糊集 A 的得分函数。

性质 1 设 $A, B \in q$ -ROFSs(U),有:

(1) 当 $|\mu_A^q(x) - \nu_A^q(x)| \leq |\mu_B^q(x) - \nu_B^q(x)|$ 时, $\xi_A(x) \leq \xi_B(x)$;

(2) 当 $A \subseteq B$ 时, $\xi_A(x) \leq \xi_B(x)$ 。

证明:由定义 3 显然得证。证毕。

3 一种新的 q -rung orthopair 模糊交叉熵

本文提出一种基于 J -散度的 q -rung orthopair 模糊交叉熵, J -散度是对 KL -散度的推广。设有两个两点分布 $(m, 1-m)$ 和 $(n, 1-n)$,其中 $m, n \in (0, 1)$, J -散度的定义如下:

$$\begin{aligned} J(m, n) &= H\left(\frac{m+n}{2}\right) - \frac{1}{2}H(m) - \frac{1}{2}H(n) \\ &= \frac{1}{2} \left[m \log_2 \frac{2m}{m+n} + (1-m) \log_2 \frac{2(1-m)}{2-m-n} + n \log_2 \frac{2n}{m+n} + (1-n) \log_2 \frac{2(1-n)}{2-m-n} \right] \end{aligned}$$

其中, $H(m)$ 为香农熵。

图 1 给出函数 $J(m, n)$ 的图像。可以得出 $J(m, n)$ 具有如下性质:

- (1) $J(m, n) = J(n, m)$ (对称性);
- (2) $0 \leq J(m, n) \leq 1$ (有界性), 其中 $J(m, n) = 0 \Leftrightarrow m = n$, $J(m, n) = 1 \Leftrightarrow m = 1 - n = 0$ 或 1;
- (3) $\sqrt{J(m, n)} + \sqrt{J(n, r)} \geq \sqrt{J(m, r)}$ (三角不等式)。

文献[16-17]中给出了以上 3 个性质的证明。

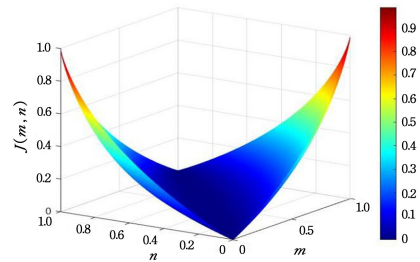


图 1 $J(m, n)$ 图像

Fig. 1 Image of $J(m, n)$

定义 4 设 $A, B \in q$ -ROFSs(U),则 A 与 B 之间的 q -rung orthopair 模糊交叉熵(q -ROFCE)的定义如下:

$$\begin{aligned} q\text{-ROFCE}(A, B) &= \sqrt{\frac{3}{3n_i-1}} \sum_{i=1}^n [J(\mu_A^q(x_i), \mu_B^q(x_i)) + J(\nu_A^q(x_i), \nu_B^q(x_i)) + J(\xi_A^q(x_i), \xi_B^q(x_i))]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned} &J(\mu_A^q(x_i), \mu_B^q(x_i)) \\ &= \frac{1}{2} \left[\mu_A^q(x_i) \log_2 \frac{2\mu_A^q(x_i)}{\mu_A^q(x_i) + \mu_B^q(x_i)} + (1 - \mu_A^q(x_i)) \log_2 \left[\frac{2(1 - \mu_A^q(x_i))}{2 - \mu_A^q(x_i) - \mu_B^q(x_i)} + \mu_B^q(x_i) \log_2 \frac{2\mu_B^q(x_i)}{\mu_A^q(x_i) + \mu_B^q(x_i)} + (1 - \mu_B^q(x_i)) \log_2 \frac{2(1 - \mu_B^q(x_i))}{2 - \mu_A^q(x_i) - \mu_B^q(x_i)} \right] \right] \\ &J(\nu_A^q(x_i), \nu_B^q(x_i)) \\ &= \frac{1}{2} \left[\nu_A^q(x_i) \log_2 \frac{2\nu_A^q(x_i)}{\nu_A^q(x_i) + \nu_B^q(x_i)} + (1 - \nu_A^q(x_i)) \log_2 \frac{2(1 - \nu_A^q(x_i))}{2 - \nu_A^q(x_i) - \nu_B^q(x_i)} + \nu_B^q(x_i) \log_2 \frac{2\nu_B^q(x_i)}{\nu_A^q(x_i) + \nu_B^q(x_i)} + (1 - \nu_B^q(x_i)) \log_2 \frac{2(1 - \nu_B^q(x_i))}{2 - \nu_A^q(x_i) - \nu_B^q(x_i)} \right] \\ &J(\xi_A^q(x_i), \xi_B^q(x_i)) \\ &= \frac{1}{2} \left[\xi_A^q(x_i) \log_2 \frac{2\xi_A^q(x_i)}{\xi_A^q(x_i) + \xi_B^q(x_i)} + (1 - \xi_A^q(x_i)) \log_2 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{2(1-\xi_A^q(x_i))}{2-\xi_A^q(x_i)-\xi_B^q(x_i)} + \xi_B^q(x_i) \log_2 \frac{2\xi_B^q(x_i)}{\xi_A^q(x_i)+\xi_B^q(x_i)} + (1-\xi_B^q(x_i)) \log_2 \frac{2(1-\xi_B^q(x_i))}{2-\xi_A^q(x_i)-\xi_B^q(x_i)} \Big]$$

