计算机科学
COMPUTER SCIENCE

基于模糊邻域系统的模糊粗糙集模型

冉虹, 候婷, 贺龙雨, 秦克云

引用本文

冉虹, 候婷, 贺龙雨, 秦克云.基于模糊邻域系统的模糊粗糙集模型[J]. 计算机科学, 2022, 49(11A): 211100224-5.

RAN Hong, HOU Ting, HE Long-yu, QIN Ke-yun. Fuzzy Rough Sets Model Based on Fuzzy Neighborhood Systems [J]. Computer Science, 2022, 49(11A): 211100224-5.

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.211100224

基于模糊邻域系统的模糊粗糙集模型

冉 虹　侯 婷　贺龙雨　秦克云
西南交通大学数学学院　成都 611756
(1938506038@qq.com)

摘　要　针对模糊邻域系统,提出了基于一般模糊逻辑算子的模糊粗糙上、下近似算子并探讨了算子的基本性质。然后将邻域系统串行、自反、对称、一元、欧几里得的概念推广到模糊邻域系统。最后研究了当模糊邻域系统是串行、自反、对称、一元、欧几里得时模糊粗糙近似算子的相关代数结构。

关键词:模糊邻域系统;粗糙集;上近似算子;下近似算子
中图法分类号　TP182

Fuzzy Rough Sets Model Based on Fuzzy Neighborhood Systems

RAN Hong,HOU Ting,HE Long-yu and QIN Ke-yun
School of Mathematic,Southwest Jiaotong University,Chengdu 611756,China

Abstract　For fuzzy neighborhood systems,upper and lower fuzzy rough approximation operators based on general fuzzy logic operators are proposed,and the basic properties of the operators are investigated. Then,the concepts of neighborhood system of serial,reflexive,symmetric,unary and Euclidean are extended to fuzzy neighborhood systems. Finally,the related algebraic structures of fuzzy rough approximation operators are discussed when the fuzzy neighborhood system is serial,reflexive,symmetric,unary and Euclidean.

Keywords　Fuzzy neighborhood system,Rough set,Upper approximation operator,Lower approximation operator

1　引言

1982 年波兰数学家 Pawlak 提出了粗糙集理论的概念[1],这是一种新的处理模糊和不确定信息的数学工具。粗糙集理论使用两个精确集,即粗糙集的上近似和下近似来近似地描述不确定概念。众多案例表明,粗糙集理论在数据分析、模式识别、特征选择与数据发掘等领域发挥了重要作用[2-5]。

知识在 Pawlak 粗糙集模型中被理解为区分对象的能力。Pawlak 粗糙集模型建立在不可区分关系(即等价关系)上,但等价关系的条件性太强,使得在实际应用中存在不足。为了拓展粗糙集理论的应用,许多学者弱化了等价关系,提出了多种形式的广义粗糙集模型,比如基于一般二元关系的广义粗糙集模型[6-7]、基于覆盖的广义粗糙集模型[8-10]、基于模糊关系的模糊粗糙集模型[11]等。

美国计算机与控制论专家 Zadeh 于 1965 年提出了模糊集的概念[12],这也是一种处理不确定性问题的理论。虽然模糊集与粗糙集都是描述知识的不精确性,但是二者侧重点不同。模糊集是通过隶属函数来描述集合的模糊程度;而粗糙集是通过近似空间中的上、下近似算子来刻画集合的不可分辨性。这两种理论具有很强的互补性,Dubois 和 Prade[13]首次将模糊集和粗糙集结合,提出了模糊粗糙集和粗糙模糊集的相关概念。

Pawlak 粗糙集模型中的上、下近似算子分别对应拓扑的闭包和内部,Lin[14]据此提出了基于邻域系统的粗糙集模型。在此基础上,很多学者对基于邻域系统的粗糙集模型进行了深入研究。Zhao 和 Li[15]研究了基于粗糙集的广义邻域系统的公理化特征,讨论了广义邻域系统上、下近似算子的公理化特征以及相关性质。文献[16-19]研究了模糊化邻域系统的相关概念。Li 等[20]分别用构造法和公理化方法给出了基于模糊化邻域系统的粗糙集模型。首先将邻域系统自反、串行、对称等概念推广到了模糊邻域系统并研究了相关模糊粗糙近似算子的代数结构,然后使用公理化方法探讨了模糊粗糙上、下近似算子的性质。Zhang[21]等研究了基于覆盖邻域系统和基于自反邻域系统的广义粗糙集模型之间的联系。此外,针对模糊邻域系统,Liau 等[22]给出了基于取小运算的模糊粗糙上近似算子和基于 Gödel 蕴涵算子的模糊粗糙下近似算子的定义。本文在此基础上对模糊邻域系统的模糊粗糙上、下近似算子进行了推广,提出了基于 t 模算子的模糊粗糙上近似算子和基于一般模糊蕴涵算子的模糊粗糙下近似算子,并研究了算子的基本性质。另外,将邻域系统串行、自反、一元、对称、欧几里得的概念推广到模糊邻域系统,并探讨了相应模糊粗糙近似算子的代数结构。