性质 2 设 $A, B, C \in q\text{-ROFSs}(U)$, 则 $q\text{-ROFCE}$ 满足如下性质:

(1) $q\text{-ROFCE}(A, B) = q\text{-ROFCE}(B, A) = q\text{-ROFCE}(A^c, B^c) = q\text{-ROFCE}(B^c, A^c)$.

(2) $1 \leq q\text{-ROFCE}(A, B) \leq 1; q\text{-ROFCE}(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B; q\text{-ROFCE}(A, B) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in U, \langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ 或者 $\langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$.

(3) $q\text{-ROFCE}(A, B) + q\text{-ROFCE}(B, C) \geq q\text{-ROFCE}(A, C)$.

证明: 为了方便起见, 下列证明不妨设 $U = \{x\}$.

(1) 根据 J -散度可知 $q\text{-ROFCE}(A, B) = q\text{-ROFCE}(B, A)$ 是显然成立的. 由 $q\text{-ROFSs}$ 补集的定义以及 J -散度的形式可知 $q\text{-ROFCE}(A, B) = q\text{-ROFCE}(A^c, B^c)$ 也是显然成立的. 类似地, 其余结果可同样证得.

(2) 首先, 根据 J -散度的定义知 $0 \leq J(\mu_A^q(x), \mu_B^q(x)) \leq 1, 0 \leq J(\nu_A^q(x), \nu_B^q(x)) \leq 1, 0 \leq J(\xi_A^q(x), \xi_B^q(x)) \leq 1$, 因此 $0 \leq q\text{-ROFCE}(A, B) \leq 1$.

其次, $q\text{-ROFCE}(A, B) = 0 \Leftrightarrow J(\mu_A^q(x), \mu_B^q(x)) + J(\nu_A^q(x), \nu_B^q(x)) + J(\xi_A^q(x), \xi_B^q(x)) = 0; \Leftrightarrow J(\mu_A^q(x), \mu_B^q(x)) = 0; J(\nu_A^q(x), \nu_B^q(x)) = 0; J(\xi_A^q(x), \xi_B^q(x)) = 0; \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x); \nu_A(x) = \nu_B(x); \xi_A(x) = \xi_B(x); \Leftrightarrow A = B$.

最后证明 $q\text{-ROFCE}(A, B) = 1 \Leftrightarrow \langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ 或 $\langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$.

对于 $J(m, n)$, 由于 $J(m, n)$ 的对称性, 不妨设 $m, n \in [0, 1], m < n, t = n - m$, 则 $n = m + t$ 且 $t > 0$.

$$\text{令 } J(m, n) = f(m, t) = \frac{1}{2}$$

$$\left[m \log_2 \frac{2m}{2m+t} + (1-m) \log_2 \frac{2(1-m)}{2-2m-t} + (m+t) \log_2 \frac{2(m+t)}{2m+t} + (1-t-m) \log_2 \frac{2(1-t-m)}{2-2m-t} \right], \text{此时:}$$

$$\frac{\partial f(m, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{(m+t)(2-2m-t)}{(2m+t)(1-t-m)}$$

$$\frac{\partial f(m, t)}{\partial m} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{m(2-2m-t)}{(2m+t)(1-m)}$$

又因为:

$$\frac{(m+t)(2-2m-t)}{(2m+t)(1-t-m)} = \frac{n(2-m-n)}{(m+n)(1-n)} = \frac{2n-mn-n^2}{m+n-mn-n^2} > 1$$

$$\frac{m(2-2m-t)}{(2m+t)(1-m)} = \frac{m(2-m-n)}{(m+n)(1-m)} = \frac{2m-mn-m^2}{m+n-mn-m^2} < 1$$

所以 $\frac{\partial f(m, t)}{\partial t} > 0, \frac{\partial f(m, t)}{\partial m} < 0$. 说明 $f(m, t)$ 是关于 m 的减函数, 关于 t 的增函数, 从而 $f(m, t)$ 在其定义域内部没有驻点且处处可偏导, 其最值点必在边界处取得.

故 $J(\mu_A^q(x), \mu_B^q(x))$ 随着 $\min(\mu_A^q(x), \mu_B^q(x))$ 的增大而减小, 随着 $|\mu_A^q(x) - \mu_B^q(x)|$ 的增大而增大. 同理, $J(\nu_A^q(x), \nu_B^q(x))$ 随着 $\min(\nu_A^q(x), \nu_B^q(x))$ 的增大而减小, 随着 $|\nu_A^q(x) - \nu_B^q(x)|$ 的增大而增大; $J(\xi_A^q(x), \xi_B^q(x))$ 随着 $\min(\xi_A^q(x),$

$\xi_B^q(x))$ 的增大而减小, 随着 $|\xi_A^q(x) - \xi_B^q(x)|$ 的增大而增大.

根据 $q\text{-ROFSs}$ 的定义可知, 对任意 $A, B \in q\text{-ROFSs}(U), x \in U$, 均有: $0 \leq \mu_A^q(x) + \nu_A^q(x) \leq 1, 0 \leq \mu_B^q(x) + \nu_B^q(x) \leq 1, 0 \leq \xi_A^q(x), \xi_B^q(x) \leq 1$.

由 $q\text{-ROFCE}(A, B)$ 的对称性及以上分析可知, $q\text{-ROFCE}(A, B)$ 的最大值可能在 $\min(\mu_A^q(x), \mu_B^q(x)) = 0$, 或 $|\mu_A^q(x) - \mu_B^q(x)| = 1$, 或 $\min(\nu_A^q(x), \nu_B^q(x)) = 0$, 或 $|\nu_A^q(x) - \nu_B^q(x)| = 1$, 或 $\min(\xi_A^q(x), \xi_B^q(x)) = 0$, 或 $|\xi_A^q(x) - \xi_B^q(x)| = 1$ 这些边界处取得.

1) 当 $\min(\mu_A^q(x), \mu_B^q(x)) = 0$ 时, 不妨设 $\mu_A(x) = 0$, 则 $q\text{-ROFCE}(A, B) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[J(0, \mu_B^q(x)) + J(\nu_A^q(x), \nu_B^q(x)) + J\left(\frac{1+\nu_A^q(x)}{2}, \frac{1-\mu_B^q(x)+\nu_B^q(x)}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}}$. 根据 J -散度的性质: 此

时 $J(0, \mu_B^q(x))$ 随 $\mu_B(x)$ 增大而增大, 取 $\mu_B(x) = 1$, 则 $J(0, \mu_B^q(x))$ 达到最大值 1, 此时 $\nu_B(x) = 0$, 于是 $q\text{-ROFCE}(A, B) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[J(0, 1) + J(\nu_A^q(x), 0) + J\left(\frac{1+\nu_A^q(x)}{2}, 0\right) \right]^{\frac{1}{2}}$.

容易发现, 此时 $q\text{-ROFCE}(A, B)$ 是关于 $\nu_A(x)$ 的单调函数, 取 $\nu_A(x) = 1$ 时, $q\text{-ROFCE}(A, B)$ 取得最大值 1. 由于极值只在边界处取得, 则 $q\text{-ROFCE}(A, B)$ 在 $\langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ 时取得最大值 1.

2) 当 $|\mu_A^q(x) - \mu_B^q(x)| = 1$ 时, 不妨设 $\mu_A(x) = 0, \mu_B(x) = 1$, 此时 $\nu_B(x) = 0$. 与情况 1) 最终讨论结果一致, 从而可知 $q\text{-ROFCE}(A, B)$ 在 $\langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 时取得最大值 1.

3) 当 $\min(\nu_A^q(x), \nu_B^q(x)) = 0$ 时, 不妨设 $\nu_A(x) = 0$, 则 $q\text{-ROFCE}(A, B) = \frac{\sqrt{3}}{3} (J(\mu_A^q(x), \mu_B^q(x)) + J(0, \nu_B^q(x)) + J\left(\frac{1-\mu_A^q(x)}{2}, \frac{1-\mu_B^q(x)+\nu_B^q(x)}{2}\right))^{\frac{1}{2}}$. 根据 J -散度的性质:

此时 $J(0, \nu_B^q(x))$ 随 $\nu_B(x)$ 增大而增大, 类似于 1) 中讨论, $q\text{-ROFCE}(A, B)$ 在 $\langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ 时取得最大值 1.

4) 当 $|\nu_A^q(x) - \nu_B^q(x)| = 1$ 时, 不妨设 $\nu_A(x) = 0, \nu_B(x) = 1$. 此时 $\mu_B(x) = 0$, 则 $q\text{-ROFCE}(A, B) = \frac{\sqrt{3}}{3} (J(\mu_A^q(x), 0) + J(0, 1) + J\left(\frac{1-\mu_A^q(x)}{2}, 1\right))^{\frac{1}{2}}$.

此时 $q\text{-ROFCE}(A, B)$ 随 $\mu_A(x)$ 增大而增大, 取 $\mu_A(x) = 1$ 时, $q\text{-ROFCE}(A, B)$ 取得最大值 1. 此时 $\langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$.