2　预备知识

本节给出了 Pawlak 粗糙集模型、模糊集、邻域系统、剩余格等的基本概念和基本性质。

基金项目:国家自然科学基金(61976130)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61976130).
通信作者:秦克云(keyunqin@263.net)

定义 1[10] 设 U 为一非空有限集合，称为论域。R 是 U 上的一个等价关系，称二元组 (U,R) 为一个 Pawlak 近似空间，简称近似空间。对于任意 $X\subseteq U$，X 关于近似空间 (U,R) 的下近似 $\underline{R}(X)$ 和上近似 $\overline{R}(X)$ 分别定义为：

$$\underline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\subseteq X\}$$

$$\overline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\cap X\neq\emptyset\}$$

其中，$[x]_R=\{y\in U\mid(x,y)\in R\}$。

定义 2[12] 设 U 表示一个论域，μ 是论域 U 到 $[0,1]$ 的一个映射，即 $\mu:U\to[0,1]$，称 μ 是 U 上的模糊集，称 $\mu(x)$ 为模糊集 μ 的隶属函数。记 U 上的全体模糊集所构成的集合为 $F(U)$；$\emptyset$ 表示隶属函数值恒为 0 的模糊集；U 表示隶属函数值恒为 1 的模糊集。

设 $\mu,\nu\in F(U)$，若对于任意 $x\in U$，有 $\mu(x)\leqslant\nu(x)$，则称 μ 包含于 ν，并记为 $\mu\subseteq\nu$；若对于任意 $x\in U$，有 $\mu(x)=\nu(x)$，则称 μ 与 ν 相等，并记为 $\mu=\nu$。

设 $\mu,\nu\in F(U)$，分别称模糊集 $\mu\cup\nu$ 和 $\mu\cap\nu$ 为 μ 和 ν 的并与交。其中，对于任意的 $x\in U$，有 $(\mu\cup\nu)(x)=\mu(x)\vee\nu(x)$，$(\mu\cap\nu)(x)=\mu(x)\wedge\nu(x)$，其中 $\vee$，$\wedge$ 为 *Zadeh* 算子。

定义 3[15,20-21] 设 U 表示一个论域，$P(U)$ 表示 U 的幂集，$N:U\to P(P(U))$ 为一映射。如果对于任意 $x\in U$，有 $N(x)\neq\emptyset$，则称 N 为一个邻域系统；称 $X\in N(x)$ 为 x 的一个邻域；称 (U,N) 为一个邻域空间。此外：

(1)称 N 是串行的，若对于任意 $x\in U$ 和任意 $K\in N(x)$，有 $K\neq\emptyset$；

(2)称 N 是自反的，若对于任意 $x\in U$ 和任意 $K\in N(x)$，有 $x\in K$；

(3)称 N 是一元的，若对于任意 $x\in U$ 和任意 $K,V\in N(x)$，存在 $M\in N(x)$，使得 $M\subseteq K\cap V$；

(4)称 N 是对称的，若对于任意 $x,y\in U$，$K\in N(x)$ 和 $V\in N(y)$，如果 $y\in K$，则有 $x\in V$；

(5)称 N 是欧几里得的，若对于任意 $x\in U$ 和任意 $K\in N(x)$，存在 $M\in N(x)$，使得对于任意 $y\in M$ 和任意 $V\in N(y)$，有 $K\subseteq V$。

定义 4[15,20] 设 (U,N) 为一个邻域空间，对于任意 $X\subseteq U$，其下近似算子 $\underline{N}(X)$ 和上近似算子 $\overline{N}(X)$ 分别定义为：

$$\underline{N}(X)=\{x\in U\mid\exists K\in N(x),K\subseteq X\}$$

$$\overline{N}(X)=\{x\in U\mid\forall K\in N(x),K\cap X\neq\emptyset\}$$

定义 5[23] 设 $\otimes:[0,1]^2\to[0,1]$ 是二元函数，如果对于任意 $a,b,c\in[0,1]$，有：

(1)交换律：$a\otimes b=b\otimes a$；

(2)结合律：$(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$；

(3)单调性：$b\leqslant c\Rightarrow a\otimes b\leqslant a\otimes c$；

(3)边界条件：$1\otimes a=a$。

则称 $\otimes$ 为 $[0,1]$ 上的三角模，简称 t 模。

定义 6[24] 称映射 $\to:[0,1]^2\to[0,1]$ 是一个模糊蕴涵算子，如果对于任意 $a,b,c\in[0,1]$，有：

(1)若 $a\leqslant b$，则 $a\to c\geqslant b\to c$；

(2)若 $b\leqslant c$，则 $a\to b\leqslant a\to c$；

(3)$0\to 0=1,1\to 1=1,1\to 0=0$。

定义 7[25] 称 $L=(L,\vee,\wedge,\otimes_1,\to_1,0,1)$ 是一个剩余格，如果下列条件成立：

(1)L 是一个有界格，0，1 分别是其最小元和最大元；

(2)$\otimes_1:L\times L\to_1 L$ 是一个二元函数，满足对于任意 $a,b,c\in[0,1]$，有：

1)$a\otimes_1 b=b\otimes_1 a$；

2)$a\otimes_1(b\otimes_1 c)=(a\otimes_1 b)\otimes_1 c$；

3)$1\otimes_1 a=a$；

4)若 $a\leqslant b$，则 $a\otimes_1 c\leqslant b\otimes_1 c$。

(3)$\to_1:L\times L\to_1 L$ 是一个二元函数，若对于任意 $a,b,c\in L$，有 $a\otimes_1 b\leqslant c$ 当且仅当 $a\leqslant b\to_1 c$，则称 $\to_1$ 为与 $\otimes_1$ 相伴随的蕴涵算子，称 $(\otimes_1,\to_1)$ 为伴随对。