5) 当 $\min(\xi_A^q(x), \xi_B^q(x)) = 0$ 时, 不妨设 $\xi_A(x) = 0$, 根据 $\xi_A(x)$ 的定义, 此时 $\mu_A(x) = 1, \nu_A(x) = 0$, 则 $q\text{-ROFCE}(A, B) = \frac{\sqrt{3}}{3} (J(1, \mu_B^q(x)) + J(0, \nu_B^q(x)) + J(0, \frac{1-\mu_B^q(x)+\nu_B^q(x)}{2}))^{\frac{1}{2}}$. 此时 $J(0, \nu_B^q(x))$ 随 $\nu_B(x)$ 增大而增大, 取 $\nu_B(x) = 1$, 则 $\mu_B(x) = 0, q\text{-ROFCE}(A, B)$ 取得最大值 1. 此时, $\langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$.

6) 当 $|\xi_A^q(x) - \xi_B^q(x)| = 1$ 时, 不妨设 $\xi_A(x) = 0, \xi_B(x) = 1$, 根据 $\xi(x)$ 的定义, $\mu_A(x) = 1, \nu_A(x) = 0, \mu_B(x) = 0, \nu_B(x) = 1$, 则 $q\text{-ROFCE}(A, B) = \frac{\sqrt{3}}{3} (J(1, 0) + J(0, 1) + J(0, 1))^{\frac{1}{2}} = 1$.

综上:当且仅当 $\langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 或 $\langle \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ 且 $\langle \mu_B(x), \nu_B(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ 时, q -ROFCE(A, B) 取得最大值 1。

(3) 设 $J(\mu_A^q(x), \nu_B^q(x)) = a, J(\mu_B^q(x), \nu_C^q(x)) = b, J(\mu_C^q(x), \nu_A^q(x)) = c, J(\nu_A^q(x), \nu_B^q(x)) = d, J(\nu_B^q(x), \nu_C^q(x)) = e, J(\nu_A^q(x), \nu_C^q(x)) = f, J(\xi_A^q(x), \xi_B^q(x)) = g, J(\xi_B^q(x), \xi_C^q(x)) = h, J(\xi_A^q(x), \xi_C^q(x)) = i$ 。那么, $0 \leq a, b, c, d, e, f, g, h, i \leq 1$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{c}, \sqrt{d} + \sqrt{e} \geq \sqrt{f}$, 和 $\sqrt{g} + \sqrt{h} \geq \sqrt{i}$ 。

$$\begin{aligned} & (\sqrt{ae} - \sqrt{db})^2 + (\sqrt{ah} - \sqrt{gb})^2 + (\sqrt{dh} - \sqrt{ge})^2 \geq 0 \\ & \Rightarrow ae + db + ah + gb + dh + ge \geq 2\sqrt{abde} + 2\sqrt{abgh} + 2\sqrt{dehg} \\ & \Rightarrow ae + db + ah + gb + dh + ge + ab + de + gh \geq ab + de + gh + 2\sqrt{abde} + 2\sqrt{abgh} + 2\sqrt{dehg} \\ & \Rightarrow (a+d+g)(b+e+h) \geq (\sqrt{ab} + \sqrt{de} + \sqrt{gh})^2 \\ & \Rightarrow \sqrt{(a+d+g)(b+e+h)} \geq (\sqrt{ab} + \sqrt{de} + \sqrt{gh}) \\ & \Rightarrow a+d+g+b+e+h+2\sqrt{(a+d+g)(b+e+h)} \geq \end{aligned}$$

$$q\text{-ROFCE}_2(A, B) = \sum_{i=1}^n \arccos \left(\frac{\mu_A^q(x_i)\mu_B^q(x_i) + \nu_A^q(x_i)\nu_B^q(x_i)}{\sqrt{\mu_A^{2q}(x_i) + \nu_A^{2q}(x_i)} \sqrt{\mu_B^{2q}(x_i) + \nu_B^{2q}(x_i)}} \right)$$

$$q\text{-ROFCE}_3(A, B) = \sum_{i=1}^n \arccos \left(\frac{\mu_A^q(x_i)\mu_B^q(x_i) + \nu_A^q(x_i)\nu_B^q(x_i) + \pi_A^q(x_i)\pi_B^q(x_i)}{\sqrt{\mu_A^{2q}(x_i) + \nu_A^{2q}(x_i) + \pi_A^{2q}(x_i)} \sqrt{\mu_B^{2q}(x_i) + \nu_B^{2q}(x_i) + \pi_B^{2q}(x_i)}} \right)$$