例 1 设 $L=[0,1]$，若 $\otimes_1$ 为一个 t 模，$\to_1$ 为一个模糊蕴涵算子，且 $(\otimes_1,\to_1)$ 构成伴随对，则 $L=([0,1],\vee,\wedge,\otimes_1,\to_1,0,1)$ 是一个剩余格。

定理 1[26] 设 $L=(L,\vee,\wedge,\otimes_1,\to_1,0,1)$ 是一个剩余格，则对于任意 $a,b\in L$，I 为一个有限指标集。则有：

(1)$a\otimes_1(a\to_1 b)\leqslant b$，$b\leqslant a\to_1 a\otimes_1 b$；

(2)$b\otimes_1(\bigvee_{i\in I}a_i)=\bigvee_{i\in I}(b\otimes_1 a_i)$；

(3)$a\to_1\bigwedge_{i\in I}b_i=\bigwedge_{i\in I}(a\to_1 b_i)$，$\bigvee_{i\in I}a_i\to_1 b=\bigwedge_{i\in I}(a_i\to_1 b)$，$\bigwedge_{i\in I}a_i\to_1 b\geqslant\bigvee_{i\in I}(a_i\to_1 b)$。

3 模糊邻域系统

本节在文献[22]的基础上给出模糊邻域系统的模糊粗糙上、下近似算子的定义。首先研究算子的基本性质，然后将邻域系统串行、自反、对称、一元、欧几里得的概念进行推广，并讨论了相应模糊粗糙近似算子的代数结构。

3.1 基本定义

定义 8[11,21] 设 U 是一个论域，$N:U\to P(F(U))$ 为一映射。如果对于任意 $x\in U$，有 $N(x)\neq\emptyset$，则称 N 为一个模糊邻域系统；称 $\mu\in N(x)$ 为 x 的一个模糊邻域；称 (U,N) 为一个模糊邻域空间。

注 1：对于任意 $x\in U$，记 $N_x=\cap N(x)$；对于任意 $y\in U$，有 $N_x(y)=\bigwedge_{v\in N(x)}v(y)$。

定义 9 设 (U,N) 是一个模糊邻域空间。对于任意 $\mu\in F(U)$，μ 的上、下近似算子 $\overline{N}(\mu)$，$\underline{N}(\mu)\in F(U)$ 定义如下：

$$\overline{N}(\mu)(x)=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes\mu(y))$$

$$\underline{N}(\mu)(x)=\bigvee_{v\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(v(y)\to\mu(y))$$

其中，$\otimes$ 为一个 t 模，$\to$ 为一个模糊蕴涵算子。

注 2：在此定义下，$\overline{N}(\mu)$ 与 $\underline{N}(\mu)$ 不是对偶的。

3.2 基本性质

命题 1 设 U 是一个论域，N 是 U 上的一个模糊邻域系统，则有：

(1)$\overline{N}(\emptyset)=\emptyset$，$\underline{N}(U)=U$；

(2)对于任意 $\mu,\omega\in F(U)$，若 $\mu\subseteq\omega$，则有 $\underline{N}(\mu)\subseteq\underline{N}(\omega)$，$\overline{N}(\mu)\subseteq\overline{N}(\omega)$。

证明：(1)对于任意 $x\in U$，有：

$\overline{N}(\emptyset)(x)=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes 0)=0$；$\underline{N}(U)(x)=\bigvee_{v\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(v(y)\to 1)=\bigvee_{v\in N(x)}1=1$。

(2)对于任意 $\mu,\omega\in F(U)$，若 $\mu\subseteq\omega$，有：

$\underline{N}(\mu)(x)=\bigvee_{v\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(v(y)\to\mu(y))\leqslant\bigvee_{v\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(v(y)\to w(y))=\underline{N}(\omega)(x)$；$\overline{N}(\mu)(x)=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes\mu(y))\leqslant\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes w(y))=\overline{N}(\omega)(x)$

3.3　串行模糊邻域系统

定义 10　$N:U\to P(F(U))$是U上的一个模糊邻域系统。称N是串行的,如果对于任意的$x\in U$和任意$\mu\in N(x)$,有$\bigvee\limits_{y\in U}\mu(y)=1$。

命题 2　设U是一个论域,N是一个模糊邻域系统,则有:

(1)N串行当且仅当$\overline{N}(U)=U$。

(2)$(\otimes,\to)$构成伴随对。若N串行,则$\underline{N}(\emptyset)=\emptyset$;如果对于任意$a\in[0,1]$,有$(a\to 0)\to 0=a$且$\underline{N}(\emptyset)=\emptyset$,则$N$串行。

证明:(1)(必要性)设N串行。对于任意$x\in U$,有:

$$\overline{N}(U)(x)=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes 1)=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y))=1$$