(3) q -rungorthopair 模糊余弦相似度量^[19]

$$q\text{-ROFCE}_1 = \sum_{i=1}^n \cos \left[\frac{\pi}{2} (\max\{\mu_A^q(x_i) - \mu_B^q(x_i), \nu_A^q(x_i) - \nu_B^q(x_i)\}) \right]$$

$$q\text{-ROFCE}_5 = \sum_{i=1}^n \cos \left[\frac{\pi}{4} (|\mu_A^q(x_i) - \mu_B^q(x_i)| + |\nu_A^q(x_i) - \nu_B^q(x_i)|) \right]$$

$$q\text{-ROFCE}_6 = \sum_{i=1}^n \cos \left[\frac{\pi}{2} (\max\{\mu_A^q(x_i) - \mu_B^q(x_i), \nu_A^q(x_i) - \nu_B^q(x_i), \pi_A^q(x_i) - \pi_B^q(x_i)\}) \right]$$

$$q\text{-ROFCE}_7 = \sum_{i=1}^n \cos \left[\frac{\pi}{4} (|\mu_A^q(x_i) - \mu_B^q(x_i)| + |\nu_A^q(x_i) - \nu_B^q(x_i)| + |\pi_A^q(x_i) - \pi_B^q(x_i)|) \right]$$

为了更好地解释本文基于交叉熵的度量策略的优越之处, 通过以下实例进行分析。

例 1 设 A, B, C, D 是论域 $U = \{x\}$ 上的 4 个 q -ROFSs, 其中 $A = \{\langle x, 0, 1 \rangle\}, B = \{\langle x, 0, 0 \rangle\}, C = \{\langle x, 0.6, 0.6 \rangle\}, D = \{\langle x, 1, 0 \rangle\}$ 。其他学者的度量和本文所提出基于交叉熵的度量策略如表 1 所列(这里 $q=3$)。

表 1 不同策略的度量结果

Table 1 Measurement results of different strategies

	(A, B)	(B, D)	(A, D)	(A, C)	(C, D)
q -ROFCE ₁	1	1	0	0.5680	0.5680
q -ROFCE ₂	1.5708	1.5708	1.5708	1.3141	1.3141
q -ROFCE ₃	1.5708	1.5708	1.5708	1.3236	1.3236
q -ROFCE ₄	1	0	1	0.9997	0.9999
q -ROFCE ₅	0.7071	0.7071	1	0.7071	0.7071
q -ROFCE ₆	1	1	1	0.7840	0.8282
q -ROFCE ₇	1	1	1	0.9997	0.9997
q -ROFCE	0.6087	0.7307	1	0.5225	0.6606

由于 $A \subset B \subset D$, 直觉上 A 与 D 间的差异程度应当大于 A 与 B 间的差异程度, 而 q -ROFCE₁, q -ROFCE₂, q -ROFCE₃, q -ROFCE₄, q -ROFCE₆, q -ROFCE₇ 方法显然都与之违背; 而对于 q -ROFCE₅ 来说, 由于其对于 A 和 B, B 和 D , 以及 A 和

$$\begin{aligned} & a+d+g+b+e+h+2(\sqrt{ab} + \sqrt{de} + \sqrt{gh}) \\ & = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{d} + \sqrt{e})^2 + (\sqrt{g} + \sqrt{h})^2 \geq \sqrt{c}^2 + \sqrt{f}^2 + \sqrt{i}^2 = c+f+i \\ & \Rightarrow (\sqrt{a+d+g} + \sqrt{b+e+h})^2 \geq c+f+i \\ & \Rightarrow \sqrt{a+d+g} + \sqrt{b+e+h} \geq \sqrt{c+f+i} \end{aligned}$$

从而 q -ROFCE(A, B) + q -ROFCE(B, C) \geq q -ROFCE(A, C) 成立。证毕。

4 比较分析

在研究两个 q -ROFSs 的关系中, 许多学者做了大量有意义的研究, 本节介绍一些已有的相似性测度并进行比较分析。

(1) q -rungorthopair 模糊交叉熵^[18]

$$q\text{-ROFCE}_1(A, B)$$

$$= \sum_{i=1}^n [(1 - (\mu_A^q(x_i) + \nu_A^q(x_i)) | \mu_A^q(x_i) - \nu_A^q(x_i) |) - (1 - (\mu_B^q(x_i) + \nu_B^q(x_i)) | \mu_B^q(x_i) - \nu_B^q(x_i) |)]$$

(2) q -rung orthopair 模糊余弦度量^[19]

C, C 和 D 的度量结果一样, 因此不能很好地区分这几种情况; 本文提出的基于交叉熵的相似性度量策略得到的结果不会违反直觉, 并且可以很好地区分各种不同的情况, 从而可以得到对对象更加细致准确的刻画, 除此之外, 这种交叉熵还满足三角不等式。综上所述, 本文提出的这种基于交叉熵的相似性度量策略是合理且有效的。