(充分性)对于任意$x\in U$,有:

$$\overline{N}(U)(x)=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes 1)=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y))=1$$

从而对于任意$v\in N(x)$,有$\bigvee\limits_{y\in U}\mu(y)=1$。所以$N$串行。

(2)由于$(\otimes,\to)$构成伴随对,根据例1,可得$L=([0,1],\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$是一个剩余格。

设N串行。对于任意$x\in U$,由定理1(3),可得:

$$\underline{N}(\emptyset)(x)=\bigvee_{v\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(v(y)\to 0)=\bigvee_{v\in N(x)}(\bigvee_{y\in U}v(y)\to 0)=0$$

对于任意$x\in U$,根据定理1(3),有:

$$\underline{N}(\emptyset)(x)=\bigvee_{v\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(v(y)\to 0)=\bigvee_{v\in N(x)}(\bigvee_{y\in U}v(y)\to 0)=0$$

则对于任意$v\in N(x)$,均有$\bigvee\limits_{y\in U}v(y)\to 0=0$。从而$\bigvee\limits_{y\in U}v(y)=(\bigvee\limits_{y\in U}v(y)\to 0)\to 0=0\to 0=1$。故$N$串行。

3.4　自反模糊邻域系统

定义 11　$N:U\to P(F(U))$是U上的一个模糊邻域系统。称N是自反的,如果对于任意$x\in U$和任意$\mu\in N(x)$,有$\mu(x)=1$。

命题 3　设U是一个论域,N是一个模糊邻域系统,则有:

(1)N自反,当且仅当对于任意$\mu\in F(U)$,有$\underline{N}(\mu)\subseteq\mu$。

(2)N自反,当且仅当对于任意$\mu\in F(U)$,有$\overline{N}(\mu)\supseteq\mu$。

证明:(1)(必要性)设N自反。对于任意$x\in U$和任意$\mu\in F(U)$,有:

$$\underline{N}(\mu)(x)=\bigvee_{v\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(v(y)\to\mu(y))$$

由于对任意$\nu\in N(x)$,均有:

$$\bigwedge_{y\in U}(v(y)\to\mu(y))\leqslant\nu(x)\to\mu(x)=1\to\mu(x)=\mu(x)$$

从而$\bigvee\limits_{v\in N(x)}\bigwedge\limits_{y\in U}(v(y)\to\mu(y))\leqslant\mu(x)$,故$\underline{N}(\mu)(x)\leqslant\mu(x)$。

(充分性)对于任意$x\in U$和任意$\mu\in N(x)$,有:

$$\mu(x)\geqslant\underline{N}(\mu)(x)=\bigvee_{v\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(v(y)\to\mu(y))$$

由于$\mu(x)\geqslant\bigvee\limits_{v\in N(x)}\bigwedge\limits_{y\in U}(v(y)\to\mu(y))\geqslant\bigwedge\limits_{y\in U}(\mu(y)\to\mu(y))=1$,所以$\mu(x)=1$,从而$N$自反。

(2)(必要性)设N自反。对于任意$x\in U$和任意$\mu\in F(U)$,有:

$$\overline{N}(\mu)(x)=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes\mu(y))$$

由于对任意$\nu\in N(x)$,均有:

$$\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes\mu(y))\geqslant\nu(x)\otimes\mu(x)=1\otimes\mu(x)=\mu(x)$$

从而$\bigwedge\limits_{v\in N(x)}\bigvee\limits_{y\in U}(v(y)\otimes\mu(y))\geqslant\mu(x)$,故$\overline{N}(\mu)(x)\geqslant\mu(x)$。

(充分性)记$1_x(t)=\begin{cases}1, & t=x\\ 0, & t\neq x\end{cases}$。对于任意$x\in U$,有:

$$1=\overline{N}(1_x)(x)=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes 1_x(y))=\bigwedge_{v\in N(x)}v(x)$$

则对于任意$\nu\in N(x)$,有$v(x)=1$,从而N自反。

3.5　对称模糊邻域系统

下面的引理证明了定义3(4)的不足。

引理 1　若$N:U\to P(P(U))$为U上的一个对称邻域系统,则对于任意$x\in U$,有$|N(x)|=1$。

证明:(反证法)假设存在$x\in U$,使$M_1,M_2\in N(x)$且$M_1\neq M_2$,则存在$y\in M_1$且$y\notin M_2$。设$M_3\in N(y)$,由定义3(4),可得$x\in M_3\in N(y)$。再次利用定义3(4),可得$y\in M_2$,显然矛盾。故假设不成立。

定义3(4)表明了论域上的每个对象所对应的对称邻域系统的基数为1,因此定义3(4)限定了对称邻域系统的基数。

下面重新定义了对称邻域系统。

定义 12　$N:U\to P(P(U))$为U上的一个邻域系统。称N是对称的,若对于任意$x\in U$,存在$M\in N(x)$,使得对于任意$y\in M$,有$x\in N_y$。

注3:对于任意$x\in U$,记$N_x=\bigcap N(x)$;对于任意$M\in N(x)$,有$N_x\subseteq M$。

下面的引理给出了与定义12等价的条件。

引理 2　$N:U\to P(P(U))$为U上的一个邻域系统。N对称当且仅当:

(1)对于任意$x\in U$,有$N_x\in N(x)$;

(2)对于任意$x,y\in U$,$x\in N_y$当且仅当$y\in N_x$。

证明:(必要性)设N对称。(1)对于任意$x\in U$,存在$M\in N(x)$,使得对任意$y\in M$,有$x\in N_y$。对于任意$z\in M$以及任意$H\in N(x)$,存在$L\in N(z)$,使得对任意$u\in L$,有$z\in N_u$。另外,由$z\in M$,可得$x\in N_z$,从而$x\in L$,故有$z\in N_x$。再由$H\in N(x)$,可得$z\in H$。根据z的任意性,可得$M\subseteq H$,即M是$N(x)$中的极小元。于是,$N_x=M\in N(x)$。

(2)设$x,y\in U$,且$x\in N_y$。对于任意$y\in U$,存在$M\in N(y)$,使得对于任意$z\in M$,有$y\in N_z$。于是由$x\in N_y\subseteq M$,可得$y\in N_x$。同理,若$y\in N_x$,则$x\in N_y$。

(充分性)设(1)(2)成立。对于任意$x\in U$,有$N_x\in N(x)$,且对于任意$y\in N_x$,由(2)可得,$x\in N_y$。所以N对称。

定义 13　$N:U\to P(F(U))$是U上的一个模糊邻域系统。称N是对称的,如果:

(1)对于任意$x\in U$,有$N_x\in N(x)$;

(2)对于任意$x,y\in U$,有$N_x(y)=N_y(x)$。

引理 3　$N:U\to P(F(U))$是U上的一个模糊邻域系统。若对于任意$x\in U$,有$1_x\subseteq\underline{N}(\overline{N}(1_x))$,且对于任意$x\in U$,$|N(x)|$有限。则对于任意$x\in U$,有$N_x\in N(x)$。

证明:对于任意$x\in U$,有:

$$\begin{aligned}1&=\underline{N}(\overline{N}(1_x))(x)=\bigvee_{\nu\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\nu(y)\to\overline{N}(1_x)(y))\\&=\bigvee_{\nu\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\nu(y)\to\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes 1_x(z)))\\&=\bigvee_{\nu\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\nu(y)\to\bigwedge_{\omega\in N(y)}\omega(x))\\&=\bigvee_{\nu\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\nu(y)\to N_y(x))\end{aligned}$$

由于$|N(x)|$有限,故存在$\nu\in N(x)$,使得$1=\bigwedge\limits_{y\in U}(\nu(y)\to N_y(x))$。即对于$y\in U$,有$1=\nu(y)\to N_y(x)$,从而$\nu(y)\leqslant N_y(x)$。同理可得,对于任意$y\in U$,存在$\lambda\in N(y)$,使得对于任意$z\in U$,有$\lambda(z)\leqslant N_z(y)$。于是有$\lambda(x)\leqslant N_x(y)$。从而有:$\nu(y)\leqslant N_y(x)\leqslant\lambda(x)\leqslant N_x(y)\leqslant v(y)$。故$N_x=\nu\in N(x)$。

命题 4　若$N:U\to P(F(U))$是U上的一个对称模糊邻域系统且$(\otimes,\to)$构成伴随对,则对任意$\mu\in F(U)$,有:

(1) $\underline{N}(\overline{N}(\mu))\supseteq\mu$;

(2) $\overline{N}(\underline{N}(\mu))\subseteq\mu$。

证明：由于($\otimes,\rightarrow$)构成伴随对，根据例1，可得 $L=([0,1],\vee,\wedge,\otimes,\rightarrow,0,1)$是一个剩余格。设 N 对称，故对于任意 $x\in U$，有 $N_x\in N(x)$；对于任意 $x,y\in U$，有 $N_x(y)=N_y(x)$。

(1)对于任意 $x\in U$ 和任意 $\mu\in F(U)$，有：

$$\begin{aligned}\underline{N}(\overline{N}(\mu))(x)&=\bigvee_{v\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(v(y)\rightarrow\overline{N}(\mu)(y))\\&=\bigwedge_{y\in U}(N_x(y)\rightarrow\overline{N}(\mu)(y))\\&=\bigwedge_{y\in U}(N_x(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z)))\\&=\bigwedge_{y\in U}(N_x(y)\rightarrow\bigvee_{z\in U}(N_y(z)\otimes\mu(z)))\\&\geqslant\bigwedge_{y\in U}(N_x(y)\rightarrow(N_y(x)\otimes\mu(x)))\\&\geqslant\mu(x)\text{(由定理1(1))。}\end{aligned}$$

(2)对于任意 $x\in U$ 和任意 $\mu\in F(U)$，有：

$$\begin{aligned}\overline{N}(\underline{N}(\mu))(x)&=\bigwedge_{v\in N(x)}\bigvee_{y\in U}(v(y)\otimes\underline{N}(\mu)(y))\\&=\bigvee_{y\in U}(N_x(y)\otimes\underline{N}(\mu)(y))\\&=\bigvee_{y\in U}(N_x(y)\otimes\bigvee_{\omega\in N(y)}\bigwedge_{z\in U}(\omega(z)\rightarrow\mu(z)))\\&=\bigvee_{y\in U}(N_x(y)\otimes\bigwedge_{z\in U}(N_y(z)\rightarrow\mu(z)))\\&\leqslant\bigvee_{y\in U}(N_x(y)\otimes(N_y(x)\rightarrow\mu(x)))\\&\leqslant\mu(x)\text{(由定理1(1))。}\end{aligned}$$