5 基于 q -ROFCE 的属性约简算法

以下讨论 q -rung orthopair 模糊决策信息系统 $S = (U, C \cup D, V, f)$ 的属性约简问题。这里我们将整个系统描述为一个 q -ROFS。具体定义如下: 对任意 $x \in U$, 令

$$\begin{aligned} \mu_{C \cap D}(x_i) &= \min_{a_j \in C \cup D} \{\mu_{a_j}(x_i)\} \\ \nu_{C \cap D}(x_i) &= \max_{a_j \in C \cup D} \{\nu_{a_j}(x_i)\} \end{aligned}$$

$$\text{则 } \xi_{C \cap D}(x_i) = \left(\frac{1 - \mu_{C \cap D}^q(x_i) + \nu_{C \cap D}^q(x_i)}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

我们发现如下规律:

定理 1 设 $S = (U, C \cup D, V, f)$ 为一个 q -ROFSDIS, $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, V_x \in q\text{-ROFSs}(U), A \subset B \subset C$, 有 q -ROFCE($A \cap D, D$) \leq q -ROFCE($B \cap D, D$) 成立。

证明: 由于 $A \subset B$, 则对任意 x_i , 有 $\mu_{B \cap D}(x_i) \leq \mu_{A \cap D}(x_i) \leq \mu_D(x_i), \nu_{B \cap D}(x_i) \geq \nu_{A \cap D}(x_i) \geq \nu_D(x_i), \xi_{B \cap D}(x_i) \geq \xi_{A \cap D}(x_i) \geq \xi_D(x_i)$ 。

由 J -散度的性质可知:

$$J(\mu_{A \cap D}^q(x_i), \mu_B^q(x_i)) \leq J(\mu_{B \cap D}^q(x_i), \mu_B^q(x_i))$$

$$J(\nu_{A \cap D}^q(x_i), \nu_D^q(x_i)) \leq J(\nu_{B \cap D}^q(x_i), \nu_D^q(x_i))$$

$$J(\xi_{A \cap D}^q(x_i), \xi_B^q(x_i)) \leq J(\xi_{B \cap D}^q(x_i), \xi_B^q(x_i))$$

对任意 $x_i \in U$, 显然此时 q -ROFCE($A \cap D, D$) \leq q -ROFCE($B \cap D, D$) 成立。证毕。

这里提出一种基于 q -ROFCE 的 q -ROFSDIS 属性约简算法。

算法 1 基于 q -ROFCE 的 q -ROFSDIS 属性约简算法

输入: q -rung orthopair 模糊决策信息系统 $S=(U, CUD, V, f)$

输出: 约简集 red

- Step1 初始化约简集 $red = \emptyset$, 取定精度为 ϵ , 及迭代次数 $k=1$ 。计算 $\delta_0 = q\text{-ROFCE}(C \cap D, D)$ 。
- Step2 对任意 $c_i \in C - red$, 取 $\delta_k = |q\text{-ROFCE}(C \cap D, D) - q\text{-ROFCE}(c_k \cap red \cap D, D)| = \min\{|q\text{-ROFCE}(C \cap D, D) - q\text{-ROFCE}(c_i \cap red \cap D, D)|\}$, 若有多个 c_k 满足上式, 则从中任取一个 c_k 。
- Step3 若 $\epsilon \leq \delta_k < \delta_{k-1}$, 令 $red = red \cup \{c_k\}$, $C = C - \{c_k\}$, 转到 Step4; 否则转到 Step5。
- Step4 若 $k < n$, $k = k + 1$, 转到 Step2; 否则转到 Step5。
- Step5 输出 red 并结束。

随着迭代次数 k 的增加, δ_k 逐渐减小, 当 δ_k 不再减小时, 可得到所求约简结果。

例 2 已知一个 q -rung orthopair 模糊决策信息系统, 如表 2 所列(这里 $q=3$)。

表 2 q -ROFSs 信息表

Table 2 q -ROFSs information system

	c_1	c_2	c_3	d
x_1	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$
x_2	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$
x_3	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.9, 0 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$
x_4	$\langle 0.1, 0.8 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$	$\langle 0.3, 0.6 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$

Step1 初始化 $red = \emptyset$, $\epsilon = 0.001$, $k = 1$ 。计算得 $\delta_0 = q\text{-ROFCE}(C \cap D, D) = 0.5323$ 。

Step2 计算 $\delta_1 = \min_{i=1,2,3} \{|q\text{-ROFCE}(C \cap D, D) - q\text{-ROFCE}(c_i \cap red \cap D, D)|\} = \min(0.1213, 0.1446, 0.2044) = 0.1213$, 此时 $c_k = c_1$ 。

Step3 此时 $\epsilon < \delta_1 < \delta_0$, 令 $red = red \cup \{c_1\}$, $C = C - \{c_1\}$, 转到 Step4。