命题5 若 $N:U\rightarrow P(F(U))$是 U 上的一个模糊邻域系统，并且($\otimes,\rightarrow$)构成伴随对，以及对于任意 $\mu\in F(U)$，有 $\underline{N}(\overline{N}(\mu))\supseteq\mu$。则对于任意 $x,y\in U$，有 $N_x(y)=N_y(x)$。

证明：由于($\otimes,\rightarrow$)构成伴随对，根据例1，可得 $L=([0,1],\vee,\wedge,\otimes,\rightarrow,0,1)$是一个剩余格。

对于任意 $x\in U$，有：

$$\begin{aligned}1&=\underline{N}(\overline{N}(1_x))(x)=\bigvee_{\nu\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\nu(y)\rightarrow\overline{N}(1_x)(y))\\&=\bigvee_{\nu\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\nu(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes1_x(z)))\\&=\bigvee_{\nu\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\nu(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\omega(x))\\&\leqslant\bigwedge_{y\in U}\bigvee_{\nu\in N(x)}(\nu(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\omega(x))\end{aligned}$$

从而对任意 $y\in U$，有 $\bigvee_{\nu\in N(x)}(\nu(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\omega(x))=1$。由定理1(3)，有：

$$\begin{aligned}1&=\bigvee_{\nu\in N(x)}(\nu(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\omega(x))\\&\leqslant(\bigwedge_{\nu\in N(x)}\nu(y))\rightarrow(\bigwedge_{\omega\in N(y)}\omega(x))\\&=N_x(y)\rightarrow N_y(x)\end{aligned}$$

从而 $N_x(y)\leqslant N_y(x)$。同理可证 $N_x(y)\geqslant N_y(x)$。所以 $N_x(y)=N_y(x)$。

下面的定理给出了与对称模糊邻域系统等价的充要条件。

定理2 $N:U\rightarrow P(F(U))$是 U 上的一个对称模糊邻域系统，当且仅当对于任意 $x\in U$，存在 $M\in N(x)$，使得对于任意 $y\in U$，有 $N_y(x)\geqslant M(y)$。

证明：(必要性)设 N 对称。对于任意 $x\in U$，有 $N_x\in N(x)$，对于任意 $y\in U$，有 $N_y(x)\geqslant N_x(y)$。

(充分性)(1)对于任意 $x\in U$，存在 $M\in N(x)$，使得对于任意 $y\in U$，有 $N_y(x)\geqslant M(y)\geqslant N_x(y)$。则 $N_x(x)\geqslant M(x)\geqslant N_x(x)$。

故 $N_x=M\in N(x)$。

(2)对于任意 $x\in U$，存在 $M\in N(x)$，使得对于任意 $y\in U$，有 $N_y(x)\geqslant M(y)\geqslant N_x(y)$，从而 $N_y(x)\geqslant N_x(y)$。类似可证 $N_y(x)\leqslant N_x(y)$，从而 $N_y(x)=N_x(y)$。

3.6 一元模糊邻域系统

定义14 $N:U\rightarrow P(F(U))$是 U 上的一个模糊邻域系统。称 N 是一元的，如果对于任意 $x\in U$ 和任意 $\mu,\nu\in N(x)$，存在 $\lambda\in N(x)$，使得 $\lambda\subseteq\mu\cap\nu$。

命题6 设 U 是一个论域，模糊邻域系统 N 是一元的且($\otimes,\rightarrow$)构成伴随对，则有：

(1)对于任意 $\mu,\nu\in F(U)$，有 $\underline{N}(\mu\cap\nu)=\underline{N}(\mu)\cap\underline{N}(\nu)$。

(2)对于任意 $\mu,\nu\in F(U)$，有 $\overline{N}(\mu\cup\nu)=\overline{N}(\mu)\cup\overline{N}(\nu)$。

证明：由于($\otimes,\rightarrow$)构成伴随对，根据例1，可得 $L=([0,1],\vee,\wedge,\otimes,\rightarrow,0,1)$是一个剩余格。

(1)由命题1可知，对于任意 $\mu,\nu\in F(U)$，有 $\underline{N}(\mu\cap\nu)\subseteq\underline{N}(\mu)\cap\underline{N}(\nu)$。下证 $\underline{N}(\mu)\cap\underline{N}(\nu)\subseteq\underline{N}(\mu\cap\nu)$。