Step4 此时 $k = 1 < n = 3$, $k = k + 1$, 转到 Step2, 继续计算 $\delta_2 = \min_{i=2,3} \{|q\text{-ROFCE}(C \cap D, D) - q\text{-ROFCE}(c_i \cap red \cap D, D)|\} = \min(0, 0.1213) = 0 < \delta_1$ 。此时 $c_k = c_2$, 令 $red = red \cup \{c_2\}$, $k = 2 < n$, 再转 Step2, 计算得 $\delta_3 = 0 = \delta_2$, 转到 Step5。

Step5 输出 $red = \{c_1, c_2\}$ 。

综合以上实例可知, 本文所提出的基于直觉模糊交叉熵的属性约简是合理且可行的。

6 实验分析

通过实验来验证本文介绍的基于 q -ROFCE 属性约简的优越性。选用 6 个 UCI 数据库, 分别是红酒质量数据库(Red wine quality)、白酒质量数据库(White wine quality)、混凝土坍落度(Concrete slump)、玻璃识别数据库(Glass identification)、房价预测数据库(Housing price forecasting)和混凝土抗压强度(Concrete crushing strength), 并对其进行 q -rung orthopair 模糊化处理。设信息系统中 $a_i(x_j)$ 表示对象 x_j 在属性为 a_i 下的属性值 ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$), 则 q -rung orthopair 隶属度定义为:

$$\mu_{a_i}(x_j) = \left(\frac{a_i(x_j) - \min_j a_i(x_j)}{\max_j a_i(x_j) - \min_j a_i(x_j)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

q -rung orthopair 非隶属度定义为:

$$\nu_{a_i}(x_j) = ((0.8 - \mu_{a_i}^q(x_j)) \lceil 0.8 - \mu_{a_i}^q(x_j) \rceil)^{\frac{1}{q}}$$

此处 $\lceil \cdot \rceil$ 为取上整, $q = 3$ 。

数据库的参数如表 3 所列。

表 3 若干数据库的约简结果($\epsilon = 0.001$)

Table 3 Reduction result of some databases

数据库	对象个数	属性个数	约简结果
1. Red wine quality	1600	11	$\{c_4, c_7, c_3, c_5, c_1, c_{11}, c_6\}$
2. White wine quality	4899	11	$\{c_4, c_5, c_6, c_2\}$
3. Concrete slump	103	9	$\{c_1, c_2, c_3, c_7, c_9, c_5\}$
4. Glass identification	24	8	$\{c_4, c_3, c_5, c_2, c_1, c_6\}$
5. Housing price forecasting	415	6	$\{c_3, c_4, c_1\}$
6. Concrete crushing strength	1030	8	$\{c_8, c_3, c_2\}$

本文采用这篇论文所探究的基于 q -ROFCE 进行属性约简, 并说明其合理性和可行性。

实验所采用的硬件环境为 Intel(R) Core(TM) i7 8550U, 2.00GHz CPU 和 8GB 内存的 Windows 10 操作系统个人主机, 所有算法采用 Matlab 2020b 进行编码。

此次实验分为 3 个步骤: 第一步是使用本文所提到的方法对上文所提到的 5 个数据库进行属性约简, 并得到结果; 第二步是对该算法在这 5 个数据库上的执行效率和执行结果作图分析, 用该算法对每个数据库执行 10 次, 取执行 10 次的均值代表其执行效率; 第三步是对该算法进行灵敏度分析, 在混凝土强度数据库中观察约简结果随着 δ 的变化而产生的变化并作图, 其中 $\delta = q\text{-ROFCE}(C \cap D, D) - q\text{-ROFCE}(red \cap D, D)$ 。最后结合实验结果对该算法的优缺点进行分析。通过实验, 6 个数据库在基于这种新的 q -ROFCE 下的运行结果如表 3 所列, 运行时间如图 2 所示, 各个数据库中 δ 的变化情况如图 3 所示。

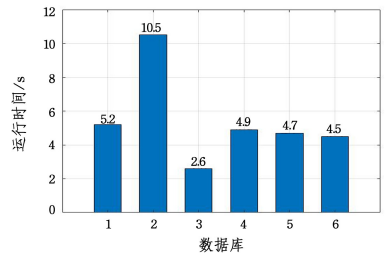
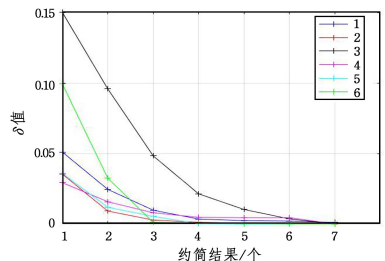


图 2 各个数据库的约简运行时间

Fig. 2 Reduction running time of each database



注: 1 为红酒质量数据库(Red wine quality), 2 为白酒质量数据库(White wine quality), 3 为混凝土坍落度(Concrete slump), 4 为玻璃识别数据库(Glass identification), 5 为房价预测数据库(Housing price forecasting), 6 为混凝土抗压强度(Concrete crushing strength)

图 3 各数据库中 δ 的变化情况

Fig. 3 Changes of δ in each database

通过使用本文所讨论的基于 q -ROFCE 的属性约简算法, 分别对红酒质量数据库、白酒质量数据库、混凝土坍落度

数据库、玻璃识别数据库和房价预测数据库进行实验;在此基础上,还在混凝土抗压强度数据库中,通过观察发现 δ 随约简结果个数增多而逐渐减小,根据实验结果分析,这种算法具有良好的属性约简的效果。相对于其他的属性约简算法,它拥有一些良好的特点,譬如,以决策结果为导向,通过交叉熵的方法度量条件属性集和决策属性集的相似度,并以此为依据进行属性约简,得到的约简结果较为精确,并有较好的效率。

结束语 本文提出了针对 q -rung orthopair 模糊信息系统的研究,构造了一种新的基于 q -ROFCE 的属性约简算法。首先是对这种新的交叉熵加以研究,并证明了其拥有一些良好的性质,可以用来对决策表进行属性约简;其次利用其良好的性质对 q -rung orthopair 模糊信息系统进行属性约简,通过实例证明了其合理性和可行性,并对其进行了灵敏度分析。在将来的研究中,将进一步探索其在更复杂模糊环境下的应用,譬如数据类型为语义型、缺省型等;并且可以考虑扩展到 q -rung orthopair 模糊信息系统中的多粒度三支决策^[20],将其使用于更广泛的应用^[21]之中。

参 考 文 献

- [1] ZADEH L. A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353.
- [2] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [3] YAGER R R. Pythagorean fuzzy subsets[C]//Proceeding of the Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting. Edmonton, Canada, 2013: 57-61.
- [4] YAGER R. Generalized orthopair fuzzy sets[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 25: 1222-1230.
- [5] HU J, WANG G Y, ZHANG Q H, et al. Attribute reduction based on granular computing[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2006, 4259(3): 458-466.
- [6] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.
- [7] WANG G Q. Attribute reduction algorithm based on neighborhood combinatorial entropy [J]. Computer Applications and Software, 2018, 35(12): 269-273.
- [8] QIAN Y H, LIANG J Y, PEDRYCZ W, et al. Positive approximation: An accelerator for attribute reduction in rough set theory[J]. Artificial Intelligence, 2010, 174(9/10): 597-618.
- [9] LIN Y J, LI J J, LIN P R, et al. Feature selection via neighborhood multi-granulation fusion[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 67(3): 162-168.
- [10] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [11] CHEN H M, LI T R, CAI Y, et al. Parallel attribute reduction in dominance-based neighborhood rough set[J]. Information Sci-

ces, 2016(10): 351-368.

- [12] ZHANG J B, LI T R, PAN Y. PLAR: Parallel large-scale attribute reduction cloud systems[C]// International Conference on Parallel and Distributed Computing, Applications and Technologies. IEEE, 2014: 184-191.
- [13] ZHANG X Y, XU W H. Ranking for objects and attribute reductions in intuitionistic fuzzy ordered information system[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012, 2012: 1-19.
- [14] FENG Q R, LI R. Discernibility matrix based attributes reduction in intuitionistic fuzzy decision systems[C]// RSKT 2014. 2014: 111-120.
- [15] GUO Q, YANG S L, LIU W J. A novel attributes reduction algorithm of intuitionistic fuzzy-valued information system [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2014, 28(4): 138-143.
- [16] LAMBERTI P W, MAJTEY A P, BORRAS A, et al. Metric character of the quantum Jensen-Shannon divergence[J]. Physical Review A, 2008, 77(5): 052311.
- [17] LIN J H. Divergence measures based on the Shannon entropy [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1991, 37(1): 145-151.
- [18] LIU L, WU J, WEI G W, et al. Entropy-based GLSD method for social capital selection of a PPP project with q -rung orthopair fuzzy information[J]. Entropy, 2020, 4: 414.
- [19] WANG P, WANG J, WEI G W, et al. Similarity measures of q -rung orthopair fuzzy sets based on cosine function and their application[J]. Mathematics, 2019, 7: 340.
- [20] ZHANG C, DING J J, LI D Y, et al. A novel multi-granularity three-way decision making approach in q -rung orthopair fuzzy information systems[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2021, 138: 161-187.
- [21] REN R, ZHANG C, PANG J F. Optimal granularity selections of multigranulation q -RO fuzzy rough sets under bounded rationality and their applications in merger and acquisition target selections[J]. Journal of Nanjing University(Natural Science), 2020, 56(4): 452-460.



WANG Zhi-qiang, born in 1997, post-graduate. His main research interests include granular computing and so on.



ZHENG Ting-ting, born in 1978, Ph.D., professor. Her main research interests include granular computing and knowledge discovery.