对于任意 $x\in U$，有：

$$\begin{aligned}&\underline{N}(\mu)(x)\wedge\underline{N}(\nu)(x)\\&=\bigvee_{\sigma\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\sigma(y)\rightarrow\mu(y))\wedge\bigvee_{\omega\in N(x)}\bigwedge_{z\in U}(\omega(z)\rightarrow\nu(z))\\&=\bigvee_{\sigma\in N(x)}(\bigwedge_{y\in U}(\sigma(y)\rightarrow\mu(y))\wedge\bigvee_{\omega\in N(x)}\bigwedge_{z\in U}(\omega(z)\rightarrow\nu(z)))\\&=\bigvee_{\sigma\in N(x)}\bigvee_{\omega\in N(x)}(\bigwedge_{y\in U}(\sigma(y)\rightarrow\mu(y))\wedge\bigwedge_{z\in U}(\omega(z)\rightarrow\nu(z)))\\&=\bigvee_{\sigma\in N(x)}\bigvee_{\omega\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}((\sigma(y)\rightarrow\mu(y))\wedge\bigwedge_{z\in U}(\omega(z)\rightarrow\nu(z)))\\&\leqslant\bigvee_{\sigma\in N(x)}\bigvee_{\omega\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}((\sigma(y)\rightarrow\mu(y))\wedge(\omega(y)\rightarrow\nu(y)))\\&\leqslant\bigvee_{\sigma\in N(x)}\bigvee_{\omega\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(((\sigma(y)\wedge\omega(y))\rightarrow\mu(y))\wedge((\sigma(y)\wedge\\&\quad\omega(y))\rightarrow\nu(y)))\end{aligned}$$

只需证明，对于任意 $\sigma,\omega\in N(x)$，有：

$$\begin{aligned}&\bigwedge_{y\in U}(((\sigma(y)\wedge\omega(y))\rightarrow\mu(y))\wedge((\sigma(y)\wedge\omega(y))\rightarrow\nu(y)))\\&\quad\leqslant\underline{N}(\mu\cap\nu)(x)\end{aligned}$$

由于 N 是一元的，所以存在 $\lambda\in N(x)$，使得 $\lambda\subseteq\sigma\cap\omega$。从而有：

$$\begin{aligned}&\bigwedge_{y\in U}(((\sigma(y)\wedge\omega(y))\rightarrow\mu(y))\wedge((\sigma(y)\wedge\omega(y))\rightarrow\nu(y)))\\&\leqslant\bigwedge_{y\in U}((\lambda(y)\rightarrow\mu(y))\wedge(\lambda(y)\rightarrow\nu(y)))\\&=\bigwedge_{y\in U}(\lambda(y)\rightarrow(\mu(y)\wedge v(y)))\text{(由定理1(3))}\\&\leqslant\bigvee_{\kappa\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\kappa(y)\rightarrow(\mu(y)\wedge v(y)))\\&=\underline{N}(\mu\cap\nu)(x)\end{aligned}$$

所以对于任意 $\sigma,\omega\in N(x)$，有：

$$\begin{aligned}&\bigwedge_{y\in U}(((\sigma(y)\wedge\omega(y))\rightarrow\mu(y))\wedge((\sigma(y)\wedge\omega(y))\rightarrow\nu(y)))\\&\quad\leqslant\underline{N}(\mu\cap\nu)(x)\end{aligned}$$

(2)证明过程与(1)类似。

3.7 欧几里得模糊邻域系统

定义14 $N:U\rightarrow P(F(U))$是 U 上的一个模糊邻域系统。称 N 是欧几里得的，如果对于任意 $x\in U$ 和任意 $\mu\in N(x)$，存在 $\nu\in N(x)$，使得对于任意 $y\in U$，当 $\nu(y)>0$ 时，则对任意 $\lambda\in N(y)$，有 $\mu\subseteq\lambda$。

命题7 设 U 是一个论域，模糊邻域系统 N 是欧几里得的，则有：

(1)对于任意 $\mu\in F(U)$，有 $\overline{N}(\mu)\subseteq\underline{N}(\overline{N}(\mu))$；

(2)对于任意 $\mu\in F(U)$，有 $\underline{N}(\mu)\supseteq\overline{N}(\underline{N}(\mu))$。

证明：(1)对于任意 $x\in U$ 和任意 $\mu\in N(x)$，有：

$$\begin{aligned}\underline{N}(\overline{N}(\mu))(x)&=\bigvee_{\nu\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\nu(y)\rightarrow\overline{N}(\mu)(y))\\&=\bigvee_{\nu\in N(x)}\bigwedge_{y\in U}(\nu(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\\&\quad\mu(z)))\end{aligned}$$

由于 N 是欧几里得的，对于任意 $\nu\in N(x)$，存在 $\lambda\in$

$N(x)$，使得对于任意 $t\in U$，当 $\lambda(t)>0$ 时，则对任意 $\kappa\in N(t)$，有 $\nu\subseteq\kappa$。从而有：

$$\underline{N}(\overline{N}(\mu))(x)\geqslant\bigwedge_{y\in U}(\lambda(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z)))$$

只需证明，对于任意 $y\in U$，有：

$$\lambda(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z))\geqslant\overline{N}(\mu)(x)$$

1）若 $\lambda(y)=0$，则有：$0\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z))=1\geqslant\overline{N}(\mu)(x)$；

2）若 $\lambda(y)>0$，则有：$\lambda(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z))\geqslant\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z))$。

再次利用 N 是欧几里得的，对于上述 $\nu\in N(x)$，以及任意 $\omega\in N(y)$，有 $\nu\subseteq\omega$。由于对任意 $\omega\in N(y)$，均有：

$$\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z))\geqslant\bigvee_{z\in U}(\nu(z)\otimes\mu(z))$$

所以：

$$\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z))\geqslant\bigvee_{z\in U}(\nu(z)\otimes\mu(z))$$

从而：

$$\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z))\geqslant\bigvee_{z\in U}(\nu(z)\otimes\mu(z))$$
$$\geqslant\bigwedge_{\alpha\in N(x)}\bigvee_{z\in U}(\alpha(z)\otimes\mu(z))=\overline{N}(\mu)(x)$$

故

$$\lambda(y)\rightarrow\bigwedge_{\omega\in N(y)}\bigvee_{z\in U}(\omega(z)\otimes\mu(z))\geqslant\overline{N}(\mu)(x)$$

（2）证明过程与（1）类似。

结束语 本文对模糊邻域系统提出了基于 t 模算子的模糊粗糙上近似算子和基于一般模糊蕴涵算子的模糊粗糙下近似算子，并讨论了模糊粗糙算子的基本性质。然后，研究了模糊邻域系统是串行、自反、一元、对称、欧几里得时对应模糊粗糙上、下近似算子的代数结构。在后续研究中，将进一步探讨模糊邻域系统的模糊粗糙近似算子的代数结构。

参 考 文 献

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences，1982，11(5)：341-356.

[2] QIAN Y H，LIANG X Y，WANG Q，et al. Local rough set：A solution to rough data analysis in big data[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2018，97：38-63.

[3] KANEIWA K，KUDO Y. A sequential pattern mining algorithm using rough set theory[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2011，52(6)：881-893.

[4] WAN J H，CHEN H M，LI T R，et al. Dynamic interaction feature selection based on fuzzy rough set[J]. Information Sciences，2021，581：891-911.

[5] WANG G Q，LI T R，ZHANG P F，et al. Double-local rough sets for efficient data mining[J]. Information Sciences，2021，571：475-498.

[6] YAO Y Y. Constructive and algebraic methods of method theory of rough sets[J]. Information Sciences，1998，109(1)：21-47.

[7] YAO Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and approximation operators[J]. Information Sciences，1998，111(1)：239-259.

[8] ZHU W. Topological approaches to covering rough sets[J]. Information Sciences，2007，177：1499-1508.

[9] BONIKOWSKI Z，BRYNIARSKI E，WY-BRANIEC-SKARDOWSKA U. Extensions and in-tentions in the rough set theory[J]. Information Sciences，1998，107：149-167.

[10] YAO Y Y，YAO B X. Covering based rough set approximations[J]. Information Sciences，2012，200：91-107.

[11] ZHU P，XIE H Y，WEN Q Y. A unified view of consistent functions[J]. Soft Computing，2017，21(9)：2189-2199.

[12] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control，1965，8(3)：338-353.

[13] DOBOIS D，PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General System，1990，17：191-209.

[14] LIN T Y. Granular computing on binary I：data mining and neighborhood systems[M]//Rough Sets and Knowledge Discovery. Berlin：Springer，1998：107-121.

[15] ZHAO F F，LI L Q. Axiomatization on generalized neighborhood system-based rough sets[J]. Soft Computing，2018，22(18)：6099-6110.

[16] FANG J M，CHEN P W. One-to-one corres-pondence between fuzzifying topologies and fuzzy preorders[J]. Fuzzy Sets and Systems，2007，158(16)：1814-1822.

[17] FANG J M，YUE Y L. K. Fan's theorem in fuzzifying topology[J]. Information Sciences，2004，162(3/4)：139-146.

[18] HERRLICH H，ZHANG D X. Categorical properties of probabilistic convergence spaces[J]. Applied Categorical Structures，1998，6(3)：495-513.

[19] YING M S. A new approach for fuzzy topology(I)[J]. Fuzzy Sets System，1991，39(3)：495-513.

[20] LI L Q，JIN Q，YAO B X，et al. A rough set model based on fuzzifying neighborhood systems[J]. Soft Computing，2020，24(8)：6085-6099.

[21] ZHANG Y L，LI C Q，LIN M L，et al. Relationships between generalized rough sets based on covering and reflexive neighborhood systems[J]. Information Sciences，2015，319：56-67.

[22] LIAU C J，LIN E B，SYAU Y R. On consistent functions for neighborhood systems[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2020，121：39-58.

[23] SUN X R，LIU H W. On the constructions of t-norms on bounded lattices[J]. Information Sciences，2021，575：173-184.

[24] GERA Z，DOMBI J. Type-2 implications on non-interactive fuzzy truth values[J]. Fuzzy Sets and Systems，2008，159：3014-3032.

[25] DANA P. Prime，minimal prime and maximal ideals spaces in residuated lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems，2021，405：47-64.

[26] MA Z M，HU B Q. Topological and lattice structures of L-fuzzy rough sets determined by lower and upper sets[J]. Information Sciences，2013，218：194-204.

RAN Hong，born in 1997，postgraduate. His main research interests include rough set theory，formal concept analysis and so on.

QIN Ke-yun，born in 1962，Ph.D，professor，Ph.D supervisor. His main research interests include rough set theory，formal concept analysis and so on.